УДК 517.95+517.929+519.863
№ держреєстрації 0102U006596
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ЧНУ ім. Ю.Федьковича
58000, м.Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
тел. (0372) 52-22-66, mathmod@chnu.cv.ua

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
Проректор з наукової роботи
професор _______Ушенко О.Г
____________2005 р.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ З ОСОБЛИВОСТЯМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ

(заключний)

Керівник НДЧ ____________ Ушенко О.Г.

Зав. кафедрою
математичного моделювання,
д.ф.-м.н., професор ____________ Черевко І.М.

Керівник НДР
д.ф.-м.н., професор ____________ Івасишен С.Д.

2005

С П И С О К   А В Т О Р І В

1. Завідувач кафедри, доктор фіз.-мат. наук, професор	_____________	Черевко І.М. (реферат, вступ, 3.1, 3.3, висновки)
2. Професор кафедри, доктор фіз.-мат. наук, професор	_____________	Івасишен С.Д. (реферат, вступ, 1.1.1, 1.2.1 – 1.2.8, 1.3.1-1.3.3, висновки)
3. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Лавренчук В.П. (1.1.4)
4. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Клевчук І.І. (3.2)
5. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Кушнірчук В.Й. (4.1)
6. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Літовченко В.А. (2.1- 2.3)
7. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Готинчан Т.І. (2.1)
8. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Пасічник Г.С. (1.1.1 – 1.1.3)
9. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Дронь В.С. (1.3.1 – 1.3.3, 4.2, 4.3)
10. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	_____________	Піддубна Л.А. (3.3)

11. Доцент кафедри,
кандидат фіз.-мат. наук, _____________ Балабушенко Т.М.
доцент (1.1.3, 1.2.1 – 1.2.8)

12. Асистент кафедри _____________ Лаюк В.В.
(1.3.4)

13. Асистент кафедри _____________ Івасюк Г.П.
(1.2.9)

Нормоконтролер _____________ Холодницька Л.М.

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 156 с., 138 джерел.

Об'єкт дослідження – рівняння з частинними похідними параболічного типу, диференціально-функціональні рівняння, моделі економічних та еколого-економічних процесів.

Мета роботи – дослідження коректної розв'язності і властивостей розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь з різними особливостями і виродженнями; поширення методу інтегральних многовидів на нові класи диференціально-функціональних рівнянь, побудови вищих наближень в методі усереднення для системи в стандартній формі; побудова та дослідження математичних моделей економічних та еколого-економічних процесів.

Для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині і зростаючими коефіцієнтами, а також ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова досліджені властивості фундаментальних розв'язків та описані класи коректності задачі Коші. Встановлені властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях. Досліджена цілковита розв'язність задачі Коші з узагальненими початковими даними для різних типів параболічних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь. Здійснено зведення лінійної сингулярно збуреної системи із запізненням у швидких і повільних змінних до блочно-трикутного вигляду і встановлено принцип зведення для дослідження стійкості її розв'язків. Одержано друге наближення у методі усереднення системи диференціально-різницевих рівнянь у стандартній формі та побудований алгоритм наближеного знаходження неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів для диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів. Побудовані та досліджені математичні моделі еколого-економічного балансу, динамічна модель функціонування франчайзингу та економіко-математична модель розвитку промислового потенціалу регіону.

Усі наведені в звіті результати є новими. Вони можуть бути використані в теоретичних дослідженнях і при обґрунтуванні методик розв'язання конкретних прикладних задач.

ПАРАБОЛІЧНІ, УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ, ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ВИРОДЖЕННЯ, СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ, ЗАДАЧА КОШІ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, КОРЕКТНА, ЦІЛКОВИТА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, ІНТЕГРАЛЬНИЙ МНОГОВИД.

З М І С Т

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ФР – фундаментальний розв’язок,

ФРЗК – фундаментальний розв’язок задачі Коші,

ФМРЗК – фундаментальна матриця розв’язків задачі Коші.

В С Т У П

У звіті наведені результати, які одержані протягом 2001-2005 рр. співробітниками кафедри математичного моделювання ЧНУ при виконанні досліджень на тему "Дослідження математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями з особливостями і виродженнями". Ці дослідження є продовженням виконаного в 1996-2000 рр. кафедрою математичного моделювання дослідження на тему "Дослідження детермінованих і стохастичних математичних моделей, які описуються диференціальними і диференціально-функціональними рівняннями".

У звіті представлені в основному результати, що стосуються вивчення ряду актуальних питань теорії параболічних рівнянь з різними особливостями і виродженнями, теорії диференціально-функціональних рівнянь, а також математичного моделювання соціально-економічних процесів. Наведені результати стосуються передусім дослідження коректної розв'язності, інтегрального зображення і різноманітних властивостей розв'язків задачі Коші для розглядуваних класів параболічних рівнянь і систем рівнянь, дослідження сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь за допомогою асимптотичних методів і методу інтегральних многовидів, а також створення математичних моделей еколого-економічних систем, розвитку промислового потенціалу регіонів і регіональних інвестиційних потоків, математичних моделей в ґрунтознавстві.

Звіт складається з чотирьох розділів.

Результати, що представлені в першому розділі, відносяться до дослідження:

– фундаментальної матриці розв'язків, коректної розв'язності задачі Коші та задачі без початкових умов для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині і зростаючими коефіцієнтами;

– властивостей розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях;

– властивостей фундаментального розв'язку та коректної розв'язності задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова.

У другому розділі зібрані результати:

– вивчення просторів основних функцій типу W та відповідних просторів узагальнених функцій;

– побудови операторів Бесселя дробового інтегро-диференціювання;

– дослідження коректної розв’язності задачі Коші для різних типів параболічних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь з узагальненими початковими умовами.

У третьому розділі наводяться результати дослідження сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь асимптотичними методами і методом інтегральних многовидів.

Четвертий розділ присвячений математичному моделюванню еколого-економічних систем, функціонування франчайзингу, накопичення елементів змінної валентності у ґрунтових ортштейнах, розвитку промислового потенціалу та інвестиційних потоків регіону.

Дослідження, результати яких увійшли до звіту, велись при активному співробітництві з Чернівецькою філією відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Результати цих досліджень використовуються при виконанні студентами курсових, бакалаврських і магістерських дипломних робіт. За їх матеріалами захищена у 2004 році кандидатська дисертація Т.М. Балабушенко (науковий керівник С.Д. Івасишен). Частина цих матеріалів увійшла до докторської дисертації І.М. Черевка, захист якої відбувся у 2004 році. До розробки окремих питань, висвітлених у звіті, залучались студенти В.Ф. Мельничук, Р.М. Атаманюк, О.В. Шеленко і І.Р. Тимків.

Виконавці НДР брали активну участь у роботі міжнародних, всеукраїнських та регіональних наукових конференцій. Ними загалом зроблено 45 доповідей.

За розробку питань, яким присвячений звіт, В.А. Літовченку присуджено премію Президента України для молодих учених за 2004 рік.

1 ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ОСОБЛИВОСТЯМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ

У цьому розділі зібрані результати дослідження фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) чи фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), коректної розв'язності задачі Коші, властивостей розв'язків для декількох класів систем і рівнянь параболічного типу з певними особливостями та виродженнями.

1.1 Параболічні системи зі зростаючими коефіцієнтами

У підрозділі наводяться результати дослідження ФМРЗК чи ФРЗК деяких параболічних систем і рівнянь, які можуть мати виродження на початковій гіперплощині та коефіцієнти яких можуть прямувати до нескінченності при $|x| \to \infty$.

Результати пунктів 1.1.1 і 1.1.2 належать С.Д. Івасишену і Г.С. Пасічник [1–7], 1.1.3 – Г.С. Пасічник і Т.М.Балабушенко [8–12] та 1.1.4 – В.П.Лавренчуку [13, 14].

1.1.1 ФМРЗК для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Нехай $n, b_1, \ldots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$; b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j \equiv b/b_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, $||k|| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k \equiv (k_1, ..., k_n)$ – мультиіндекс із $\mathbf{Z}_+^n$; $M \equiv \sum_{j=1}^n m_j$; T – задане додатне число; $\Pi_H \equiv \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}^n$; I – одинична матриця порядку N; i – уявна одиниця; $\mathbb{C}_N$ – сукупність усіх стовпчиків висоти N з комплексними елементами. Використовуватимемо такі спеціальні відстані між точками x і y з $\mathbb{R}^n$:

$$p(x, y) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{2/m_j} \right)^{1/2}, \quad q(x, y) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{q_j} \right)^{1/q'},$$

де $q_j \equiv 2b_j/(2b_j-1)$, $j \in \{1,...,n\}$, $q' \equiv \max\limits_{1\le j\le n} q_j$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\Big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{||k||\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \hat{b}(t,x)\Big)u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x)\in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.1}$$

де a_k, $||k|| \le 2b$, і $\hat{b}$ – квадратні матриці порядку N, u і f – стовпчики висоти N; α, β – невід'ємні неперервні на $[0,T]$ функції, причому при $t \in (0,T]$ $\alpha(t) > 0$ і $\beta(t) > 0$.

Відзначимо, що при $t = 0$ можливий випадок $\alpha(0)\beta(0) = 0$, тобто система (1.1) може вироджуватись при $t = 0$.

Сформулюємо припущення щодо коефіцієнтів системи (1.1). Спочатку розглянемо відповідну системі (1.1) систему без функцій α, β і без коефіцієнта $\hat{b}$

$$\Big(I\partial_t - \sum_{||k||\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k\Big)u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.2}$$

Припускатимемо, що виконуються наступні умови.

(**Б**$_1$). Відповідна системі (1.1) система (1.2) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D [15], тобто існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$;

2) функції $b_k(t,x) \equiv a_k(t,x)D(x)^{||k||-2b}$, $(t,x)\in \Pi_{[0,T]}$, $||k|| \le 2b$, обмежені;

3) система рівнянь

$$\Big(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2b} b_k(t,x)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\Big)v = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} рівномірно на $\Pi_{[0,T]}\times\mathbb{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічна, де $\overrightarrow{2B} \equiv (2b_1,\dots,2b_n,2b)$; це означає, що

p-корені рівняння

$$\det\left(Ip - \sum_{||k||+k_{n+1}=2b} b_k(t,x)(i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}}\right) = 0$$

задовольняють умову

$$\exists\delta > 0 \quad \forall(t,x) \in \Pi_{[0,T]} \quad \forall\sigma \in \mathbb{R}^n \quad \forall\mu \in \mathbb{R} :$$
$$\mathrm{Re} \quad p(t,x,\sigma,\mu) \leq -\delta\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j} + \mu^{2b}\right).$$

($\mathbf{Б}_2$). $\exists\, C > 0 \quad \exists\, \lambda \in (0,1] \quad \forall\,\{(t,x),(t,y)\} \subset \Pi_{[0,T]} \quad \forall\, k,\ ||k|| \leq 2b :$ $|a_k(t,x) - a_k(t,y)| \leq C(p(x;y))^{\lambda}((D(x))^{2b-||k||} + (D(y))^{2b-||k||})$; функції b_k, $||k|| \leq 2b$, неперервні за t рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$.

($\mathbf{Б}_3$). Функція $\hat{b}$ визначена в $\Pi_{[0,T]}$, обмежена, неперервна за t і задовольняє умову

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\,\{(t,x),(t,y)\} \subset \Pi_{[0,T]} :\ |\hat{b}(t,x) - \hat{b}(t,y)| \leq C(p(x;y))^{\lambda},$$

де число λ з умови $\mathbf{Б}_2$.

($\mathbf{Б}_4$). Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

1) $\exists\, C > 0 \quad \forall\,\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n,\ q(x;y) \leq 1 :\ D(x) \leq CD(y)$;

2) $\exists\, C > 0 \quad \forall\,\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n,\ q(x;y) > 1 :$

$$D(x) \leq C\exp\{\epsilon \textstyle\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|\, (D(y))^{m_j}\},$$

де ϵ – досить мале додатне число.

Нехай $g : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ – функція, яка зв'язана з характеристикою дисипації D умовою

($\mathbf{Б}_5$). Функція g має похідні $\partial_x^k g$, $0 < ||k|| \leq 2b$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_x^k g(x)| \leq C\eta(D(x))^{||k||},$$

$$|\partial_x^k g(x) - \partial_y^k g(y)| \leq C\eta(p(x,y))^{\lambda}((D(x))^{||k||} + (D(y))^{||k||}),$$

$$\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < ||k|| \le 2b,$$

де $C > 0$, λ з умови $\mathbf{Б}_2$, η – досить мале додатне число.

($\mathbf{Б}_6$). Для системи (1.2) існує спряжена за Лагранжем система, для якої виконуються умови $\mathbf{Б}_1$ і $\mathbf{Б}_2$.

Користуватимемось ще такими позначеннями:

$$A(t,\tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \quad B(t,\tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta,$$

$$E_c^d(t,\tau,x) \equiv \exp\{-c\sum_{j=1}^{n}(B(t,\tau))^{1-q_j}|x_j|^{q_j} + dA(t,\tau)\},$$

$0 \le \tau < t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, c і d – сталі.

Наведемо результати про ФМРЗК для системи (1.1), тобто про таку квадратну матрицю $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, що формулою

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ \ (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначається розв'язок системи (1.1), який задовольняє умову

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Теорема 1.1. *Нехай для системи (1.1) виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$ – $\mathbf{Б}_4$. *Тоді для неї існує ФМРЗК* $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *для якої справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_l\bigg((B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2b)}\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2b}\}+$$

$$+(D(\xi))^{-l}\bigg)E_c^d(t,\tau,x-\xi), \quad ||k|| < 2b, \tag{1.3}$$

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_l\bigg((B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2b)}\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2b}\}+$$

$$+(D(\xi))^{-l}\Big)E_c^d(t,\tau,x-\xi)\Big(1+(D(x))^{2b}+\exp\{\epsilon MB(t,\tau)(D(x))^{2b}\}\Big),$$

$$||k||=2b, \tag{1.4}$$

а також оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C\sum_{j=0}^{||k||}(B(t,\tau))^{-(M+||k||-j)/(2b)}(D(x))^j\times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\exp\{g(x)-g(\xi)\},\quad ||k||<2b, \tag{1.5}$$

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\sum_{j=0}^{||k||}\Big((B(t,\tau))^{-(M+||k||-j)/(2b)}+(D(\xi))^{-l}\Big)(D(x))^j\times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\Big(1+(D(x))^{2b}+\exp\{\epsilon MB(t,\tau)(D(x))^{2b}\}\Big)\exp\{g(x)-g(\xi)\},$$

$$||k||=2b, \tag{1.6}$$

В оцінках (1.3)–(1.6) $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, C_l, C *і* c *– додатні сталі,* d *— стала з* $\mathbb{R}$, l *– довільно фіксоване додатне число,* g *– будь-яка функція, яка задовольняє умову* $\mathbf{Б}_5$.

Якщо, крім умов $\mathbf{Б}_1$*–*$\mathbf{Б}_4$*, виконується умова* $\mathbf{Б}_6$*, то для спряженої системи існує ФМРЗК* $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $0<\tau<t\le T$, $\{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n$, *і правильні рівності*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x)=\overline{Z(t,x;\tau,\xi)}', \tag{1.7}$$

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\gamma,y)Z(\gamma,y;\tau,\xi)dy, \tag{1.8}$$

$$0<\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$$

де штрих означає транспонування, а риска – комплексне спряження.

Коли при $t=0$ *система (1.1) не має виродження або має слабке виродження, тобто* $A(T,0)<\infty$*, то в оцінках (1.3)–(1.6) та рівностях (1.7) і (1.8) можна брати* $\tau=0$ *і* $d=0$.

1.1.2 Розв'язність Задачі Коші та задачі без початкових умов для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Властивості ФМРЗК дозволяють досліджувати для системи (1.1) розв'язність задачі Коші у випадку відсутності або слабкого виродження і задачі без початкових умов, коли виродження сильне, тобто $A(T, 0) = \infty$. Наведемо деякі результати такого дослідження.

