Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Г.С. Пасічник

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ: ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Чернівці
2020

ББК 22.183.4.3я73
УДК 519.854(075.8)

Рецензенти:

Мединський І.П., канд. фіз.-мат.наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики національного університету "Львівська політехніка";

Григорків В.С., доктор фіз.-мат.наук, професор, завідувач кафедри економіко-математичного моделювання ЧНУ

Пасічник Г.С.

М 545 Методи оптимізації: Дискретне програмування: Навчальний посібник – Чернівці: Золоті литаври, 2020. – 100 с.

Навчальний посібник містить довідковий матеріал, приклади розв'язування задач, набори задач для самостійного розв'язування з розділу "спеціальні задачі лінійного програмування" курсу "методи оптимізації".

Для студентів спеціальностей "інформатика", "прикладна математика" та економічних.

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 1 від 26 серпня 2020 року)

ПЕРЕДМОВА

Цілочислове лінійне програмування орієнтоване на розв'язування задач лінійного програмування, в яких усі або деякі змінні повинні набувати цілих (або дискретних) значень. Не дивлячись на інтенсивні дослідження, які проводяться протягом останніх десятиліть, відомі обчислювальні методи розв'язування задач цілочислового лінійного програмування далекі від досконалих. Насьогодні не існує надійних обчислювальних алгоритмів розв'язування таких задач.

В посібнику розглядаються спочатку приклади задач цілочислового програмування, а потім методи їх розв'язування.

1 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Серед практичних важливих задач знаходження умовного екстремуму лінійної функції важливе місце посідають задачі з вимогою цілочисловості усіх чи частини змінних. Вони отримали назву задач цілочислового програмування.

Історично першою задачею цілочислового типу є опублікована угорським математиком Е. Егерварі в 1932 році задачі про призначення персоналу. Систематичні дослідження в області цілочислового програмування починаються з 1955 року, коли на Другому симпозиумі з лінійного програмування була розглянута задача про бомбардувальника, відома також як задача про ранець.

Розглянемо спочатку прості практичні задачі, які зводяться до задач цілочислового лінійного програмування, а потім звернемось до більш складних.

Приклад 1. Розподіл капіталовкладень. Оцінюється п'ять проектів з розгляду їх можливого фінансування на майбутній трирічний період. Наступна таблиця містить очікуваний прибуток від реалізації кожного проекту і розподілу необхідних капіталовкладень за роками.

Проект	Витрати (млн. дол./рік)			Прибуток (млн. дол./рік)
	1-й рік	2-й рік	3-й рік	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	4	4	1	15
5	8	6	10	30
Доступний капітал (млн. дол./рік)	25	25	25	

◀ Припускається, що кожний утвержденний проект реалізовуватиметься протягом трьохрічнрго періоду. Необхідно визначити сукупність проектів, якій відвідатиме максимум сумарного прибутку. Задача зводиться до задачі типу "так-ні" відносно кожного проекту.

Означимо двійкові змінні

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{якщо } j\text{-й проект утверджений}, \\ 0, \text{якщо } j\text{-й проект не утверджений}, \end{cases} \qquad j \in \{1, \dots, 5\}.$$

Математична модель задачі має вигляд

$$f = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25, \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25; \end{cases}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \ j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Оптимальнй цілочисловий розв'язок цієї задачі $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0$ з $f_{\max} = 95$ млн. дол. Це означає, що необхідно вибрати для фінансування усі проекты, крім п'ятого.

Цікаво порівняти розв'язок даной задачі з розв'язком задачі лінійного програмування з тими ж обмеженнями, однак без умиви цілочисловості змінних, яка отримується заміною услови $x_j = 0$ чи $x_j = 1$ обмеженнями $0 \leq x_j \leq 1$ для всіх $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Така задача має розв'язок $x_1 = 0,5789$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0,7368$ і $f_{\max} = 108,68$ млн. дол. Цей розв'язок з точки зору цілочислової задачі е має змісту. Можна було б спробувати заокруглити отриманий результат, що привело б до $x_1 = x_5 = 1$. Отриманий при цьому розв'язок є недопустимим, бооскільки порушуються обмеження задачі. ▶

Приклад 2. Задача з сталими витратами.

Три телефонні компанії запропонували клієнтові підписатися на їх послуги на дальні дзвінки в межах Сполучених Штатів. Послуги компанії MaBell коштують 16 дол. в місяць плюс 0,25 дол. за кожну хвилину зв'язку. Компанія PaBell оцінює свої послуги в 25 дол. на місяць, але має щохвилинну оплату 0,21 дол. Щомісячна плата компанії BabyBell рівна 18 дол., а вартість хвилини зв'язку – 0,22 дол. Телефонні дзвінки даного клієнта на далекі відстані в середньому складають зазвичай 200 хвилин у місяць. Передбачається, що клієнт не вносить щомісячної плати, якщо не використовує телефон для дзвінків на далеких відстані, і може розподіляти дзвінки між трьома компаніями, як йому хочеться. Як клієнт повинен використовувати три компанії, щоб мінімізувати свій місячний телефонний рахунок?