Для формулювання основного результату означимо необхідні норми і простори. Нехай c_0, $\nu_1, ..., \nu_n$ – задані числа такі, що $0 < c_0 < c$, $0 \le \nu_j < c_0 T^{1-q_j}$, $j \in \{1, ..., n\}$, де c – стала з оцінок (1.3)–(1.6). Розглянемо функції

$$k_j(t) \equiv c_0 \nu_j (c_0^{2b_j - 1} - (T - B(T, t))\nu_j^{2b_j - 1})^{1 - q_j}, \ j \in \{1, ..., n\};$$

$$k(t) \equiv (k_1(t), ..., k_n(t));$$

$$\Phi_\chi(t, x) \equiv \exp\left\{-\chi \sum_{j=1}^{n} k_j(t)|x_j|^{q_j}\right\}; \quad \Psi_\chi(x) \equiv \exp\{-\chi g(x)\},$$

де $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\chi \in \{-1, 1\}$, g – функція з оцінок (1.5) і (1.6).

Для вимірної за x при кожному фіксованому $t \in [0, T]$ функції $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_N$ означимо норму

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{k(t), g(\cdot)} \equiv \|u(t, \cdot)\Phi_1(t, \cdot)\Psi_1(\cdot)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad t \in [0, T].$$

Позначимо через $L_p^{k(0), g(\cdot)}$ простір усіх вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{k(0), g(\cdot)}$, через $M^{k(0), g(\cdot)}$ – простір усіх $\mathbb{C}_N$-значних узагальнених борельових мір μ, для яких збігається інтеграл

$$\|\mu\|^{k(0), g(\cdot)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_1(0, x)\Psi_1(x) d|\mu|(x),$$

через $L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма

$$\|\Phi_{-1}(T,\cdot)\Psi_{-1}(\cdot)\psi(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

а через $C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$ – простір таких неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, що

$$\Phi_{-1}(T,x)\Psi_{-1}(x)|\psi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуються такі умови.

($\mathbf{\Gamma}_1$). Функція f неперервна і задовольняє локальну умову Гельдера за x.

($\mathbf{\Gamma}_{2p}$). Для довільного $t \in (0,T]$ скінченні величини $||f(t,\cdot)||_p^{k(t),g(\cdot)}$ і $F_p(t) \equiv \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau),g(\cdot)} \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad 1 \le p \le \infty.$

($\mathbf{\Gamma}_3$). Функція f неперервна і задовольняє таку умову Гельдера:

$$\forall\, R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists\, \lambda \in (0,1] \quad \forall\, t \in (0,T] \quad \forall \{x,\xi\} \subset Q_R :$$

$$|f(t,x) - f(t,\xi)| \le C\delta(t) \exp\{-dA(T,t)\}(p(x,\xi))^\lambda,$$

де $Q_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | q(x,0) \le R\}$, $\delta : (0,T] \to [0,\infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int\limits_0^T (\delta(t)/\alpha(t))dt < \infty$, а d – стала з оцінок (1.3)–(1.6).

($\mathbf{\Gamma}_4$). Для довільного $t \in (0,T]$ скінченні величини $||f(t,\cdot)||_\infty^{k(t),g(\cdot)}$ і $F(t) \equiv \int\limits_0^t \exp\{dA(T,\tau)\}\|f(\tau,\cdot)\|_\infty^{k(\tau),g(\cdot)} \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)}$, де стала d така ж, як в умові $\mathbf{\Gamma}_3$.

Теорема 1.2. *Нехай система (1.1) не має виродження або має слабке виродження і виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$ – $\mathbf{Б}_4$. *Тоді правильні такі твердження:*

1) якщо $\varphi \in L_p^{k(0),g(\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* $\mathbf{\Gamma}_1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_{2p}$, $1 \le p \le \infty$, *то функція*

$$u(t,x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.9}$$

є розв'язком системи (1.1) таким, що

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)} \leq C\left(\|\varphi\|_p^{k(0),g(\cdot)} + F_p(t)\right),$$

при $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t),g(\cdot)} = 0$$

і при $p = \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi'(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi'(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\Psi \in L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$;

2) якщо $\mu \in M^{k(0),g(\cdot)}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{\Gamma}_1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_{21}$, *то функція*

$$u(t,x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi) + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.10}$$

є розв'язком системи (1.1), який задовольняє такі умови:

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t),g(\cdot)} \leq C\left(\|\mu\|^{k(0),g(\cdot)} + F_1(t)\right)$$

і

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi'(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi'(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\Psi \in C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$.

Якщо ж додатково припускати виконання умови $\mathbf{Б}_6$*, то розв'язки, що визначаються формулами (1.9) і (1.10), є єдиними в класі функцій, які задовольняють умову*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0, T]:$$

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t),D(\cdot),g(\cdot)} \equiv ||\Phi_1(t,\cdot)(D(\cdot))^{2b}\Psi_1(\cdot)u(t,\cdot)||_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leq C,$$

де g*–функція з оцінок (1.5) і (1.6), а* D *— характеристика дисипації системи.*

Наведемо умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (1.1) без початкових умов.

Теорема 1.3. *Нехай для системи (1.1) виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$*–*$\mathbf{Б}_4$ *і* $A(T,0) = \infty$*. Якщо* f *задовольняє умови* $\mathbf{\Gamma}_3$ *і* $\mathbf{\Gamma}_4$*, то функція*

$$u(t,x) \equiv \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

є розв'язком системи (1.1), для якого справджується оцінка

$$||u(t,\cdot)||_\infty^{k(t),g(\cdot)} \leq C \exp\{-dA(T,t)\}F(t), \quad t \in (0,T].$$

Цей розв'язок єдиний, якщо єдиним є відповідний розв'язок задачі Коші для системи (1.1) в $\Pi_{[t_0,T]}$ *при довільному* $t_0 \in (0,T)$*.*

1.1.3 Задача Коші та крайові задачі для деяких параболічних рівнянь другого порядку. Часто при моделюванні реальних фізичних процесів виникають рівняння, коефіцієнти яких зростають при зростанні просторової змінної x. Простим, але цікавим, прикладом таких рівнянь є рівняння з теорії сигналів вигляду

$$\partial_t u(t,x) = a\partial_x^2 u(t,x) + b\partial_x(xu(t,x)), \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}. \tag{1.11}$$

Таке рівняння виникає і в теорії випадкових процесів при дослідженні швидкості вільної частинки в броунівському русі. У праці Г.Уленбека та Л.Орнштейна встановлено, що ймовірність u швидкості переходу частинки з одного стану в інший описується рівнянням (1.11), в якому $a = bk\tilde{T}\tilde{m}^{-1}$ і $b = \alpha\tilde{m}^{-1}$, де $\tilde{m}$ – маса частинки, α – коефіцієнт тертя, k – коефіцієнт в'язкості і $\tilde{T}$ – абсолютна температура. Рівняння (1.11) називається прямим рівнянням Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна. Це рівняння цікаве ще й тому, що для нього явно виписується фундаментальний розв'язок задачі Коші та знаходяться явні вирази для елементів вектор-функції Гріна основних крайових задач зі звичайною початковою умовою і крайовими умовами при $x = 0$.

Розглянемо загальніше, ніж (1.11), рівняння, яке ще містить виродження при $t = 0$,

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\Big(\partial_x^2 + 2b(x)\partial_x + b'(x) + b^2(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\Big) - a\exp\{P(x) - \frac{x^2}{4}\}\Big)v(t,x) =$$
$$= f(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

де b – неперервно диференційовна на $[0,\infty)$ функція така, що $b(0) = 0$; b' і P – відповідно похідна і первісна функції b; $a \in \mathbb{R}$, функції α і β такі сталі, як у п.1.1.1.

За допомогою заміни

$$v(t,x) = \exp\{-P(x) + \frac{x^2}{4}\}u(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

рівняння (1.12) зводиться до рівняння

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\big(\partial_x^2 + x\partial_x + 1\big) - a\Big)u(t,x) = \exp\{P(x) - \frac{x^2}{4}\}f(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Використавши метод перетворення Фур'є і метод характеристик розв'язування задачі Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку, знайдені явні формули для ФРЗК для рівнянь (1.13) і (1.12). Ці формули мають відповідно вигляд

$$Z_0(t,x;\tau,\xi)=\frac{e^{aA(t,\tau)}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2B(t,\tau)})}}\exp\Big\{-\frac{(x-e^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\Big\} \tag{1.14}$$

і

$$Z(t,z;\tau,\xi)=\exp\Big\{-P(x)+P(\xi)+\frac{x^2-\xi^2}{4}\Big\}Z_0(t,x;\tau,\xi), \tag{1.15}$$

$$t>\tau\geq 0, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R},$$

де функції A і B такі самі, як у п.1.1.1.

За допомогою формул (1.14), (1.15) і властивостей відповідних потенціалів подвійного і простого шарів знайдені явні вирази для елементів вектор-функцій Гріна $\overrightarrow{G}_1^0\equiv(G_{01}^0,G_{11}^0,G_{21}^0)$ і $\overrightarrow{G}_1\equiv(G_{01},G_{11},G_{21})$ задачі Діріхле та вектор-функцій Гріна $\overrightarrow{G}_2^0\equiv(G_{02}^0,G_{12}^0,G_{22}^0)$ і $\overrightarrow{G}_2\equiv(G_{02},G_{12},G_{22})$ задачі Неймана в області $\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, t>0,x>0\}$ відповідно для рівнянь (1.13) і (1.12) з $a=0$. Ці вирази виглядають так:

$$G_{01}^0(t,x;\tau,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2B(t,\tau)})}}\Big[\exp\{-\frac{(x-e^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\}-$$

$$-\exp\{-\frac{(x^2+e^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\}\Big],\quad t>\tau\geq 0, x>0,\xi>0;$$

$$G_{11}^0(t,x;\tau)=\frac{\sqrt{2}xe^{-B(t,\tau)}}{\sqrt{\pi}(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\Big\},\quad t>\tau\geq 0, x>0;$$

$$G_{21}^0(t,x;\xi)=G_{01}^0(t,x;0,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2B(t,0)})}}\Big[\exp\{-\frac{(x-e^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,0)})}\}-$$

$$-\exp\{-\frac{(x^2+e^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,0)})}\}\Big],\quad t>0, x>0,\xi>0;$$

$$G_{02}^0(t,x;\tau,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2B(t,\tau)})}}\Big[\exp\{-\frac{(x-e^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\}+$$

$$+\exp\Big\{-\frac{(x+e^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\Big\}\Big],\quad t>\tau\geq 0, x>0, \xi>0;$$

$$G_{12}^0(t,x;\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(1-e^{-2B(t,\tau)})}}\exp\Big\{-\frac{(x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\Big\},\quad t>\tau\geq 0, x>0;$$

$$G_{22}^0(t,x;\xi) = G_{02}^0(t,x;0,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2B(t,0)})}}\Big[\exp\Big\{-\frac{(x-e^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,0)})}\Big\}+$$

$$+\exp\Big\{-\frac{(x+e^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,0)})}\Big\}\Big],\quad t>0, x>0, \xi>0;$$

$$G_{0j}(t,x;\tau,\xi) = \exp\{-P(x)+P(\xi)+\frac{x^2-\xi^2}{4}\}G_{0j}^0(t,x;\tau,\xi),$$

$$t>\tau\geq 0, x>0, \xi>0,$$

$$G_{1j}(t,x;\tau) = \exp\{-P(x)+\frac{x^2}{4}\}G_{1j}^0(t,x;\tau),\quad t>\tau\geq 0, x>0,$$

$$G_{2j}(t,x;\xi) = \exp\{-P(x)+P(\xi)+\frac{x^2-\xi^2}{4}\}G_{2j}^0(t,x;\xi),$$

$$t>0, x>0, \xi>0, j\in\{1,2\}.$$

У працях [11, 12] знайдені також явні формули для елементів вектор-функцій Гріна задач Фур'є в області $\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \,|\, t\geq T, x>0\}$ з крайовими умовами Діріхле і Неймана для рівнянь (1.12) і (1.13) з $a=0$, $\beta=1$ і неперервною функцією α: $(-\infty,T]\to(0,\infty)$ такою, що $\alpha(t)\to 0$ при $t\to-\infty$.

Знайдені вирази для ФРЗК і елементів вектор-функцій Гріна крайових задач застосовані до одержання інтегрального зображення розв'язків і встановлення коректної розв'язності відповідних задач (див. [8 – 12]).

1.1.4 Деякі задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами. Наведемо результати про однозначну розв'язність однієї оберненої задачі та задачі Коші для нелінійних параболічних рівнянь другого порядку.

В області $\Pi_T^+ = \{(x,t)\,\big|x \in (0,\infty), t \in (0,T]\}$ розглянемо задачу про визначення пари (u,f) гладких функцій з рівностей

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - xu_x(x,t) - u(t,x) = f(u(x,t)) + \gamma(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_T^+, \tag{1.16}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.17}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{1.18}$$

і умови перевизначення

$$u(0,t) = h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.19}$$

Теорема 1.4. *Якщо виконуються умови*

β_1*)* $u_0 \in H^{2+\alpha}([0,\infty))$, $\gamma \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi}_T)$*;*

β_2*)* h *монотонна,* $h' \in H^{\alpha}([0,\infty))$ *і* $\inf\limits_{t\in[0,T]} |h'(t)| \geq \delta > 0$*;*

β_3*)* f *задовольняє умову Ліпшиця і, крім того,* $f \in B \equiv \{\|f\|_\alpha \leq M\}$ *для деякої сталої* M*; для довільних* $\{u,v\} \subset H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi}_T)$ *і відображення* $u \to f(u)$ *в* $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi}_T)$ *існує стала* C_0 *така, що* $\|f(u)-f(v)\|_\alpha \leq C_0\|u-v\|_\alpha$*,*

то існує єдиний гладкий розв'язок (u,f) *задачі (1.16) – (1.19).*

Друга задача має такий вигляд:

$$\partial_t u(x,t) - \sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_k}(a_{jk}(x,t)\partial_{x_j}u(x,t) + a_k(x,t)u(x,t)) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\partial_{x_j}u(x,t) +$$

$$+c(x,t)u(x,t) + u(x,t)Ku(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.20}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.21}$$

де K: $C(\Pi_{(0,T]}) \to C(\Pi_{(0,T]})$ – заданий оператор, який задовольняє умови, аналогічні описаним у [16].

Вважаємо, що коефіцієнти рівняння мають відповідну гладкість, а також існують сталі μ, C_1, C_2, C_3 і $\lambda \in [0,2]$ такі, що

$$\mu|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \leq C_1(|x|^2+1)^{\frac{2-\lambda}{2}}|\xi|^2,$$

$$|(a_k(x,t))_{x_k}| \leq C_2(|x|^2+1)^{1/2}, \quad |a_k(x,t)| \leq C_2(|x|^2+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$|b_j(x,t)| \leq C_2(|x|^2+1)^{1/2}, \quad c(x,t)+(a_k(x,t))_{x_k} \leq C_2(|x|^2+1)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$c(x,t)-(b_j(x,t))x_j \leq C_3(|x|^2+1)^{\frac{\lambda}{2}}$$

для всіх $(x,t) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Через $H^{l,l/2}(\Pi_{(0,T]})$ і $H^l(\mathbb{R}^n)$, де l – неціле додатне число, позначимо простори гельдерових функцій, а через E_α^λ, $\alpha > 0$, $\lambda \in [0,2]$, – простір зростаючих функцій, означений в [17].

Теорема 1.5. *Нехай коефіцієнти рівняння і оператор K задовольняють вищезазначені умови, $f \in H^{l,l/2}(\Pi_{(0,T]} \bigcap E_\alpha^\lambda(T)$, $\varphi \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n) \bigcap E_\alpha^\lambda(T)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (1.20), (1.21) з простору $H^{l+2,(l+2)/2}(\Pi_{(0,T_0]}) \bigcap E_{\alpha_1}^\lambda(T_0)$, де T_0 – досить мале число, а $\alpha_1 > \alpha$.*

1.2 $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи в необмежених за часовою змінною областях

Цей підрозділ містить результати дослідження властивостей в необмежених за часовою змінною областях розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Введені $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови, які виділяють спеціальні класи $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільних порядків. Для систем із цих класів доведені теореми про стійкість розв'язків задачі Коші і коректну розв'язність задачі без початкових умов, теореми типу Ліувілля, теореми про побудову та оцінки ФМР $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічними. Ці результати належать кандидату фізико-математичних наук Т.М.Балабушенко та частково її науковому керівнику С.Д.Івасишену [18 – 30]. Результати пункту 1.2.8 належать також Т.М.Балабушенко [31, 32], а останнього пункту 1.2.9 – Г.П.Івасюк [33, 34].

1.2.1 Основні позначення та означення. Крім позначень із пункту 1.1.1, використовуватимемо ще такі позначення: $n_1, \ldots, n_N$ – задані натуральні числа; $a_{k_0k}(t,x) = \left(a^{lj}_{k_0k}(t,x)\right)^N_{l,j=1}$ – матриці порядку N, елементами яких є комплекснозначні функції, залежні від часової та просторової змінних $t \in \mathbf{R}$ і $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ відповідно; $u(t,x) = \mathrm{col}\,(u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$ – невідомий, а $f(t,x) = \mathrm{col}\,(f_1(t,x), \ldots, f_N(t,x))$ – заданий стовпці; H - деякий півінтервал вигляду $(t_0, T]$, $t_0 < T$, $\overline{H}$ – замикання H; $\Pi_H \equiv H \times \mathbb{R}^n$ і $\Pi_{\overline{H}} \equiv \overline{H} \times \mathbb{R}^n$; $\mathbb{N}_s$ – сукупність послідовних натуральних чисел від 1 до s.

У шарі Π_H розглянемо записану в матричному вигляді систему

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \tag{1.22}$$

де $A(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv (A_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x))^N_{l,j=1}$ і

$$A_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv \delta_{lj}\partial_t^{n_l} - \sum_{\substack{2bk_0+\|k\|\le 2bn_j \\ (k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0k}(t,x)\partial_t^{k_0}\partial_x^k.$$

У випадку, коли $n_1 = \cdots = n_N = 1$, система (1.22) є системою рівнянь першого порядку за змінною t:

$$\widehat{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) \equiv \left(I\partial_t - \sum_{\|k\|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k\right)u(t,x) = f(t,x). \tag{1.23}$$

Через A^0 і $\widehat{A}^0$ позначимо групу старших членів виразів A і $\widehat{A}$, тобто

$$A^0(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv (A^0_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x))^N_{l,j=1},$$

$$A^0_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv \delta_{lj}\partial_t^{n_j} - \sum_{\substack{2bk_0+\|k\|= 2bn_j \\ (k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0k}(t,x)\partial_t^{k_0}\partial_x^k, \quad \{l,j\} \subset \mathbf{N}_N$$

і

$$\widehat{A}^0(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv \partial_t - \sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k.$$

Наведемо ряд необхідних означень із [35, 36].

Означення 1.1. *1) Система (1.22) чи (1.23) називається $\overrightarrow{2b}$-параболічною в точці $(t,x) \in \Pi_{\overline{H}}$, якщо p-корені рівняння* $\det A^0(t,x,p,i\sigma) = 0$ *чи* $\widehat{A}^0(t,x,p,i\sigma) = 0$ *задовольняють нерівність*

$$\operatorname{Re} p(t,x,\sigma) \le -\delta_{\overline{H}}|\sigma|_b, \tag{1.24}$$

де $|\sigma|_b \equiv \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}$, *для довільного* $\sigma \in \mathbf{R}^n$ *з деякою сталою* $\delta_{\overline{H}} > 0$, *взагалі кажучи, залежною від точки* (t,x).

2) Система (1.22) чи (1.23) називається рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічною в області $\Pi_{\overline{H}}$, якщо вона $\overrightarrow{2b}$-параболічна в кожній точці $(t,x) \in \Pi_{\overline{H}}$ і нерівність (1.24) виконується з однаковою для всіх (t,x) сталою $\delta_{\overline{H}}$.

Означення 1.2. *ФМРЗК для системи (1.22) називається матриця* $Z(t,x;\tau,\xi) \equiv (Z_{lj}(t,x;\tau,\xi))_{l,j=1}^N$, $\tau < t$, $\{\tau,t\} \subset \overline{H}$, $\{x,\xi\} \subset \mathbf{R}^n$, *така, що функції*

$$u_l(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbf{R}^n} Z_{lj}(t,x;\tau,\xi)\varphi_j(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_H, l \in \mathbf{N}_N,$$

є компонентами розв'язку однорідної системи (1.22), який задовольняє умови

$$\partial_t^{\mu-1} u_l(t,x)\Big|_{t=\tau} = \delta_{\mu n_l}\varphi_l(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \mu \in \mathbf{N}_{n_l}, l \in \mathbf{N}_N,$$

для будь-якого $\tau \in \overline{H}$ *та довільних досить гладких і фінітних функцій* φ_l, $l \in \mathbf{N}_N$.

Означення 1.3. *ФМРЗК для системи (1.23) називається матриця*

$Z(t,x;\tau,\xi)$, $\tau<t$, $\{\tau,t\}\subset\overline{H}$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, така, що функція

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_H,$$

є розв'язком однорідної системи (1.23), який задовольняє умову

$$u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,$$

для будь-якого $\tau\in\overline{H}$ та довільної гладкої і фінітної функції φ.

Розглянемо задачу Коші для системи (1.22) із загальними початковими умовами

$$\partial_t^{\mu-1}u_l(t,x)\Big|_{t=\tau}=\varphi_l^{\mu}(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,\mu\in\mathbf{N}_{n_l},l\in\mathbf{N}_N. \tag{1.25}$$

Як відомо [36], зображення розв'язків цієї задачі здійснюється за допомогою матриці Гріна задачі Коші (МГЗК).

Означення 1.4. *МГЗК для системи (1.22) називається матриця $G\equiv(G_0,G_1,\ldots,G_N)$, $G_0\equiv(G_0^{lj})_{l,j=1}^N$, $G_j\equiv(G_j^{l\mu})_{l=1,\mu=1}^{N,n_j}$, $j\in\mathbf{N}_N$, така, що компоненти розв'язку $u=\operatorname{col}(u_1,\ldots,u_N)$ задачі (1.22), (1.25) в області $\Pi_{(\tau,T]}$ зображуються у вигляді*

$$u_l(t,x)=\sum_{j=1}^N\left(\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{\mathbf{R}^n}G_0^{lj}(t,x;\beta,\xi)f_j(\beta,\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{n_j}\int\limits_{\mathbf{R}^n}G_j^{l\mu}(t,x;\tau,\xi)\varphi_j^{\mu}(\xi)d\xi\right),\quad l\in\mathbf{N}_N,\quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]},$$

для будь-якого $\tau\in[t_0,T)$ та довільних гладких і фінітних функцій f_j, φ_j^{μ}.

Як випливає з означення 1.4, МГЗК для системи першого порядку за змінною t має вигляд $G=(G_0,G_1)$.

1.2.2 $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем першого порядку за часовою змінною. Сформулюємо $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови для систем першого порядку за змінною t і наведемо приклади класів систем, які задовольняють ці умови.

Нехай $\Pi_m \equiv \{(t,x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t \in H_m, x \in \mathbf{R}^n\}$, $m \in \mathbf{N}_2$, де $H_1 \equiv (0,\infty)$, $H_2 \equiv (-\infty, T]$. Розглянемо в Π_m, $m \in \mathbf{N}_2$, $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему першого порядку за змінною t вигляду (1.23).

Означення 1.5. *Система (1.23) задовольняє $\Lambda_\delta^{m,r}$-умову, $\delta \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}_2$, $r \in \mathbf{Z}_+^1 \cup \{\infty\}$, якщо існує ФМРЗК $Z(t,x;\tau,\xi)$, $\{t,\tau\} \subset \overline{H}_m$, $\tau < t$, $\{x,\xi\} \subset \mathbf{R}^n$,* для системи (1.23), яка має похідні $\partial_x^k Z$, $\|k\| \le 2b + r$, і справджуються оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_k \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t-\tau))^{-1-k_j} e^{\delta(t-\tau)} \widehat{E}_c(t-\tau, x-\xi),$$

$$\{t,\tau\} \subset \overline{H}_m, \tau < t, \{x,\xi\} \subset \mathbf{R}^n, \|k\| \le 2b + r,$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, α_j, $j \in \mathbf{N}_n$, – невід'ємні неспадні функції такі, що $\alpha_j(0) = 0$ і $\alpha_j(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, а $\widehat{E}_c(t,x) \equiv \exp\left\{-c\sum_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-q_j} |x_j|^{q_j}\right\}$.

Твердження 1.1 *Система (1.23), для коефіцієнтів якої виконуються умови*

$(\widehat{A}_1)$ система (1.23) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна в $\overline{\Pi}_m$;

$(\widehat{A}_2)$ коефіцієнти $a_k, ||k|| \le 2b$, обмежені, неперервні за t (неперервність за t a_k з $||k|| = 2b$ рівномірна щодо $x \in \mathbf{R}^n$), задовольняють рівномірну щодо t умову Гельдера за x відносно $\overrightarrow{2b}$-параболічної відстані $p(\cdot,\cdot)$ в $\overline{\Pi}_m$;

$(\widehat{A}_3)$ існують похідні $\partial_x^m a_k$, $||k|| \le 2b$, $||m|| \le r$, які в $\overline{\Pi}_m$ обмежені, неперервні за t і задовольняють умову Гельдера за x,

задовольняє $\Lambda_\delta^{m,r}$-умову з $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $j \in \mathbf{N}_n$, і $\delta \in \mathbf{R}$.

Якщо система (1.23) задовольняє $\Lambda_{\delta_0}^{m,r}$-умову з $\delta_0 > 0$, то система з параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\widehat{A}(t,x,\partial_t + \lambda, \partial_x) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m,$$

задовольняє $\Lambda_{\delta_0}^{m,r}$-умову з $\delta = \delta_0 - Re\lambda$. Очевидно, що тут значення може бути додатним, від'ємним чи рівним нулеві в залежності від величини $Re\lambda$.

Наведемо приклади класів систем, які задовольняють $\Lambda_{\delta}^{m,r}$-умови з $\delta \leq 0$.

Твердження 1.2 *Нехай коефіцієнти системи*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\|=2b} a_k(t)\partial_x^k u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \tag{1.26}$$

є неперервними і обмеженими функціями в $\overline{H}_m$ *та існує стала* $\mu > 0$ *така, що для довільних* $t \in \overline{H}_m$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$ *і* $\eta \in \mathbb{C}^N$ *справджується оцінка*

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\|k\|=2b} a_k(t)(i\sigma)^k\eta, \eta\right) \leq -\mu|\sigma|_b|\eta|^2,$$

де $(\cdot,\cdot)$ *– скалярний добуток у просторі* $\mathbb{C}^N$. *Тоді система (1.26) задовольняє* $\Lambda_0^{m,\infty}$*-умову з* $m \in \mathbf{N}_2$, $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $j \in \mathbf{N}_n$.

Твердження 1.3. *Нехай для* $\overrightarrow{2b}$*-параболічної системи зі сталими коефіцієнтами вигляду*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{2b_0 \leq \|k\| \leq 2b} a_k \partial_x^k u(t,x) \equiv \sum_{j=2b_0}^{2b} P_j(\partial_x)u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \tag{1.27}$$

де $1 \leq b_0 \leq b$, *виконуються такі припущення:*

а) дійсні частини λ*-коренів рівняння* $\det\left(\sum_{j=2b_0}^{2b} Pj(i\sigma) - \lambda I\right) = 0$ *дорівнюють нулеві тільки при* $\sigma = 0$;

б) дійсні частини власних чисел матриці $P_{2b_0}(i\sigma)$ *не дорівнюють нулеві при* $|\sigma|_b = 1$.

Тоді система (1.27) задовольняє $\Lambda_0^{m,\infty}$*-умову з* $m \in \{1,2\}$, $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $t \leq 1$, $\alpha_j(t) = t^{m_j/(2b_0)}$, $t > 1$, $j \in \mathbf{N}_n$.

Твердження 1.4. *Нехай коефіцієнти* $\overrightarrow{2b}$*-параболічної системи*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\| \leq 2b} a_k \partial_x^k u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \tag{1.28}$$

сталі і дійсні частини λ-коренів рівняння $\det\left(\sum_{\|k\|\le 2b} a_k(i\sigma)^k - \lambda I\right) = 0$ *не дорівнюють нулеві ні при яких* $\sigma \in \mathbf{R}^n$. *Тоді система (1.28) задовольняє* $\Lambda_\delta^{m,\infty}$*-умову з* $\delta < 0$, $m \in \mathbf{N}_2$ *і* $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $j \in \mathbf{N}_n$.

Твердження 1.5. *Якщо коефіцієнти системи*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\|\le 2b} a_k(t)\partial_x^k u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \tag{1.29}$$

є неперервними і обмеженими функціями в $\overline{H}_m$ *та існує стала* $\mu_0 > 0$ *така, що для довільних* $t \in \overline{H}_m$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$, $\beta \in \mathbf{R}$ *і* $\eta \in \mathbb{C}^N$ *справджується нерівність*

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{\|k\|+k_{n+1}=2b} a_k(t)(i\sigma)^k(i\beta)^{k_{n+1}}\eta, \eta\right) \le -\mu\left(|\sigma|_b + \beta^{2b}\right)|\eta|^2,$$

то ця система задовольняє $\Lambda_\delta^{m,\infty}$*-умову з* $\delta < 0$, $m \in \mathbf{N}_2$, $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $j \in \mathbf{N}_n$.

Твердження 1.6. *Нехай для системи (1.29) виконуються такі умови:*

а) коефіцієнти a_k, $\|k\| \le 2b$, *є неперервними і обмеженими в* $\overline{H}_m$;

б) існують числа $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$ *і* $R > 0$ *такі, що для будь-яких* $k \in \mathbf{Z}_+^n$, $\|k\| \le 2b$, $\{t', t''\} \subset \overline{H}_m$, $|t'| \ge R$ *і* $|t''| \ge R$, $|t' - t''| < \Delta$, *справджуються нерівності* $|a_k(t') - a_k(t'')| < \varepsilon$;

в) λ*-корені рівняння* $\det\left(\sum_{\|k\|+k_{n+1}=2b} a_k(t)(i\sigma)^k(i\beta)^{k_{n+1}} - \lambda I\right) = 0$ *задовольняють умову*

$$\operatorname{Re}\lambda(t,\sigma,\beta) < -\mu_0, \quad \mu_0 > 0,$$

для довільних $t \in \overline{H}_m$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$ *і* $\beta \in \mathbf{R}$ *таких, що* $|\sigma|_b + \beta^{2b} = 1$.

Тоді система (1.29) задовольняє $\Lambda_\delta^{m,\infty}$*-умову з* $\delta < 0$, $m \in \mathbf{N}_2$ *і* $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $j \in \mathbf{N}_n$.

1.2.3 $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови для загальних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Наведемо $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови для систем рівнянь довільного порядку і приклади класів систем, які задовольняють такі умови.

Означення 1.6. *Система (1.22) задовольняє $\Lambda_\delta^{m,r}$-умову, $\delta \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}_2$, $r \in \mathbf{Z}_+^1 \cup \{\infty\}$, якщо для неї існує в Π_m МГЗК $G = (G_0, G_1, \ldots, G_N)$, елементи якої мають похідні $\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_0^{lj}$, $\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_j^{l\mu}$, $2bk_0 + \|k\| \leq 2bn_l + r$, $k_0 \leq n_l$, $\mu \in \mathbf{N}_{n_j}$, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, і справджуються оцінки*

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_0^{lj}(t, x; \tau, \xi)| \leq C_{k_0k} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu - 2bp_{0k_0}^{lj}(t-\tau))/M} e^{\delta(t-\tau)} \widehat{E}_c(t-\tau, x-\xi),$$

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_j^{l\mu}(t, x; \tau, \xi)| \leq C_{k_0k} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu + 2bp_{jk_0}^{l\mu}(t-\tau))/M} e^{\delta(t-\tau)} \widehat{E}_c(t-\tau, x-\xi),$$

$$\{t, \tau\} \subset \overline{H}_m, \quad \tau < t, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 2bk_0 + \|k\| \leq 2bn_l + r, \quad k_0 \leq n_l - 1,$$

$$\mu \in \mathbb{N}_{n_j}, \quad \{l, j\} \subset \mathbb{N}_N,$$

де $C_{k_0k} > 0$, $c > 0$, α_ν, $\nu \in \mathbf{N}_n$ – невід'ємні неспадні функції такі, що $\alpha_\nu(0) = 0$ і $\alpha_\nu(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, а $p_{0k_0}^{lj}$ і $p_{jk_0}^{l\mu}$ – деякі кусково-сталі функції.