◀ Ця задача може бути легко розв'язана без використання методів цілочислового лінійного програмування, однак повчально сформулювати її як цілочислову задачу.

Нехай x_1 – кількість хвилин розмови (на далекі відстані) щомісяця через компанію MaBell,
x_2 – кількість хвилин розмови щомісяця через компанію PaBell,
x_3 – кількість хвилин розмови щомісяця через компанію BabyBell;
$y_j = 1$, якщо $x_j > 0$, і $y_j = 0$ при $x_j = 0$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Для забезпечення рівності $y_j = 1$ при додатному значенні змінної x_j використаємо обмеження $x_j < My_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де M – досить велике додатне число, яке не повинне обмежувати величину x_j.

Оскільки дзвінки на далекі відстані займають близько 200 хвилин щомісяця, тобто $x_j \leq 200$ для всіх $j \in \{1, 2, 3\}$, тому достатньо покласти $M = 200$. Тепер можна сформулювати наступну задачу.

$$f = 0,25x_1 + 0,21x_2 + 0,22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 200, \\ x_1 \leq 200y_1, \\ x_2 \leq 200y_2, \\ x_3 \leq 200y_3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \;\; y_j \in \{0, 1\}, \;\; j \in \{1, 2, 3\}.$$

Сформульована задача показує, що щомісячна j-а оплата за користування телефоном є частиною цільовою функції F лише за умови $y_j = 1$, яке за означенням може виконуватися лише тоді, коли $x_j > 0$. Якщо в оптимальному плані буде $x_j = 0$, то мінімуму функції f з урахуванням додатності коефіцієнта при y_j можна досягти тільки при рівності нулю y_j, що і потрібно.

Оптимальним розв'язком цієї задачі є $x_3 = 200$, $y_3 = 1$, а всі іншо змінні дорівнюють нулю. Це означає, що копання BabyBell має бути вибрана для послуг дальнього зв'язку. Слід підкреслити, що інформація $y_3 = 1$ є надлишковою, оскільки це випливає з $x_3 = 200$. Насправді основною причиною використання змінних y_1, y_2 і y_3 є лише облік місячної плати за телефон. По суті тільки ці двійкові змінні перетворюють початкову нелінійну задачу у частково цілочислову, яка піддається аналітичному розв'язуванню.▶

Зазначимо, що викладена концепція "твердого гонорару" є типовою для задачі, відомоі в літературі як *задача з сталими витратами.*

Приклад 3. Задача про покриття.

Для забезпечення безпеки студентів відділ безпеки американського університету встановлює телефони екстреного виклику на території студентського містечка. Відділу бажано встановити мінімальну кількість телефонів так, щоб на кожній з основних вулиць цього містечка був розташований принаймні один телефон. На рис.1 зображено основні вулиці (від A до K) студентського містечка.

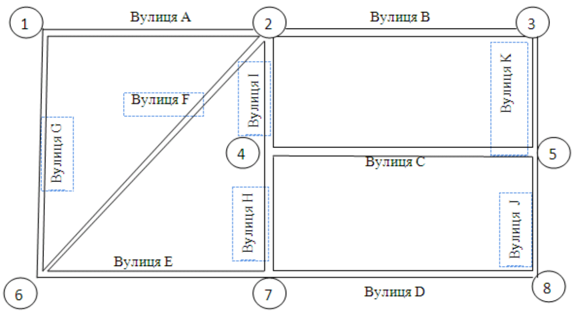

Рис.1 Схема вулиць студентського містечка.

◀ Логічно розташувати телефони на перетинах вулиць так, щоб кожен телефон міг обслуговувати щонайменше дві вулиці. З рис. 1

видно, що задане розташування вулиць вимагає не більше восьми телефонів.

Введемо змінні x_j рівні 1, якщо телефон розташований на перехресті j, $j \in \{1, 2..., 8\}$, і 0 в протилежному випадку. Умови задачі вимагають установки щонайменше одного телефону на кожній з 11 вулиць (від A до K). Тому задачу можна сформулювати так:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 1(\text{вулиця A}), \\ x_2 + x_3 > 1(\text{вулиця B}), \\ x_4 + x_5 > 1(\text{вулиця C}), \\ x_7 + x_8 > 1(\text{вулиця D}), \\ x_6 + x_7 > 1(\text{вулиця E}), \\ x_2 + x_5 > 1(\text{вулиця F}), \\ x_1 + x_6 > 1(\text{вулиця G}), \\ x_4 + x_7 > 1(\text{вулиця H}), \\ x_2 + x_4 > 1(\text{вулиця I}), \\ x_5 + x_8 > 1(\text{вулиця J}), \\ x_3 + x_5 > 1(\text{вулиця K}); \end{cases}$$

$$x_j \in \{0, 1\},\ j \in \{1, ..., 8\}.$$

Розв'язок задачі вказує на необхідно встановлення телефонів на перехрестях 1, 2, 5 і 7. ►

Розглянена вище модель є типовим представником загального класу *задач про покриття.* У цій моделі всі змінні є двійковими; усі коефіцієнти лівої частини кожного обмеження дорівнюють 0 або 1, а ліві частини обмежень більші 1; цільова функція має вигляд $c_1x_1 + ... + c_nx_n$, де $c_j > 1$, $j \in \{1, 2..., n\}$ досліджується на мінімум. У прикладі 3 $c_j = 1$ для всіх j. Однак, якщо величина c_j визначає вартість установки телефону на j-му перехресті, то ці коефіцієнти набуватиуть значень, відмінних від 1.