Твердження 1.7. *Система (1.22), для коефіцієнтів якої виконуються умови*

($\widehat{A}_1$) система (1.22) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна в $\overline{\Pi}_m$;

($\widehat{A}_2$) коефіцієнти $a_{k_0k}^{lj}$, $2bk_0 + \|k\| \leq 2bn_j$, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, обмежені, неперервні за t (неперервність за t коефіцієнтів $a_{k_0k}^{lj}$ з $2bk_0 + \|k\| = 2bn_j$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$), задовольняють умову Гельдера за x в $\overline{\Pi}_m$;

($\widehat{A}_3$) існують похідні $\partial_x^m a_{k_0k}^{lj}$, $2bk_0 + \|k\| \leq 2bn_j$, $\|m\| \leq r$, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, які в $\overline{\Pi}_m$ обмежені, неперервні за t і задовольняють умову Гельдера за x;

($\widehat{A}_1$) коефіцієнти системи (1.22) мають в $\overline{\Pi}_m$ неперервні та обмежені похідні $\partial_t^{k_0}\partial_x^k a_{k_0k}^{lj}$, $2bk_0 + \|k\| \leq 2bn_j$, $\{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$, які задовольняють умову Гельдера за x,

задовольняє $\Lambda^{m,r}_{\delta}$*-умову з* $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $p^{lj}_{0k_0}(t) = n_l - k_0 - 1$, $p^{l\mu}_{jk_0}(t) = n_l - n_j + \mu - k_0 - 1$, $t > 0$, $\nu \in \mathbb{N}_n$, $\mu \in \mathbb{N}_{n_j}$, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, *і* $\delta \in \mathbb{R}$.

Твердження 1.8. $\overrightarrow{2b}$*-параболічна система зі сталими коефіцієнтами*

$$A^0(\partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_m,$$

де $A^0(\partial_t, \partial_x) \equiv (A^0_{lj}(\partial_t, \partial_x))^N_{l,j=1}$, $A^0_{lj}(\partial_t, \partial_x) \equiv \delta_{lj}\partial_t^{n_j} - \sum\limits_{\substack{2bk_0+\|k\|=2bn_j \\ (k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0k}\partial_t^{k_0}\partial_x^k$, *задовольняє* $\Lambda^{m,\infty}_0$*-умову з* $m \in \mathbf{N}_2$, $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $t > 0$, $\nu \in \mathbf{N}_n$, $p^{lj}_{0k_0}(t) = n_l - k_0 - 1$, $p^{l\mu}_{jk_0}(t) = n_l - n_j + \mu - k_0 - 1$, $t > 0$, $\mu \in \mathbf{N}_{n_j}$, $\{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$.

Твердження 1.9. *Нехай* $\overrightarrow{2b}$*-параболічна система зі сталими коефіцієнтами*

$$A(\partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_m,$$

де

$$A(\partial_t, \partial_x) \equiv \Bigg(\delta_{lj}\partial_t^{n_j} - \sum_{\substack{2bk_0+\|k\|\le 2bn_j \\ (k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0k}\partial_t^{k_0}\partial_x^k\Bigg)^N_{l,j=1},$$

задовольняє таку умову: дійсні частини λ*-коренів рівняння* $\det\ A(\lambda, i\sigma) = 0$ *відмінні від нуля для всіх* $\sigma \in \mathbf{R}^n$. *Тоді ця система задовольняє* $\Lambda^{m,\infty}_{\delta}$*-умову з* $\delta < 0$, $m \in \mathbf{N}_2$, $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $t > 0$, $\nu \in \mathbf{N}_n$, $p^{lj}_{0k_0}(t) = n_l - k_0 - 1$, $t > 0$,

$$p^{l\mu}_{jk_0}(t) = \begin{cases} n_l - n_j + \mu - k_0 - 1, & t \le 1, \\ n_l - k_0 - 1, & t > 1, \end{cases} \qquad \mu \in \mathbf{N}_{n_j}, \{l, j\} \subset \mathbf{N}_N.$$

Твердження 1.10. *Розглянемо* $\overrightarrow{2b}$*-параболічну систему полікалоричного типу*

$$\Bigg(I\partial_t - \sum_{2b_0\le\|k\|\le 2b} a_k\partial_x^k\Bigg)^h u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_m, m \in \mathbf{N}_2, \qquad (1.30)$$

де b_0 *і* h *– цілі числа такі, що* $1 \le b_0 \le b$, $h \ge 2$. *Нехай система*

$$\Bigg(I\partial_t - \sum_{2b_0 \le \|k\| \le 2b} a_k \partial_x^k\Bigg) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, m \in \mathbf{N}_2,$$

задовольняє умови твердження 1.3. Тоді система (1.30) задовольняє $\Lambda_0^{m,\infty}$*-умову з* $m \in \mathbf{N}_2$, $\alpha_\nu(t) = \begin{cases} t^{1/(2b_\nu)}, & t \le 1, \\ t^{m_\nu/(2b_0)}, & t > 1, \end{cases}$ $\nu \in \mathbf{N}_n$, $p_{0k_0}^{lj}(t) = \begin{cases} h - k_0 - 1, & t \le 1, \\ b_0(h-k_0-1)/b, & t > 1, \end{cases}$ $p_{jk_0}^{l\mu}(t) = \begin{cases} \mu - k_0 - 1, & t \le 1, \\ b_0(\mu - k_0 - 1)/b, & t > 1, \end{cases}$ $\mu \in \mathbf{N}_h$, $\{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$.

Твердження 1.11. *Розглянемо* $\overrightarrow{2b}$*-параболічну систему вигляду*

$$\Bigg(I\partial_t - \sum_{\|k\| \le 2b} a_k \partial_x^k\Bigg)^h u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, m \in \mathbf{N}_2, \qquad (1.31)$$

де h *– ціле число, більше 1.*

Нехай система

$$\Bigg(I\partial_t - \sum_{\|k\| \le 2b} a_k \partial_x^k\Bigg) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, m \in \mathbf{N}_2,$$

задовольняє умови твердження 1.4. Тоді система (1.31) задовольняє $\Lambda_\delta^{m,\infty}$*-умову з* $\delta < 0$, $m \in \mathbf{N}_2$, $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $t > 0$, $\nu \in \mathbb{N}_n$, $p_{0k_0}^{lj}(t) = h - k_0 - 1$, $t > 0$, $p_{jk_0}^{l\mu}(t) = \begin{cases} \mu - k_0 - 1, & t \le 1, \\ h - k_0 - 1, & t > 1, \end{cases}$ $\mu \in \mathbf{N}_h$, $\{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$.

1.2.4 Інтегральні зображення та оцінки розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях.

Розглянемо $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему (1.22) в припущенні, що вона для будь-якого шару $\Pi_{[0,T_0]}$, $T_0 > 0$, задовольняє умови, які відрізняються від умов A_1, A_2 і A_4 з твердження 1.7 тим, що в них $\overline{\Pi}_m$ замінено на $\Pi_{[0,T_0]}$.

Для будь-яких $t \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ і $\eta \equiv (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ з $\eta_\nu \geq 0$, $\nu \in \mathbf{N}_n$, означимо норми

$$\|u(t, \cdot)\|_{p,\eta} \equiv \|u(t, \cdot)\Phi_\eta(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де

$$\Phi_\eta(x) \equiv \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{n} \eta_{nu}|x_\nu|\right\},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 1.6. *Нехай система (1.22) задовольняє $\Lambda_\delta^{1,0}$-умову зі сталими $c > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, функціями α_ν, $\nu \in \mathbf{N}_n$, $p_{0k_0}^{lj}$ і $p_{jk_0}^{l\mu}$, $k_0 \in \mathbf{N}_{n_l-1}$, $\mu \in \mathbf{N}_{n_j}$, $\{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$, і нехай $u = \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_N)$ – такий регулярний розв'язок цієї системи, що для фіксованих p і η виконуються умови:*

1) $\forall T_0 > 0\ \exists C > 0\ \forall t \in [0, T_0]\ \forall j \in \mathbf{N}_N\ \forall \mu \in \mathbf{N}_{n_j} : \|\partial_t^{\mu-1} u_j(0, \cdot)\|_{p,\eta} \leq C,$

2) $\forall \{l, j\} \subset \mathbf{N}_N\ \forall t \in H_1$*:*

$$\|f_j(t, \cdot)\|_{p,\eta} < \infty, \quad \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M} p_{00}^{lj}(t-\tau)} \|f_j(\tau, \cdot)\|_{p,\eta} e^{-\delta\tau} d\tau < \infty.$$

Тоді для компонент розв'язку u в Π_1 правильні зображення

$$u_l(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n} G_0^{lj}(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{n_j} \int_{\mathbf{R}^n} G_j^{l\mu}(t, x; 0; \xi) \varphi_j^\mu(\xi) d\xi \right), \quad l \in \mathbf{N}_N, \tag{1.32}$$

де $\varphi_j^\mu(x) \equiv \partial_t^{\mu-1} u_j(0, x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, та оцінки

$$\|u_l(t, \cdot)\|_{p,\eta} \leq C \exp\left\{\delta t + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\eta_\nu \alpha_\nu(t))^{2b_\nu}}{2b_\nu (c_0 q_\nu)^{2b_\nu - 1}}\right\} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{N} \int_0^t \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M} p_{00}^{lj}(t-\tau)} \|f_j(\tau, \cdot)\|_{p,\eta} e^{-\delta\tau} d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n_j} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t))^{\frac{2b}{M} p_{j0}^{l\mu}(t)} \|\varphi_j^\mu(\cdot)\|_{p,\eta} \right). \tag{1.33}$$

де c_0 *– фіксована стала з проміжку* $(0, c)$.

Розглянемо набір функцій

$$\widehat{k}_\nu(t, a_\nu) \equiv \begin{cases} c_0 a_\nu (c_0^{2b_\nu - 1} - (\alpha_\nu(t))^{2b_\nu} a_\nu^{2b_\nu - 1})^{1-q_\nu}, & 0 \leq t \leq T, \\ c_0 a_\nu (c_0^{2b_\nu - 1} + (\alpha_\nu(|t|))^{2b_\nu} a_\nu^{2b_\nu - 1})^{1-q_\nu}, & t < 0, \end{cases} \qquad \nu \in \mathbb{N}_n,$$

де $c_0 \in (0, c)$, стала c і функції $\alpha_n u$, $\nu \in \mathbf{N}_n$, з $\Lambda_\delta^{2,0}$-умови, $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}_n$, – невід'ємні числа такі, що $\alpha_\nu(T) < \left(\frac{c_0}{a_\nu}\right)^{1/q_\nu}$.

Наведемо теорему про інтегральне зображення розв'язків системи (1.22) в Π_2, означивши для будь-яких $t \in H_2$, $p \in [1, \infty]$ норми

$$\|v(t, \cdot)\|_p^{\widehat{k}(t,a)} \equiv \|v(t, \cdot) \widehat{\Psi}_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)},$$

де $\widehat{k}(t, a) \equiv (\widehat{k}_1(t, a_1), \ldots, \widehat{k}_n(t, a_n))$, $\widehat{\Psi}_z(t, x) \equiv \exp\left\{ z \sum_{\nu=1}^n \widehat{k}_\nu(t, a_\nu) |x_\nu|^{q_\nu} \right\}$, $t \in H_2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbf{R}$.

Теорема 1.7. *Розглянемо систему (1.22), припускаючи, що для неї виконуються умови, які відрізняються від умов* A_1, A_2 *і* A_4 *з твердження 1.7 тим, що в них* $\overline{\Pi}_m$ *замінено на будь-який шар* $\Pi_{[t_0, T]}$, $t_0 < T$. *Нехай ця система задовольняє* $\Lambda_\delta^{2,0}$*-умову зі сталими* $c > 0$, $\delta \in \mathbf{R}$, *функціями* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}_n$, *такими, що для них виконуються нерівності*

$$(\alpha_\nu(t - \tau))^{2b_\nu} \leq \begin{cases} (\alpha_\nu(t))^{2b_\nu} - (\alpha_\nu(t))^{2b_\nu}, & 0 \leq \tau \leq t \leq T; \\ (\alpha_\nu(t))^{2b_\nu} + (\alpha_\nu(|t|))^{2b_\nu}, & \tau < 0 \leq t \leq T; \\ (\alpha_\nu(|t|))^{2b_\nu} - (\alpha_\nu(|t|))^{2b_\nu}, & \tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

та функціями $p_{0k_0}^{lj}$ *і* $p_{jk_0}^{l\mu}$. *Далі, нехай* $u \equiv \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_N)$ *– такий регулярний розв'язок системи (1.22), що для фіксованого* $p \in [1, \infty]$ *виконуються умови:*

1) $\exists C > 0$ $\forall \mu \in \mathbf{N}_{n_j}$ $\forall \{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$ $\forall \{t, t_0\} \subset H_2$, $t_0 < t$:

$$R_j^{l\mu}(t, t_0) \equiv \prod_{\nu=1}^n (\alpha_\nu(t - t_0))^{\frac{2b}{M} p_{j0}^{l\mu}(t - t_0)} e^{-\delta t_0} \|\partial_{t_0}^{\mu - 1} u_j(t_0, \cdot)\|_p^{\widehat{k}(t_0, a)} \leq C,$$

причому для $p=\infty$ $R_j^{l\mu}(t,t_0)\to 0$ *при* $t_0\to-\infty$;

2) функції $f_j \equiv \sum\limits_{l=1}^{N} A_{jl}(t,x;\partial_t,\partial_x)u_j$, $l\in\mathbf{N}_N$, *неперервні та задовольняють умови*

$$\forall\{l,j\}\subset\mathbf{N}_N\ \ \forall t\in H_2\ :\ \|f_j(t,\cdot)\|_p^{\widehat{k}(t,a)}<\infty,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}e^{-\delta\tau}\|f_j(\tau,\cdot)\|_p^{\widehat{k}(\tau,a)}d\tau<\infty.$$

Тоді для u_l, $l\in\mathbf{N}_N$, *правильні зображення*

$$u_l(t,x)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbf{R}^n}G_0^{lj}(t,x;\tau,\xi)f_j(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_2, \tag{1.35}$$

та оцінки

$$\|u_l(t,\cdot)\|_p^{\widehat{k}(t,a)}\le Ce^{\delta t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\delta\tau}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}\|f_j(\tau,\cdot)\|_p^{\widehat{k}(\tau,a)}d\tau, \tag{1.36}$$

$$t\in H_2.$$

1.2.5 Коректна розв'язність задачі Коші у півпросторі та задачі без початкових умов. У півпросторі Π_1 розглянемо задачу Коші для системи (1.22) з початковими умовами (1.25). Нехай $E_{p,\eta}$ – простір неперервних функцій ψ: $\mathbf{R}^n\to\mathbb{C}$ таких, що

$$\|\psi\|_{p,\eta}\equiv\|\psi(\cdot)\Phi_\eta(\cdot)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}<\infty.$$

Теорема 1.8. *Нехай система (1.22) задовольняє* $\Lambda_\delta^{1,0}$*-умову та умови, які відрізняються від умов* A_1, A_2 *і* A_4 *із твердження 1.7 тим, що в них* $\overline{\Pi}_m$ *замінено на будь-який шар* $\Pi_{[0,T_0]}$, $T_0>0$. *Якщо*

$$\forall j\in\mathbf{N}_N\ \ \forall\mu\in\mathbf{N}_{n_j}:\ \ \varphi_j^\mu\in E_{p,\eta},$$

а функції $f_j : \Pi_1 \to \mathbb{C}$, $j \in \mathbf{N}_N$, *неперервні, задовольняють локальну умову Гельдера за* x *та умову 2) теореми 1.6, то формулами (1.32) визначається єдиний розв'язок задачі Коші (1.22), (1.25), такий, що* $u_l(t, \cdot) \in E_{p,\eta}$, $t > 0$, *і справджуються оцінка (1.33).*

У півпросторі Π_2 розглянемо загальну $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему вигляду (1.22).

Теорема 1.9. *Нехай система (1.22) задовольняє* $\Lambda_\delta^{2,0}$*-умову (зі сталими* $c > 0$, $\delta \in \mathbf{R}$, *функціями* $p_{0k_0}^{lj}$, $p_{jk_0}^{l\mu}$, $\{l, j\} \subset \mathbf{N}_N$, $\mu \in \mathbf{N}_{n_j}$ *та* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}_n$, *такими, що для них правильні оцінки (1.34)) та умови, які відрізняються від умов* A_1, A_2 *і* A_4 *із твердження 1.7 тим, що в них* $\overline{\Pi}_m$ *замінено на будь-який шар* $\Pi_{[t_0,T]}$, $t_0 < T$. *Припустимо, що праві частини* $f_j : \Pi_2 \to \mathbb{C}$, $j \in \mathbf{N}_N$, *системи (1.22) неперервні, задовольняють локальну умову Гельдера за* x *та умову 2) теореми 1.7. Тоді формули (1.35) визначають в* Π_2 *єдиний розв'язок системи (1.22), для якого виконуються оцінки (1.36).*

1.2.6 Теореми про стійкість розв'язків задачі Коші та теореми типу Ліувілля. Розглянемо в Π_1 однорідну систему (1.22), тобто систему

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0, \tag{1.37}$$

припускаючи, що вона задовольняє умови, які відрізняються від умов A_1, A_2 і A_4 із твердження 1.7 тим, що в них $\overline{\Pi}_m$ замінено на будь-який шар $\Pi_{[0,T_0]}$, $T_0 > 0$.

Для неперервних функцій $v : \overline{\Pi}_1 \to \mathbb{C}$ означимо норми

$$\|v\|_{p,\eta}^{g(\cdot)} \equiv \sup_{t \geq 0} (g(t)\|v(t, \cdot)\|_{p,\eta}),$$

де $p \in [1, \infty]$, $\eta \equiv (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_\nu \geq 0$, $\nu \in \mathbf{N}_n$ і $g : \overline{H}_1 \to H_1$ – деяка неперервна функція.

Розглядаються розв'язки $u \equiv \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_N)$ системи (1.37) в Π_1, які задовольняють умову

$$\forall T_0 > 0 \ \exists C > 0 \ \forall t \in [0, T_0] :$$

$$|||u(t,\cdot)|||_{p,\eta} \equiv \max_{\mu \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_N} \|\partial_t^{\mu-1} u_j(t,\cdot)\|_{p,\eta} \le C. \tag{1.38}$$

Означення 1.7. *Нульовий розв'язок системи (1.37) називається* $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$*-стійким, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\Delta > 0$*, що для будь-якого розв'язку u цієї системи, який задовольняє умову (1.38) та умову* $\|u(0,\cdot)\|_{p,\eta} < \Delta$ *справджується нерівність* $\max_{l \in \mathbb{N}_N} \|u_l\|_{p,\eta}^{g(\cdot)} < \varepsilon$.

За допомогою теореми 1.6 отримується така теорема про стійкість.

Теорема 1.10. *Нехай система (1.37) задовольняє* $\Lambda_\delta^{1,0}$*-умову зі сталими* $c > 0$, $\delta \in \mathbf{R}$*, функціями* α_ν *і* $p_{jk_0}^{l\mu}$*. Тоді її нульовий розв'язок є* $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$*-стійким з довільним* $p \in [1, \infty]$ *і* $\eta_\nu \ge 0$, $\nu \in \mathbf{N}_n$*, та функцією*

$$g(t) \equiv \exp\left\{-\left(\delta t + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\eta_\nu \alpha_\nu(t))^{2b_\nu}}{2b_\nu (c_0 q_\nu)^{2b_\nu - 1}}\right)\right\} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n_j} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t))^{-\frac{2b}{M} p_{j0}^{l\mu}(t)}, \quad t \ge 0,$$

де $c_0 \in (0, c)$*, сталі c і* δ *з* $\Lambda_\delta^{1,0}$*-умови.*

Для розв'язків систем, які задовольняють $\Lambda_\delta^{2,r}$-умови, правильні теореми типу Ліувілля. Наведемо деякі з них.

Теорема 1.11. *Нехай система (1.37) задовольняє* $\Lambda_0^{2,r}$*-умову з досить великим* $r \ge 0$ *і нехай* $u \equiv \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_N)$ *– розв'язок цієї системи, для компонент якого виконується умова*

$$\exists C > 0 \ \forall (t,x) \in \Pi_2 \ \forall \mu \in \mathbb{N}_{n_l} \ \forall l \in \mathbb{N}_N :$$

$$|\partial_t^{\mu-1} u_l(t,x)| \le C \prod_{\nu=1}^{n} (1 + |x_\nu|)^{\beta_\nu}$$

де $\beta_n u \ge 0$, $\nu \in \mathbb{N}_n$*. Тоді* u_l*, як функція* x_ν*, є многочленом степеня, не вищого* β_ν*.*

Теорема 1.12. *Нехай для системи (1.37) виконуються умови теореми 1.7. Тоді розв'язок цієї системи, який задовольняє умову 1) теореми 1.7, є нульовим.*

1.2.7 Побудова та оцінки ФМР поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою. Розглянемо стаціонарні $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи вигляду

$$A(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x), \tag{1.39}$$

і

$$A(x,\partial_t+\mu,\partial_x)u(t,x)=f(t,x), \tag{1.40}$$

де μ – комплексний параметр.

Цим системам відповідає поліноміальна в'язка $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем

$$\sum_{j=1}^{N} L^{\mu}_{lj}(x,\partial_x)u_j(x) \equiv \sum_{j=1}^{N}\Big(-\sum_{\substack{2bk_0+\|k\|\le 2bn_j\\(0\le k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0k}(x)\mu^{k_0}\partial_x^k u_j(x)+$$

$$+\delta_{lj}\mu^{n_j}u_l(x)\Big)=g_l(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,\mu\in\mathbb{C},l\in\mathbf{N}_N. \tag{1.41}$$

Теорема 1.13. *Нехай $Z(t,x,\xi)=(Z_{lj}(t,x,\xi))_{l,j=1}^{N}$, $t>0$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, – ФМРЗК для системи (1.39), яка задовольняє $\Lambda^{1,r}_{\delta}$-умову з $\delta\in\mathbf{R}$, $\alpha_\nu(t)=t^{1/(2b_\nu)}$, $t>0$, і $p^{lj}_{00}(t)=\begin{cases}p^{lj}_1, & t\le 1,\\ p^{lj}_2, & t>1.\end{cases}$ Тоді формулою*

$$E^{\mu}(x,\xi)=\int_0^{\infty} e^{-\mu\beta}Z(\beta,x,\xi)d\beta,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,x\ne\xi, \tag{1.42}$$

визначається ФМР системи (1.41) з $\mu\in\mathbb{C}$ таким, що $\mathrm{Re}\,\mu>\delta$. Для *елементів* E^{μ}_{lj}, $\{i,j\}\subset \mathbf{N}_N$, *матриці* E^{μ} *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k E^{\mu}_{lj}(x,\xi)| \le \begin{cases} C, & M+\|k\|<2b(p_1^{lj}+1), \\ C\ln[x-\xi]_q^{-1}+C_1, & M+\|k\|=2b(p_1^{lj}+1), \\ C[x-\xi]_q^{2b(p_1^{lj}+1)-M-\|k\|}, & M+\|k\|>2b(p_1^{lj}+1), \end{cases}$$

$$[x-\xi]_q \le 1, \tag{1.43}$$

$$|\partial_x^k E^{\mu}_{lj}(x,\xi)| \le C\exp\{-h_{\mu}[x-\xi]_q^{q/q''}\}, \quad [x-\xi]_q > 1,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \;\; x\ne\xi, \;\; \|k\|\le 2bn_l+r, \;\; \{l,j\}\subset\mathbb{N}_N,$$

де $C>0$, $C_1>0$, $h_{\mu}>0$, $q\equiv 2b/(2b-1)$, $q''\equiv 2b''/(2b''-1)$, $b''=\min\limits_{\nu\in\mathbb{N}_n} b_{\nu}$, $[x]_q \equiv \left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^{q_j}\right)^{1/q}$.

У випадку, коли $\mathrm{Re}\mu=\delta$ інтеграл (1.42), взагалі кажучи, розбігається. Для параболічних за Петровським систем зі сталими коефіцієнтами у працях [35, 37] пропонувалася регуляризація розбіжного інтеграла за допомогою многочленів, які є частинними сумами рядів Тейлора для функцій Z_{lj}, $\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N$.

У нашому випадку регуляризацію інтеграла (1.42) можна здійснювати аналогічним способом, тобто елементи ФМР E^{μ} системи (1.41) можна визначати формулами

$$E^{\mu}_{lj}(x,\xi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu\beta}(Z_{lj}(\beta,x,\xi)-P_{2b(p_{01}^{lj}+1)-M}(\beta,x,\xi))d\beta, \tag{1.44}$$

де для функції h: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ і $l\ge 0$

$$P_{\alpha}(h)(x)\equiv\sum_{\|k\|\le\alpha}\frac{(x-y)^k}{k!}\partial_y^k h(y), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Теорема 1.14. *Нехай система (1.39) задовольняє* $\lambda_{\delta}^{1,r}$*-умову з* $\delta\in\mathbb{R}$,

$\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $t > 0$ *і* $p^{lj}_{0k_0}(t) = \begin{cases} p^{lj}_1, & t \le 1, \\ p^{lj}_2, & t > 1, \end{cases}$ *такими, що* $p^{lj}_1 > p^{lj}_2$, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, *а* $Z(t, x, \xi) = (Z_{lj}(t, x, \xi))^n_{l,j=1}$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ *– її ФМРЗК.*

Тоді формулою (1.44) визначаються елементи ФМР E^μ *системи (1.41) з* $\mu \in \mathbb{C}$ *таким, що* $\operatorname{Re}\mu = \delta$. *При цьому для елементів* E^μ_{lj} *виконуються при* $[x-\xi]_q \le 1$ *оцінки (1.43), а при* $[x-\xi]_q > 1$ *і* $M + \|k\| > 2b(p^{lj}_1 + 1)$ *– оцінки*

$$|\partial^k_x E^\mu_{lj}(x, \xi)| \le C[x-\xi]_q^{2b(p^{lj}_2+1)-M-\|k\|}, \quad \{l, j\} \subset \mathbb{N}_N.$$

1.2.8 Властивості розв'язків деяких параболічних рівнянь у необмежених за часовою змінною областях.

У працях [31, 32] розглянуто рівняння вигляду

$$L^2 u(t, x) + aLu(t, x) + bu(t, x) = f(t, x),\ (t, x) \in \Pi_m, m \in \{1, 2\}, \qquad (1.45)$$

де L – скалярний або матричний параболічний диференціальний вираз першого порядку за часовою змінною $x \in \mathbb{R}^n$ зі сталими коефіцієнтами, a і b – задані числа з $\mathbb{R}$.

Нехай Z_0 – ФРЗК для рівняння $Lu = f$. Встановлено, що ФРЗК Z для рівняння (1.45) має вигляд

$$Z(t, x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(a-\lambda)t} - e^{-\lambda t}}{2\lambda - a} Z_0(t, x), & \text{якщо } a^2 \ne 4b; \\ \\ te^{-at/2} Z_0(t, x), & \text{якщо } a^2 = 4b; \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1.46)$$

де λ – корінь рівняння $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$.

Знаючи властивості Z_0, за допомогою формули (1.46) вивчені властивості Z і матриці Гріна G задачі Коші для рівняння (1.45). Зокрема, якщо для Z_0 правильні $\Lambda^{m,\infty}_{\delta_0}$-оцінки, то для G справджується $\Lambda^{m,\infty}_\delta$-оцінки з $\delta = \delta_0 - \lambda_0/2$, де $\lambda_0 = a$ при $a^2 \le 4b$ і $\lambda_0 = a - \sqrt{a^2 - 4b}$ при $a^2 > 4b$.

Використовуючи ці оцінки G, встановлені інтегральні зображення та оцінки розв'язків задачі Коші для рівняння (1.45) в Π_1, теореми типу Ліувілля для розв'язків, визначених у Π_2, а також побудовані фундаментальні розв'язки еліптичних рівнянь, породжених рівнянням (1.45).

Рівняння (1.45) цікаве насамперед тим, що у випадку, коли $b = 0$ і L – оператор теплопровідності, воно описує нову математичну модель процесів теплопровідності та дифузії, запропоновану в [38].

1.2.9 Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури. У працях [33, 34] розглянутий новий клас систем рівнянь, які природно узагальнюють $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи і системи, параболічні в розумінні В.О.Солонникова. Такі системи названі параболічними за Солонниковим системами неоднорідної структури. У модельному випадку (коли система містить тільки групу старших членів зі сталими коефіцієнтами) описана структура та властивості ФМР і наведені формули для розв'язків початкової задачі.

Наведемо означення нового класу систем. Розглянемо систему (1.22) в припущенні існування таких чисел s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m \equiv (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує $s_k + t_j$ і $\sum\limits_{k=1}^{N}(s_k + t_k) = 2br$, де r – степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 \equiv (A^0_{kj})^N_{k,j=1}$ – головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j}A^0_{kj}(t, x, p, i\sigma)$.

Означення 1.8. *Система рівнянь (1.22) називається параболічною за Солонниковим з неоднорідною структурою на Q, якщо існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t, x) \in Q$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння* $\det A^0(t, x, p, i\sigma) =$

0 *задовольняють рівняння*

$$\operatorname{Re} p(t,x,\sigma) \le -\delta(\sigma_1^{2b_1} + \cdots + \sigma_n^{2b_n}).$$

Для вищеозначеної системи задавати початкові умови так, як для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем, взагалі кажучи, не можна. Треба задавати їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [39].

Нехай $B(x,\partial_t,\partial_x) \equiv (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$ – матричний диференціальний вираз, $\varphi = \mathrm{col}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ – задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ не перевищує $p_k + t_j$. Головною частиною виразу B називається вираз $B^0 \equiv (B^0_{kj})_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j}B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$. Тоді початкові умови задаються у вигляді

$$B(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де матриця B повинна задовольняти таку умову доповняльності: рядки матриці

$$C(x,p) \equiv B^0(x,p,0)\widehat{A}^0(0,x,p,0),$$

де $\widehat{A}^0$ – матриця, взаємна для A^0.

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ систему рівнянь, параболічну за Солонниковим неоднорідної структури зі сталими коефіцієнтами, яка містить лише групу старших членів,

$$A^0(\partial_t,\partial_x)u = f. \tag{1.47}$$

ФМР $Z \equiv (Z_{kj})_{k,j=1}^N$ системи (1.47) виражається через фундаментальний розв'язок Γ рівняння

$$\det A^0(\partial_t,\partial_x) = 0$$

такими формулами:

$$Z_{kj}(t,x) = \widehat{A}^0_{kj}(\partial_t, \partial_x)\Gamma(t,x),$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{k,j\} \subset \{1,\dots,N\},$$

в яких $\widehat{A}^0_{kj}$ – елемент взаємної матриці $\widehat{A}^0$.

Компоненти розв'язку системи (1.47) визначаються формулами

$$u_j(t,x) = \sum_{l=1}^{N} \widehat{A}^0_{jl}(\partial_t, \partial_x) \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t-\tau, x-\xi) f_l(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, j \in \mathbb{N}_N,$$

а початкової задачі

$$A^0(\partial_t, \partial_x)u(t,x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$B^0(\partial_t, \partial_x)u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

в якій матричні диференціальні вирази A^0 і B^0 задовольняють вищесформульовані умови, – формулами

$$u_j(t,x) = \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{jk}(t, x-\xi)\varphi_k(\xi) d\xi, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}_N,$$

де

$$G_{jk}(t,x) \equiv \sum_{l=1}^{N} P_{lk}(\partial_t, \partial_x) Z_{jl}(t,x), \quad P_{lk}(p\lambda^{m_0}, i\sigma^m) = \lambda^{s_l - p_k - 2b} P_{lk}(p, i\sigma),$$

для ядер G_{jk} правильні оцінки

$$|\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha} G_{jk}(t,x)| \leq G_{\overline{\alpha}} t^{1-(M+\|\overline{\alpha}\|-t_j-p_k)/(2b)} \exp\left\{ -c \sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j} |x_j|^{q_j} \right\},$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \alpha_0 \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

1.3 Ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова

У цьому підрозділі наводяться результати для одного класу ультрапараболічних рівнянь, які узагальнюють добре відоме рівняння дифузії з інерцією, до якого прийшов А.М. Колмогоров [40] при вивченні броунівського руху.

Результати пунктів 1.3.1 – 1.3.3 одержані В.С. Дронем і С.Д. Івасишеним [41 – 48, 5], а 1.3.4 — В.В. Лаюком [49 – 52].

1.3.1 Фундаментальний розв'язок задачі Коші. Розглянемо рівняння

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,x)\partial^2_{x_{1k}x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} -$$

$$-a_0(t,x))u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.48}$$

де n_i, $i \in \{1,2,3\}$, – задані натуральні числа такі, що $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq n_1$, $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$, $x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \equiv (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1,2,3\}$; T – задане додатне число, $\Pi_H \equiv H \times \mathbb{R}^n$ при $H \subset \mathbb{R}$.

На коефіцієнти рівняння ставляться такі умови.