Приклад 4. Обмеження типу "або – або".

Машинобудівна компанія використовує один верстат для виконання трьох замовлень. Час виконання, а також термін здачі кожного замовлення задані в таблиці. Терміни здачі замовлень обчислюються від початкової дати, тобто передбачуваного початку виконання першого замовлення.

Замовлення	Час виконання замовлення (дні)	Термін здачі замовлення (дні)	Штраф за затримку замовлення (дол./день)
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

Визначити послідовність виконання замовлень, яка мінімізує штраф за затримку здачі замовлень.

◀ Визначимо змінну x_j як дату завершення замовлення j, вимірювану в днях від початкової дати. Задача має два типи обмежень: 1) обмеження, які гарантують невиконання двох замовлень одночасно; 2) обмеження на терміни здачі замовлень.

Спочатку розглянемо перший тип обмежень. Два замовлення i та j, час виконання яких p_i і P_j не виконуватимуться одночасно, якщо

$$x_i \geq x_j + p_j \text{ або } x_j \geq x_i + p_i$$

залежно від того, чи замовлення i передуватиме виконанню замовлення j або навпаки.

Оскільки всі математичні моделі мають справу лише з сумісними обмеженнями, ми перетворимо обмеження типа "або–або", ввівши додаткову двійкову змінну

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо замовлення } i \text{ передує замовленню } j, \\ 0, \text{якщо замовлення } j \text{ передує замовленню } i, \end{cases}$$

При досить великому M обмеження типу "або – або" перетвориться в два сумісні обмеження

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ і } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i.$$

Вказане перетворення гарантує, що лише одне з двох обмежень може бути активним у довільний момент часу. Якщо $y_{ij} = 0$, то перше обмеження буде активним, а друге - зайвим, оскільки його ліва частини міститиме величину M, яка набагато больша, ніж p_i. Якщо $y_{ij} = 1$, то перше обмеження надлишкове, а друге – активне.

Розглянемо тепер обмеження на терміни здачі замовлень. При заданій даті d_j здачі замовлення j введемо змінну s_j, що

$$x_j + p_j + s_j = d_j.$$

Якщо $s_j \geq 0$, то замовлення здається в строк, якщо $s_j < 0$, отримуємо збитки, пов'язані з затримкою здачі замовлення. Використовуючи заміну $s_j = s'_j - s''_j$, $s'_j \geq 0$, $s''_j \geq 0$, одержуємо

$$x_j + s'_j - s''_j = d_j - p_j.$$

Штраф за затримку здачі замовлення пропорційний s''_j.

Математична модель задачі має вигляд

$$f = 19s''_1 + 12s''_2 + 34s''_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + My_{12} \geq 20, \\ -x_1 + x_2 - My_{12} \geq 5 - M, \\ x_1 - x_3 + My_{13} \geq 15, \\ -x_1 + x_3 - My_{13} \geq 5 - M, \\ x_2 - x_3 + My_{23} \geq 15, \\ -x_2 + x_3 - My_{23} \geq 20 - M, \\ x_1 + s'_1 - s''_1 \geq 25 - 5, \\ x_2 + s'_2 - s''_2 \geq 22 - 20, \\ x_3 + s'_3 - s''_3 \geq 35 - 15; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ s'_j \geq 0,\ s''_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\},$$

$$\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\} \subset \{0, 1\}.$$

Розв'язой задачі $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ і $x_3 = 25$. Отже, оптимальною послідовністю виконання замовлень буде $2 \to 1 \to 3$. Відповідно замовлення 2 виконується за час $0 + 5 = 5$, замовлення 1 – за час $20 + 5 = 25$ і замовлення 3 – за $25 + 15 = 40$ днів. У результаті виконання замовлення 3 затримано на $40 - 35 = 5$ днів, що приводить до штрафу у розмірі $5 \cdot 34 = 170$ дол. ►

ЗМІСТ

Навчальне видання

Пасічник Галина Савеліївна

Методи оптимізації: дискретне програмування

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір, верстка: *Пасічник Г.С.*

Підписано до друку 1.10.2020. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум.друк.арк. 10.
Обл.-вид.арк. 9,87 . Зам 12-85 . Тираж 50 прим.

Виготівник: Яворський С. Н.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ЧЦ № 18 від 17.03.2009 р. 58000, м.
Чернівці, вул. І. Франка, 20, оф.18, тел. 099 73 22 544