($\mathbf{A}_1'$). $\exists \delta > 0 \;\; \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]} \; \forall \sigma \in \mathbb{R}^{n_1}: \quad \mathrm{Re} \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,x)\sigma_k\sigma_j \geq \delta|\sigma|^2.$

($\mathbf{A}_2'$). Коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{k,j\} \subset \{1,...,n_1\}$, a_0 та їхні похідні за x_2 та x_3 є неперервними обмеженими в $\Pi_{[0,T]}$ функціями і задовольняють в $\Pi_{[0,T]}$ за x_1 рівномірну умову Гельдера.

($\mathbf{A}_3'$). Похідні за x_1 від a_{kj} і a_j, $\{k,j\} \subset \{1,...,n_1\}$, до другого і першого порядків відповідно задовольняють умову $\mathbf{A}_2'$.

За умов $\mathbf{A}_1'$ і $\mathbf{A}_2'$ доведено існування ФРЗК для рівняння (1.48). Це є така функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, що для довільного $\tau \in [0,T)$ і довільних неперервних обмежених функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ вираз $\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, визначає в $\Pi_{(\tau,T]}$ розв'язок однорідного рівняння (1.48) за початкової умови

$$u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.49}$$

Умова (1.49) задовольняється у сенсі рівномірної збіжності на кожному компакті з $\mathbb{R}^n$.

Для функції Z правильні оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3} Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-N-(|m_1|+3|m_2|+5|m_3|)/2} \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ |m_1| + 2(|m_2|+|m_3|) \leq 2, \tag{1.50}$$

з деякими $C > 0$ і $c > 0$. Тут

$$N \equiv (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2; \ m \equiv (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$$m_l \equiv (m_{l1}, ..., m_{ln_l}) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}, \ |m_l| \equiv \sum_{j=1}^{n_l} m_{lj}, \ l \in \{1,2,3\};$$

$\rho(t,x,\xi) \equiv \sum\limits_{l=1}^{3} t^{1-2l} \sum\limits_{j=1}^{n_l} |\bar{x}_{lj}(t) - \xi_{lj}|^2$, де $\bar{x}_{1j}(t) \equiv x_{1j}$, $j \in \{1,...,n_1\}$; $\bar{x}_{2j}(t) \equiv x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in \{1,...,n_2\}$; $\bar{x}_{3j}(t) \equiv x_{3j} + tx_{2j} + \frac{1}{2}t^2 x_{1j}$, $j \in \{1,...,n_3\}$; $\bar{x}_l(t) \equiv (\bar{x}_{l1}(t),...,\bar{x}_{ln_l}(t))$, $l \in \{1,2,3\}$; $\bar{x}(t) \equiv (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))$.

В [43] уточнено структуру ФРЗК, одержано оцінки його усереднень за групами просторових змінних. За умов $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$ і $\mathbf{A}_3'$ встановлено деякі властивості функції Z, зокрема, властивість нормальності та формулу згортки.

1.3.2 Коректна розв'язність задачі Коші у вагових просторах. Нехай $k_l(t,a_l) \equiv (c_0 a_l)/(c_0 - a_l t^{2l-1})$, $t \in [0,T]$, $l \in \{1,2,3\}$, якщо числа $c_0 > 0$ і $a_l \geq 0$, $l \in \{1,2,3\}$, такі, що $c_0 < c$, де c – стала з (1.50), $T < \min\limits_{1\leq l\leq 3}(c_0/(la_l))^{1/(2l-1)}$; $k(t) \equiv (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3))$; $s_1(t) \equiv k_1(t,a_1) + 2t^2 k_2(t,a_2) + \frac{3}{4}t^4 k_3(t,a_3)$, $s_2(t) \equiv 2k_2(t,a_2) + 3t^2 k_3(t,a_3)$, $s_3(t) \equiv 3k_3(t,a_3)$; $s(t) \equiv (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$.

Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана неперервна комплекснозначна функція. Для довільного $t \in [0,T]$ означимо такі норми:

$$||u(t,\cdot)||_0^{k(t),\tau} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|u(t,x)|\exp\{-[k(t),\bar{x}(\tau)]\}),$$

де $[a,x] \equiv \sum_{l=1}^{3} a_l|x_l|^2$, якщо $a \equiv (a_1,a_2,a_3)$ і $x \equiv (x_1,x_2,x_3)$; τ може набувати лише значень t або 0.

Нехай $1 \le p \le \infty$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна за x при довільному $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ і такого ж, як вище, τ означимо норми

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t),\tau} \equiv ||u(t,x)\exp\{-[k(t),\bar{x}(\tau)]\}||_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Формальною заміною у вищеозначених нормах функції k на функцію s вводяться норми $||u(t,\cdot)||_0^{s(t),0}$ і $||u(t,\cdot)||_p^{s(t),0}$, $1 \le p \le \infty$.

Надалі використовуватимемо такі простори:

Φ_0^a – простір усіх неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||\varphi||_0^a \equiv ||\varphi||_0^{k(0),0} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\varphi(x)|\exp\{-[a,x]\})$;

Φ_p^a, $1 \le p \le \infty$, – простір усіх вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||\varphi||_p^a \equiv ||\varphi||_p^{k(0),0} \equiv ||\varphi(x)\exp\{-[a,x]\}||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$;

Ψ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову $||\varphi||_1^{-s(T),0} \equiv ||\psi(x)\exp\{[s(T),x]\}||_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ використовуватимемо наступні умови, в яких p – довільно фіксоване число з $[1,\infty)$ або $p = \infty$, а

$$\Phi_f(t,\tau,x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}|f(\tau,\xi)|d\xi, \quad 0 < \tau < t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

де c – стала в експоненті з оцінок (1.50).

($\mathbf{B}_1$). Функція f неперервна і на кожному компакті $K \subset \Pi_{(0,T]}$ задовольняє рівномірну щодо t умову Гельдера за групами x_1, x_2 і x_3 просторових змінних відповідно з показниками $\beta_1 \in (0,1]$, $\beta_2 \in (1/3,1]$ і $\beta_3 \in (3/5,1]$.

$(\mathbf{B}_{20})$. Для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_0^{k(t),0}$ і $F_{20}(t) \equiv \int\limits_0^t ||f(\tau,\cdot)||_0^{k(\tau),0} d\tau$.

$(\mathbf{B}_{2p})$. Для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_p^{k(t),0}$ і $F_{2p}(t) \equiv \int\limits_0^t ||f(\tau,\cdot)||_p^{k(\tau),0} d\tau$.

$(\mathbf{B}_{30})$. Для довільних t і τ таких, що $0 < \tau < t \le T$, скінченними є величини $||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_0^{k(t),t}$ і $F_{30}(t) \equiv \int\limits_0^t ||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_0^{k(t),t} d\tau$, причому $F_{30}(t) \to 0$, $t \to 0+$.

$(\mathbf{B}_{3p})$. Для довільних t і τ таких, що $0 < \tau < t \le T$, скінченними є величини $||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_p^{k(t),t}$ і $F_{3p}(t) \equiv \int\limits_0^t ||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_p^{k(t),t} d\tau$, причому $F_{3p}(t) \to 0$, $t \to 0+$.

Теорема 1.15. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1'$ *і* $\mathbf{A}_2'$. *Якщо* $\varphi \in \Phi_0^a$, *а* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_{20}$ *або* $\mathbf{B}_{30}$, *то функція*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \tag{1.51}$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

є регулярним розв'язком рівняння (1.48), для якого за умови $\mathbf{B}_{20}$ *справджується оцінка*

$$\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||_0^{s(t),0} \le C(||\varphi||_0^a + F_{20}(t)),$$

а за умови $\mathbf{B}_{30}$ *– оцінка*

$$\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||_0^{k(t),t} \le C(||\varphi||_0^a + F_{30}(t))$$

і в обох випадках виконується співвідношення $u(t,\cdot) \overset{K}{\rightrightarrows} 0$, $\;t \to 0+$, $\;K$ *– довільний компакт в* $\mathbb{R}^n$.

Якщо додатково виконується умова $\mathbf{A}_3'$ *і невід'ємні числа* a_l, $l \in \{1,2,3\}$, *які входять у вирази для функцій* k_l *і* s_l, $l \in \{1,2,3\}$, *вибрані так, щоб* *виконувалася нерівність*

$$T < \min_{l \in M} (c_0/s_l(T))^{1/(2l-1)}, \tag{1.52}$$

то цей розв'язок єдиний.

Теорема 1.16. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1'$ *і* $\mathbf{A}_2'$*. Якщо* $\varphi \in \Phi_p^a$*,* $1 \le p \le \infty$*, а* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_{2p}$ *або* $\mathbf{B}_{3p}$*, то функція (1.51) є регулярним розв'язком рівняння (1.48), для якого за умови* $\mathbf{B}_{2p}$ *справджується оцінка*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||_p^{s(t),0} \le C(||\varphi||_p^a + F_{2p}(t)),$$

а за умови $\mathbf{B}_{3p}$ *– оцінка*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||_p^{k(t),t} \le C(||\varphi||_p^a + F_{3p}(t))$$

і в обох випадках при $1 \le p < \infty$ $\lim\limits_{t \to 0} ||u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)||_p^{s(t),0} = 0,$ *а при* $p = \infty$ $u(t,\cdot) \to \varphi,\ \ t \to 0,$ *слабко, тобто*

$$\forall \psi \in \Psi: \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{u(t,x)}\psi(x)dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\psi(x)dx, \quad t \to 0+.$$

Якщо додатково виконуються умови $\mathbf{A}_3'$ *і (1.52), то цей розв'язок єдиний.*

Позначимо через M^a простір усіх комплекснозначних узагальнених борельових мір, які задовольняють умову

$$||\mu||^a \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[a,x]\} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ; а через Ψ_0 – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що $|\psi(x)| \exp\{[s(T),x]\} \to 0$, $|x| \to \infty$.

Теорема 1.17. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1'$ *і* $\mathbf{A}_2'$*. Якщо* $\mu \in M^a$*, а* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_{21}$ *або* $\mathbf{B}_{31}$*, то функція*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \tag{1.53}$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

є регулярним розв'язком рівняння (1.48), для якого за умови $\mathbf{B}_{21}$ *справджується оцінка*

$$\exists C>0\ \ \forall t\in(0,T]:\quad ||u(t,\cdot)||_1^{s(t),0}\le C(||\mu||^a+F_{21}(t)),$$

а за умови $\mathbf{B}_{31}$ *– оцінка*

$$\exists C>0\ \ \forall t\in(0,T]:\quad ||u(t,\cdot)||_1^{k(t),t}\le C(||\mu||^a+F_{31}(t))$$

і в обох випадках $u(t,\cdot)\to\mu$, $t\to 0+$, *слабко, тобто*

для довільної функції $\psi\in\Psi_0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\overline{u(t,x)}dx\to\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\overline{\mu(x)},\quad t\to 0+\,.$$

Якщо додатково виконуються умови $\mathbf{A}_3'$ *і (1.52), то цей розв'язок єдиний.*

Сформулюємо ще теорему, яка є у певному розумінні оберненою до теорем 1.16 і 1.17.

Теорема 1.18 *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_3'$ *та (1.52) і нехай* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_{3p}$ *з деяким* $p\in[1,\infty]$. *Якщо* u *– розв'язок рівняння (1.48), який задовольняє умову*

$$\exists C>0\ \ \forall t\in(0,T]:\quad ||u(t,\cdot)||_p^{k(t),t}\le C, \tag{1.54}$$

то при $1<p\le\infty$ *існує єдина функція* $\varphi\in\Phi_p^a$, *а при* $p=1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu\in M^a$ *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді (1.51) або (1.53).*

З теорем 1.16–1.18 випливає такий підсумковий результат.

Наслідок 1. *Розглянемо рівняння (1.48) з деякою функцією* f, *яка задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_{3p}$, $1<p\le\infty$. *Умова (1.54) є необхідною і*

достатньою для таких тверджень:

1) Φ_p^a є множиною початкових значень розв'язків рівняння (1.48);

2) розв'язок u рівняння (1.48) зображується у вигляді (1.51) з $\varphi \in \Phi_p^a$ і при $1 < p < \infty$ $\lim\limits_{t\to 0} ||u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)||_p^{s(t),0} = 0$, а при $p = \infty$ $u(t,\cdot) \to \varphi$, $t \to 0$, слабко.

Наслідок 2. *Нехай функція f у рівнянні (1.48) задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_{31}$. *Тоді умова (1.54) з $p = 1$ є необхідною і достатньою для таких тверджень:*

1) M^a є множиною початкових значень розв'язків рівняння (1.48);

2) розв'язок u рівняння (1.48) зображується у вигляді (1.53) з $\mu \in M^a$ і $u(t,\cdot) \to \mu$, $t \to 0$, слабко.

1.3.3 Коректна розв'язність задачі Коші в гельдерових просторах. Для функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ покладемо

$$||w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} \equiv \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} |w(t,x)| + \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]} \\ x\neq x'}} \frac{|w(t,x) - w(t,x')|}{d[x,x';\beta_1,\beta_2,\beta_3]};$$

$$||w||^{(p_1+\beta_1,3p_2+\beta_2,5p_3+\beta_3)} \equiv ||w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0<|m_l|\le p_l} ||\partial_{x_l}^{m_l} w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)},$$

де $\beta_1 \in (0,1)$, $\beta_2 \in (0,3)$, $\beta_3 \in (0,5)$; $p_1 \in \{0,1,2\}$, $p_2 \in \{0,1\}$, $p_3 \in \{0,1\}$; $d[x,x';\beta_1,\beta_2,\beta_3] \equiv \left(\sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - x'_{lj}|^{2\beta_l/(2l-1)}\right)^{1/2}$ – спеціальна відстань між точками x і x' з $\mathbb{R}^n$.

Означимо такі простори функцій:

$C^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$, $\beta_1 \in (0,1)$, $\beta_2 \in (0,3)$, $\beta_3 \in (0,5)$, – простір усіх функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$;

$C^{(p_1+\beta_1,3p_2+\beta_2,5p_3+\beta_3)}$ – простір функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які разом зі своїми похідними $\partial_{x_l}^{m_l} w$, $|m_l| \leq p_l$, $l \in \{1,2,3\}$, належать до простору $C^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$, тобто є скінченною норма $||w||^{(p_1+\beta_1,3p_2+\beta_2,5p_3+\beta_3)}$;

$H^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)}$, $p_1 \in \{0,1,2\}$, $p_2 \in \{0,1\}$, $p_3 \in \{0,1\}$ – простір функцій $\varphi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які мають похідні вигляду $\partial_{x_l}^{m_l}$, $|m_l| \leq p_l$, $l \in \{1,2,3\}$, і скінченну норму

$$|\varphi|^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)} \equiv |\varphi|^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0<|m_l|\leq p_l} |\partial_{x_l}^{m_l}\varphi|^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},$$

де

$$|\varphi|^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{\{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n \\ x\neq x'}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(x')|}{d[x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}.$$

Теорема 1.19. *Нехай коефіцієнти рівняння (1.48) задовольняють умови* $\mathbf{A}'_1$ *і* $\mathbf{A}'_2$, $f \in C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}$, $\alpha \in (0,1)$, *а функція* $\varphi \in H^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}$ *така, що* $L\varphi \in C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}$ *та*

$$\exists C > 0: \quad ||L\varphi||^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)} \leq C|\varphi|^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}.$$

Тоді виразом (1.51) визначається єдиний розв'язок задачі Коші (1.48), (1.49) з $\tau = 0$, *який належить до простору* $C^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}$ *і для якого правильна оцінка*

$$||u||^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)} \leq C(||f||^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)} + |\varphi|^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}).$$

1.3.4 ФРЗК для узагальнених рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова. Наведемо результати із [49–52] для рівнянь загальнішої структури, ніж рівняння (1.48). Ці рівняння, як і рівняння (1.48), є узагальненнями класичних рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова з теорії марковських випадкових процесів.

Нехай $S \equiv \partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_2} \left(\sum\limits_{l=1}^{n_1} b_{lj}^1 x_{1l}\right) \partial_{x_{2j}} - \sum\limits_{j=1}^{n_3} \left(\sum\limits_{l=1}^{n_2} b_{lj}^2 x_{2l}\right) \partial_{x_{3j}}$ — диференціальний вираз зі сталими коефіціінтами b^1_{lj} і b^2_{lj}, $B^1 \equiv \begin{pmatrix} B^1_0 & B^1_1 \\ B^1_2 & \end{pmatrix}$ і $B^2 \equiv \begin{pmatrix} B^2_0 \\ B^2_1 \end{pmatrix}$ — матриці, складені відповідно з b^1_{lj} і b^2_{lj} (тут B^1_0, B^1_1, B^1_2, B^2_0 і B^2_1 — матриці-блоки розмірів $n_2 \times n_3$, $n_2 \times (n_2 - n_3)$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$ відповідно),

$$d(t, x; \tau, \xi) \equiv |t - \tau|^{1/(2b)} + \sum_{j=1}^{3} |x_j - \xi_j|^{1/(2b(j-1)+1)}$$

— спеціальна відстань між точками (t, x) і (τ, ξ), де $\{t, \tau\} \subset \mathbb{R}$, $\{x \equiv (x_1, x_2, x_3), \xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\} \subset \mathbb{R}^n$, а

$$X(t) \equiv (X_1(t), X_2(t), X_3(t)), \quad X_1(t) \equiv x_1, \quad X_2(t) \equiv x_2 + t(B^1)' x_1,$$

$$X_3(t) \equiv x_3 + t(B^2)' x_2 + \frac{1}{2} t^2 (B^2)'(B^1)' x_1, \quad t > 0,$$

— спеціальні точки, побудовані за точкою $x \in \mathbb{R}^n$.

Розглядається рівняння вигляду

$$\left(S - \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t, x) \partial^{k_1}_{x_1} \right) u = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.54}$$

за таких припущень:

$(\mathbf{A}''_1)$ існує стала $\delta > 0$ така, що для будь-яких $(t, x) \in \Pi_{(0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k_1| = 2b} a_{k_1}(t, x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta\, |\sigma_1|^{2b};$$

$(\mathbf{A}''_2)$ визначники відповідних блоків матриць B^1 і B^2 задовольняють умови $\left|\begin{pmatrix} B^1_0 & B^1_1 \end{pmatrix}\right| \ne 0$, $\left|B^2_0\right| \ne 0$;

$(\mathbf{A}''_3)$ коефіцієнти a_{k_1} обмежені і гельдерові за t, x в $\Pi_{[0,T]}$ у такому сенсі: існують сталі $H > 0$ і $\alpha \in (0, 1]$ такі, що для довільних $\{(t, x), (\tau, \xi)\} \in \Pi_{[0,T]}$ справджується нерівність

$$|\Delta^{\tau,\xi}_{t,x} a_{k_1}(t, x)| \le H(d(t, X(t - \tau); \tau, \xi))^{\alpha}; \tag{1.55}$$

$(\mathbf{A}_4'')$ існують обмежені і гельдерові за t, x в сенсі (1.55) в $\Pi_{[0,T]}$ похідні $\partial_{x_1}^{k_1} a_{k_1}$, $|k_1| \le 2b$.

За умови $\mathbf{A}_4''$ для рівняння (1.54) існує спряжене рівняння

$$S^* v(\tau,\xi) - \sum_{|k_1|\le 2b} (-\partial_{\xi_1})^{k_1} (\bar{a}_{k_1}(\tau,\xi) v(\tau,\xi)) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)}, \tag{1.56}$$

і для його коефіцієнтів виконується умова 3).

Теорема 1.20. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1''$ — $\mathbf{A}_3''$. *Тоді для рівняння (1.54) існує ФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-|k_1|/(2b)} F_c(t,x;\tau,\xi), \quad |k_1| \le 2b,$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1} F_c(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $F_c(t,x;\tau,\xi) \equiv E_c^{(0)}(t,x_1;\tau,\xi_1) \sum\limits_{j=0}^{\infty} (\hat{C}\Gamma(\alpha/(2b))(t-\tau)^{\alpha/(2b)})^j (\Gamma(j\alpha/(2b)))^{-1} \times$

$$\times E^{(1)}_{c\delta_0^j}(t,x;\tau,\xi), \quad t > \tau, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$E_c^{(0)}(t,x_1;\tau,\xi_1) \equiv \exp\left\{ -c(t-\tau)^{1-q} |x_1 - \xi_1|^q \right\},$$

$$E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) \equiv \exp\left\{ -c \sum_{j=1}^{3} (t-\tau)^{1-jq} |X_j(t-\tau) - \xi_j|^q \right\},$$

$M \equiv \sum\limits_{j=1}^{3} (j-1+1/(2b)) n_j$, $q \equiv 2b/(2b-1)$, $\hat{C}$ *і* δ_0 *— деякі додатні сталі, причому* $\delta_0 < 1$, Γ *— гамма-функція Ейлера,* α *— число з умови* $\mathbf{A}_2''$.

Якщо, крім того, виконана умова $\mathbf{A}_4''$, *то для спряженого рівняння (1.56) існує ФРЗК* Z^*, *зв'язаний з ФРЗК* Z *рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z(t,x;\tau,\xi)}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

і для Z *виконується формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y) Z(\lambda,y;\tau,\xi)\,dy, \quad 0 \le \tau < \lambda < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що для випадку, коли $\begin{pmatrix} B_0^1 & B_1^1 \end{pmatrix} = I$, $B_2^1 = O$, $B_0^2 = I$ і $B_1^2 = O$ (I — одинична, а O — нульова матриці) теорема 1.20 доведена в [5]. Загальний випадок зводиться до цього частинного за допомогою спеціальної невиродженої заміни змінних.

2 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Поняття узагальненої функції та коректне визначення елементарних операцій над нею дозволили математикам формулювати задачі Коші для диференціальних, псевдодиференціальних (операторних) рівнянь (і успішно розв'язувати деякі з них) у випадку, коли початкові функції є узагальненими.

Однак розширення класів початкових даних (перехід від звичайних функцій до узагальнених функцій скінченного порядку, а відтак — до нескінченного порядку), загалом, призводить до втрати певних "хороших" властивостей розв'язків цих задач (зокрема тих, які є визначальними для їх фундаментальних розв'язків), а також, до потреби в коректному продовженні операторів (що у рівняннях задач Коші) на ширші класи функцій, і вимагає усвідомлення того, що розуміти під початковими умовами та розв'язком такої задачі Коші.

Отже, важливими і актуальними є задачі, пов'язані з побудовою операторів, продовженням їх та вивченням властивостей, а також з відшуканням таких класів початкових функцій, які б забезпечували не лише коректну розв'язність задачі Коші, а й наявність у її розв'язку потрібних властивостей.

Розділ складається із трьох підрозділів.

Перший підрозділ стосується теорії основних і узагальнених функцій, започаткованої ще у 50-х роках минулого століття Л.Шварцом, а відтак достатньо розвиненої І.М. Гельфандом, Г.Є. Шиловим, Б.Л. Гуревичем та ін. У ньому описано топологічну структуру просторів, які є результатом розширення відомих просторів Б.Л. Гуревича (шляхом поповнення їх нескінченно диференційовними функціями, які необов'язково цілі), вивчено питання їхньої двоїстості за Фур'є; сформульовано критерій згортувача та мультиплікатора в просторах типу S, знайдено певні класи згортувачів у цих просторах, які містять у собі клас фінітних узагальнених функцій, встановлено необхідні та достатні умови нетривіальності просторів Б.Л.Гуревича та вивчено зв'язок між ними. Зазначимо, що дані простори є природним середовищем дослідження задач Коші для параболічних рівнянь. Результати, одержані у цьому пункті, належать В.А. Літовченку та Т.І.Готинчан [53–63].

У другому підрозділі викладено результати про побудову оператора Бесселя дробового диференціювання з додатним параметром у просторах типу S, продовження його на простори узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Частковим випадком даного оператора є відомий оператор Бесселя дробового диференціювання (тобто оператор, обернений до дробового степеня $(E-\Delta)^{-1/2}$, де E – одиничний оператор, а Δ – оператор Лапласа).

Побудовою у різних просторах та вивченням властивостей оператора Бесселя дробового диференціювання займалися N. Aronszajn, K.T. Smith, A.P. Calderon, R. Adams, В.А. Ногін, Б.С. Рубін та ін.

Третій підрозділ містить результати про цілковиту розв'язність задачі Коші для класичних параболічних диференціальних рівнянь (тобто рівнянь, параболічних за Петровським, Ейдельманом та Шиловим), а також для деяких класів псевдодиференціальних рівнянь поліноміального та інтегрального виглядів з псевдодиференціальними операторами Бесселя з додатним параметром та Е. Поста, у просторах, породжених визначальними властивостями їх відповідних ФР. При цьому: а) описано "максимальні" класи початкових даних задачі Коші, які забезпечують не лише існування та єдиність розв'язків, а і наявність у них тих властивостей гладкості та поведінки в околі нескінченно віддалених точок, що й у ФР цих задач; б) наведено альтернативний метод дослідження ФРЗК для параболічних за Шиловим рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часу, який не потребує використання додаткової характеристики – роду рівняння задачі Коші (на відміну від традиційного методу, який базується на використанні теорем типу Фрагмента-Ліндельофа) і, таким чином, знято питання про вираження роду рівняння через його порядок та показник параболічності; в) сформульовано теореми про якісні властивості розв'язків задачі Коші. Результати, наведені у другому та третьому підрозділах, належать В.А. Літовченку [53, 54, 56, 57, 64–70].

2.1 Простори основних і узагальнених функцій

Нехай $x = (x_1; \ldots ; x_n)$, $y = (y_1; \ldots ; y_n)$ – елементи простору $\mathbb{R}^n$, $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$; $C^m(M)$ – простір усіх m разів неперервно диференційовних функцій на множині M. Для довільних $\alpha > 0$, $\beta > 0$ покладемо

$$S^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists B > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_q > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ |x^q D^k \varphi(x)| \leq c_q B^{|k|} k^{\beta k}\};$$

$$S_\alpha = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists A > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_k > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \\ |x^q D^k \varphi(x)| \leq c_k A^{|q|} q^{\alpha q}\};$$

$$S_\alpha^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists C > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|x^q D^k \varphi(x)| \leq cA^{|q|}B^{|k|}k^{\beta k}q^{\alpha q}\},$$

де $\mathbb{Z}_+^n$ – цілочисельна решітка у просторі $\mathbb{R}^n$ з невід'ємними компонентами; $|m| = m_1 + \cdots + m_n$, $m^{\beta m} = m_1^{\beta m_1} \ldots m_n^{\beta m_n}$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$.

Зазначимо, що $S_\alpha^\beta = S_\alpha \bigcap S^\beta$, якщо $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ці простори були побудовані І.М. Гельфандом і Г.Є. Шиловим в [71] та названі ними просторами типу S, де S – відомий простір Л. Шварца [72].

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і складаються з тих і лише тих $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, які задовольняють нерівність

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq cB^{|k|}k^{\beta k}e^{-\delta \|x\|^{1/\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}_+^n,$$

з деякими додатними сталими c, B і δ, залежними тільки від функції φ, а $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{S_\alpha^\beta} \varphi$, де $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$, тоді і тільки тоді, коли [71]:

1) $D_x^k \varphi_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}} D_x^k \varphi$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+^n)$, де $\mathbb{K}$ – довільна компактна множина з $\mathbb{R}^n$ (тобто послідовність φ_ν, $\nu \geq 1$ правильно збігаються до φ на $\mathbb{R}^n$);

2) $|x^q D_x^k \varphi_\nu(x)| \leq cA^{|q|}B^{|k|}k^{\beta k}q^{\alpha q}$, $\{q; k\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\nu \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, де c, A, B – додатні сталі, не залежні від q, k, ν та x.

Через Φ' позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на Φ зі слабкою збіжністю. Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$, а також згортку цієї функції з функціоналом типу функції φ з Φ (позначатимемо $\varphi * f$) визначимо з допомогою наступних співвідношень [71]:

$$< F[f], F[\psi] >= (2\pi)^n < f, \psi >,$$

$$< \varphi * f, \psi >=< f, \varphi * \psi >, \quad \psi \in \Phi$$

(тут виразом $< g, \psi >$ позначимо дію функціонала g на ψ).

Говоритимемо, що функціонал f з Φ' дійснозначний, якщо $\overline{< f, \varphi >} =< f, \varphi >$ для всіх $\varphi \in \Phi$ (тут $\overline{(\cdot)}$ позначає комплексну спряженість).

Правильне таке твердження [55].

Теорема 2.1. *Нехай f – дійснозначний функціонал з $\Phi' = \{(S_\alpha)'; (S^\beta)'; (S_\alpha^\beta)'\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, а $\varphi \in \Phi$. Тоді*

1) $< f, \varphi(\cdot + \xi) > \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) $\varphi * f =< f, \varphi(\cdot + \xi) >$;

3) $F[\varphi * f] = \overline{F[f]} F[\varphi]$.

Важливу роль у теорії узагальнених функцій відіграють такі елементи f з Φ', що: 1) $(f * \varphi)(\cdot) \in \Phi$ $(\forall \varphi \in \Phi)$; 2) для кожної послідовності $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$, такої, що $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{\Phi} \varphi$, відповідна послідовність $\{f * \varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ прагне до $f * \varphi$ у просторі Φ при $\nu \to \infty$. Їх ще називають згортувачами у Φ. Зазначимо, що кожна фінітна узагальнена функція f з S' є згортувачем у просторах S, S_α, S^β та S_α^β [71]. Проте не лише узагальнені функції з компактним носієм є згортувачем у зазначених просторах основних функцій. Опишемо класи згортувачів, елементами яких є не обов'язково фінітні узагальнені функції.

Позначимо через F сукупність усіх узагальнених функцій з S', які мають наступну властивість. Для будь-якої функції $f \in F$ існує $p \in \mathbb{Z}_+$, а також звичайні функції $f_q(\cdot)$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q| \leq p$ такі, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_q(k) > 0 : \ |f_q(x)| \leq c_q(k)/(1 + \|x\|)^{|k|} \tag{2.1}$$

майже скрізь на $\mathbb{R}^n$, причому

$$< f, \varphi >= \sum_{|q| \leq p} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_q(x)} D_x^q \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S.$$

Символом F_α, $\alpha > 0$, позначимо всі ті елементи з F, для яких у (2.1) $c_q(k) = \overline{c_q} A_q^{|k|} k^{\alpha k}$, де $\overline{c_q}$, A_q – додатні сталі, незалежні від k. Зі структури фінітної узагальненої функції f з простору S' [71, с.145] одержуємо, що $f \in F_\alpha$, $\alpha > 0$.

Правильне таке твердження [56].

Теорема 2.2. *Нехай* $f \in F_\alpha$ *(*F*), де* $\alpha > 0$. *Тоді* f *– згортувач у* $\Phi \in \{S_\alpha; S_\alpha^\beta\}$ *(*$\Phi \in \{S; S^\beta\}$*) для довільного* $\beta > 0$.

Наступні твердження характеризують згортувачі в просторах типу S [53, 56].

Теорема 2.3. *Нехай* $\gamma > 0$, $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, $\beta \geq \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\gamma}, & \gamma = 2m, \\ 1, & \gamma \neq 2m, \end{cases}$, $m \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \{S^\alpha; S_\beta^\alpha\}$, $g_\delta(\cdot) = F^{-1}[e^{-\delta(1+\|x\|^2)^{\gamma/2}}](\cdot)$, $\delta > 0$, *а* f *– згортувач у* Φ. *Тоді:*

1) $\forall \delta_1 > 0 \ \forall \delta_2 > 0$: $\dfrac{F[f * g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_1}]} = \dfrac{F[f * g_{\delta_2}]}{F[g_{\delta_2}]}$;

2) $\dfrac{F[f * g_\delta]}{F[g_{\delta_1}]}$ *– мультиплікатор у* $\widetilde{\Phi}$ *для всіх* $\delta > 0$;

3) $F[f]$ *– регулярний функціонал з* $\widetilde{\Phi}'$, *породжений* $\dfrac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]}$;

4) $\forall \varphi \in \Phi \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f](\xi)} F[\varphi](\xi)$ *(тут* $\widetilde{\Phi} = F[\Phi]$, *а* F^{-1} *– обернене перетворення Фур'є).*

Теорема 2.4 (критерій згортувача). *Нехай виконуються всі умови з попередньої теореми, тоді для того, щоб* f *з* Φ' *був згортувачем у* Φ, *необхідно і достатньо, щоб* $F[f]$ *був мультиплікатором у просторі* $\widetilde{\Phi}$. *При цьому завжди матиме місце співвідношення:*

$$F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f](\xi)} F[\varphi](\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \Phi.$$

Що ж до мультиплікаторів у просторах типу S, то їх можна відслідковувати згідно з такими твердженнями [54, 56].

Теорема 2.5 (критерій мультиплікатора). *Нехай виконуються* *всі припущення з теореми 2.3, тоді для того, щоб функція* $\mu(\cdot)$ *була мультиплікатором у просторі* $\widetilde{\Phi}$*, необхідно і достатньо, щоб* $\mu(\cdot)e^{-\delta(1+\|\cdot\|^2)^{\gamma/2}} \in \widetilde{\Phi}$ *для кожного достатньо малого* $\delta > 0$.

Далі, нехай $\omega_j(\cdot)$ – зростаюча, неперервна функція на $[0;+\infty)$, причому $\omega_j(0) = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega_j(x) = +\infty$, $j = \overline{1,n}$. Покладемо для $x \geq 0$ $\overline{\Omega}_j(x) = \int\limits_0^x \Omega_j(\xi)d\xi$, $j = \overline{1,n}$. При кожному $j \in \{1,\ldots,n\}$ функція $\overline{\Omega}_j(\cdot)$ має властивості [57, 73]: 1) вона диференційовна, зростаюча на $[0;+\infty)$; 2) $\overline{\Omega}_j(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{\Omega}_j(x) = +\infty$; 3) $\overline{\Omega}_j(\cdot)$ – опукла функція, тобто: а) $\forall\{x_1;x_2\} \subset [0;+\infty)$: $\overline{\Omega}_j(x_1)+\overline{\Omega}_j(x_2) \leq \overline{\Omega}_j(x_1+x_2)$; б) $\forall\delta \geq 1$ $\forall x \in [0;+\infty)$: $\overline{\Omega}_j(\delta x) \geq \delta\overline{\Omega}_j(x)$; в) $\forall\delta \in (0;1)$ $\forall x \in [0;+\infty)$: $\overline{\Omega}_j(\delta x) \leq \delta\overline{\Omega}_j(x)$. Довизначимо $\overline{\Omega}_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, на $(-\infty;0]$ парним чином і нехай $\overrightarrow{\Omega}(x) \overset{def}{=} \{\overline{\Omega}_1(x_1);\ldots;\overline{\Omega}_n(x_n)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Поруч з $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ розглянемо $\overrightarrow{M}(x) = \{\overline{M}_1(x_1);\ldots;\overline{M}_n(x_n)\}$, де $\overline{M}_\nu(\cdot)$ – функція, аналогічна до $\overline{\Omega}_\nu(\cdot)$, побудована за функцією $\mu_\nu(\cdot)$, яка має такі ж властивості, що і функція $\omega_\nu(\cdot)$.

За функціями $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{\Omega}$ будуємо простори $W_{\overrightarrow{M}}$, $W^{\overrightarrow{\Omega}}$, $W^{\overrightarrow{\Omega}}_{\overrightarrow{M}}$. Правильні такі твердження.

Теорема 2.6. *Для функції* $\varphi \in W^{\overrightarrow{\Omega}}_{\overrightarrow{M}}$ *наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists c > 0$ $\exists a \equiv (a_1,a_2,\ldots,a_n) > 0$ $\exists b \equiv (b_1,b_2,\ldots,b_n) > 0$ $\forall z = x+iy \equiv (x_1+iy_1, x_2+iy_2,\ldots,x_n+iy_n) \in \mathbb{C}^n$: $|\varphi(z)| \leq c\prod\limits_{j=1}^n \exp\{-\overline{M}_j(a_jx_j)+\overline{\Omega}_j(b_jy_j)\}$;

2) $\exists c' > 0$ $\exists a' \equiv (a'_1,a'_2,\ldots,a'_n) > 0$ $\exists b' \equiv (b'_1,b'_2,\ldots,b'_n) > 0$ $\forall\{k,m\} \subset \mathbb{Z}^n_+$ $\exists\nu_{k_j} \in [0,k_j)$ $\exists\rho_{m_j} \in [0,m_j)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\forall x \equiv (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$: $|x^kD^m\varphi(x)| \leq c'm!\prod\limits_{j=1}^n \left(\dfrac{b'_j}{\rho_{m_j}}\right)^{m_j}\left(\dfrac{\nu_{k_j}}{a'_j}\right)^{k_j} \exp\{\overline{\Omega}_j(\rho_{m_j}) - \overline{M}_j(\nu_{k_j})\}$, *де* ρ_{m_j} *– розв'язок рівняння* $t\omega_j(t) = m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, ν_{k_j} *– розв'язок рівняння* $t\mu_j(t) = k_j$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $m! = m_1!m_2!\ldots m_n!$.

Теорема 2.7. *Для функції $\varphi \in W_{\vec{M}}$ наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0$ $\forall k \equiv (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists c_k > 0$ $\forall x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $|D^k \varphi(x)| \leq c_k \prod_{j=1}^{n} \exp\{-\overline{M}_j(a_j x_j)\}$;

2) $\exists a' \equiv (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) > 0$ $\forall k \equiv (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists c_k^{(1)} > 0$ $\forall l \equiv (l_1, l_2, \ldots, l_n) \subset \mathbb{Z}_n^+$ $\exists \nu_{l_j} \in [0, l_j)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\nu_0 = 0$, $\forall x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $|x^l D^k \varphi(x)| \leq c_k^{(1)} \prod_{j=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\nu_{l_j}}{a'_j} \right)^{l_j} \exp\{-\overline{M}_j(\nu_{l_j})\} \right\}$, *де* ν_{l_j} *– розв'язок рівняння* $x_j \mu_j(x_j) = l_j$, $l_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Теорема 2.8. *Для функції $\varphi \in W^{\vec{\Omega}}$ наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists b \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n) > 0$ $\forall l \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists c_l > 0$ $\forall z = x + iy \equiv (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$: $|z^l \varphi(z)| \leq c_l \prod_{j=1}^{n} \exp\{\overline{\Omega}_j(b_j y_j)\}$;

2) $\exists b' \equiv (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) > 0$ $\forall l \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists c'_l > 0$ $\forall k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\exists \rho_{k_j} \in [0, k_j)$, $\rho_0 = 0$, $\forall x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $|x^l D^k \varphi(x)| \leq c'_l k! \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{b'_j}{\rho_{k_j}} \Big)^{k_j} \exp\{\overline{\Omega}_j(\rho_{k_j})\}$, *де* ρ_{k_j} *– розв'язок рівняння* $x_j \omega_j(x_j) = k_j$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k! = k_1! k_2! \ldots k_n!$.

Результати, сформульовані у теоремах 2.6 – 2.8, належать Т.І. Готинчан.

Як і простори типу S_α^β, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, простори $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ можуть виявитися тривіальними (тобто містити лише єдину функцію $\varphi \equiv 0$). Тому виникає питання: які умови повинні задовольняти вектор-функції $\overrightarrow{\Omega}$ і $\overrightarrow{M}$, щоб простір $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ був нетривіальним.

Ще у 50-х роках XX століття Б.Я.Левін описав один клас функцій$\overrightarrow{M}$ і $\overrightarrow{\Omega}$, для яких простір $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ нетривіальний [71]. У загальному випадку відповідь дає твердження.

Теорема 2.9. *Для того, щоб простір $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ був нетривіальним, необхідно* *і досить, щоб виконувалися умови:*

$$\inf_{k_j\in\mathbb{N}} \frac{\nu_{k_j}}{\rho_{k_j}} > 0, \quad j\in\{1,2,\dots,n\}, \tag{2.2}$$

де ρ_{k_j} *– розв'язок рівняння* $x_j\omega(x_j) = k_j$*, а* ν_{k_j} *– розв'язок рівняння* $x_j\mu_j(x_j) = k_j$*,* $k_j\in\mathbb{Z}_+$*.*

Тоді умовою тривіальності простору $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ є умова

$$\inf_{k_j\in\mathbb{N}} \frac{\nu_{k_j}}{\rho_{k_j}} = 0, \quad j\in\{1,2,\dots,n\}, \tag{2.3}$$

Зазначимо, що умови (2.2) еквівалентні умовам

$$\forall j\in\{1,2,\dots,n\}\ \exists c_j>0\ \exists d_j>0\ \forall x_j\in\mathbb{R}:\ \overline{\Omega}_j(x_j)\ge c_j\overline{M}_j(d_j\,x_j),$$

а умови (2.3) – умовам

$$\forall\{a_j,b_j\}\subset(0;+\infty):\ \lim_{x\to+\infty}(\overline{\Omega}_j(b_jx_j)-\overline{M}_j(a_jx_j))=-\infty, \quad j\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Згідно з теоремами 2.6 – 2.8 вкладення $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}\subset W^{\vec{\Omega}}\bigcap W_{\vec{M}}$ очевидне.

Правильне й обернене твердження.

Теорема 2.10. *Для довільних опуклих неперервно диференційовних вектор-функцій* $\overrightarrow{M}$ *і* $\overrightarrow{\Omega}$ *правильна рівність* $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}} = W_{\vec{M}}\cap W^{\vec{\Omega}}$*.*

Теореми 2.9 – 2.10 належать Готинчан Т.І. й опубліковані у випадку функції однієї змінної у [60].

У праці [71] встановлено такий факт: якщо ціла функція f задовольняє нерівності

$$|f(z)|\le c_1\exp\{b|z|^p\},\ \ |f(x)|\le c_2\exp\{a|x|^h\},\ \ z\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R},$$

де $a\ne 0$, $0<h\le p$, $c_1>0$, $c_2>0$, то існує область G_μ вигляду $|y|\le L(1+|x|)^\mu$, $1-(p-h)\le\mu\le 1$, $L>0$, в якій виконується рівність

$$|f(z)|\le c_3\exp\{a'|x|^h\}, \quad c_3=\max(c_1,c_2);$$

де a' того ж знаку, що і a, причому сталу a' можна вибрати як завгодно близькою до a.

Якщо функції $\overline{M}$ і $\overline{\Omega}$ задовольняють умови: 1) $C_\Omega^1 x^{p-1} < \Omega(x) \leq C_\Omega^{(2)} x^p$, $p \geq 2$, $x \geq 0$, $C_\Omega^{(1)} > 0$, $C_\Omega^{(2)} > 0$; 2) $\Omega(x) \geq M(dx)$, $x \geq 0$, $d > 0$, то має місце твердження [61, 62].

Теорема 2.11. *Якщо ціла функція f задовольняє нерівності*

$$|f(z)| \leq c_1 \exp\{\overline{\Omega}(b|z|)\}, \ \ |f(x)| \leq c_2 \exp\{-\overline{M}(a|x|)\}, \ \ z \in \mathbb{C}, \, x \in \mathbb{R},$$

то існує область

$$G = \{z = x + iy \ \Big| \ |y| \leq L \frac{\overline{M}(x)}{(\overline{\Omega}(x))'_x}, \ \ x \geq x_0 > 0, \, L > 0\},$$

в якій виконується нерівність

$$|f(z)| \leq c_3 \exp\{-\overline{M}(a'|x|)\}, \ \ c_3 = \max(c_1, c_2),$$

причому сталу a' можна вибрати як завгодно близькою до a.

Говоритимемо, що послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+\} \subset \mathbb{R}^n$ задовольняє умову А, якщо для кожного $\nu \in \{1, \ldots, n\}$: 1) $0 < \alpha_{\nu,k_\nu} < \alpha_{\nu,k_\nu+1}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+^n$; 2) $\lim\limits_{k_\nu \to \infty} \alpha_{\nu,k_\nu} = +\infty$; 3) $\exists c_\nu > 0 \ \forall A_\nu > 0 \ \forall k_\nu \in \mathbb{Z}_+$: $\dfrac{\alpha_{\nu,k_\nu+r}}{\alpha_{\nu,k_\nu}} \leq c_\nu A_\nu^{k_\nu}$. Прикладом такої послідовності є послідовність із загальним членом $\alpha_k = \{k_1^{\beta k_1}; \ldots; k_n^{\beta k_n}\}$, $\beta_\nu > 0$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$.

Покладемо

$$W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ \Big| \ \exists c > 0 \, \exists A > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \, \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq c A^{|k|} \Big(\prod_{\nu=1}^n \alpha_{\nu,k_\nu} \Big) e^{-\sum\limits_{\nu=1}^n \overline{\Omega}_\nu(\delta x_\nu)} \};$$

$$W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \ \Big| \ \exists c > 0 \, \exists B > 0 \, \exists b > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+ n \, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}^n :$$

$$|z^k \varphi(z)| \leq c B^{|k|} \Big(\prod_{\nu=1}^n \alpha_{\nu,k_\nu} \Big) \exp\{\sum_{\nu=1}^n \overline{M}_\nu(b y_\nu)\}\}.$$

Через $W^{\{\alpha_k\},A}_{\vec{\Omega},a}$ і $W^{\vec{M},b}_{\{\alpha_k\},B}$ позначимо сукупності усіх тих функцій $\varphi \in W^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}}$ і, відповідно, $\psi \in W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$, для яких правильні нерівності

$$|D^k_x\varphi(x)| \leq c\hat{A}^{|k|}\Big(\prod_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu,k_\nu}\Big)\exp\{-\sum_{\nu=1}^{n}\overline{\Omega}_\nu(\hat{a}x_\nu)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$|z^k\psi(z)| \leq c\check{B}^{|k|}\Big(\prod_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu,k_\nu}\Big)\exp\{\sum_{\nu=1}^{n}\overline{M}_\nu(\check{b}y_\nu)\}, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}^n,$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^n_+$, де $\hat{A} \geq A$, $\hat{a} \leq a$, $\check{B} \geq B$ і $\check{b} \geq b$ – деякі додатні сталі.

Якщо для $\varphi \in W^{\{\alpha_k\},A}_{\vec{\Omega},a}$ та $\psi \in W^{\vec{M},b}_{\{\alpha_k\},B}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ k\in\mathbb{Z}^n_+}}\{|D^k_x\varphi(x)|/((A+\delta)^{|k|}\Big(\prod_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu,k_\nu}\Big)\exp\{-\sum_{\nu=1}^{n}\overline{\Omega}_\nu(a(1-\rho)x_\nu)\})\},$$

$$\|\psi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}^n\\ k\in\mathbb{Z}^n_+}}\{|z^k\psi(z)|/((B+\delta)^{|k|}\Big(\prod_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu,k_\nu}\Big)\exp\{\sum_{\nu=1}^{n}\overline{M}_\nu(b(1+\rho)y_\nu)\})\},$$

$$\{\delta,\rho\} \subset \{1/n; n \geq 2\},$$

то з цими нормами простори $W^{\{\alpha_k\},A}_{\vec{\Omega},a}$ та $W^{\vec{M},b}_{\{\alpha_k\},B}$ є повними, досконалими, зліченно нормованими; $W^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}} = \bigcup\limits_{A,a>0} W^{\{\alpha_k\},A}_{\vec{\Omega},a}$ та $W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}} = \bigcup\limits_{B,b>0} W^{\vec{M},b}_{\{\alpha_k\},B}$. причому послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset W^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}}$ збігається до $\varphi \in W^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}}$ при $\nu \to +\infty$ у цьому просторі (позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{W^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}}} \varphi$) тоді і тільки тоді, коли: а) $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ – правильно збіжна в $\mathbb{R}^n$; б) вона обмежена у $W^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}}$; а $\psi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}} \psi$, де $\{\psi; \psi_\nu, \nu \geq 1\} \subset W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$ лише тоді, коли: а) функції ψ_ν рівномірно збігаються до ψ в кожній обмеженій області комплексної площини; б) $\{\psi_\nu, \nu \geq 1\}$ – обмежена у $W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$ [63].

Очевидно, що для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$, які задовольняють умову A і таких, що

$$\alpha_{\nu,k_\nu} \leq \beta_{\nu,k_\nu}, \quad k_\nu \in \mathbb{Z}_+, \nu = \overline{1,n},$$

правильні наступні вкладення:

$$W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} \subset W_{\vec{\Omega}}^{\{\beta_k\}} \subset W_{\vec{\Omega}} \subset S \subset W'_{\vec{\Omega}} \subset (W_{\vec{\Omega}}^{\{\beta_k\}})' \subset (W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}})',$$

$$W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}} \subset W^{\vec{M}}_{\{\beta_k\}} \subset W^{\vec{M}} \subset S \subset (W^{\vec{M}})' \subset (W^{\vec{M}}_{\{\beta_k\}})' \subset (W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}})',$$

де $W_{\vec{\Omega}}$, $W^{\vec{M}}$, $W^{\vec{M}}_{\vec{\Omega}}$ – простори типу W, побудовані Б.Л. Гуревичем у [74].

Слід зазначити, що в $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ у залежності від $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ можуть міститися не лише цілі функції, як це вимагається для простору $W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$, а $\inf\limits_{k_\nu \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \dfrac{cB^{k_\nu}\alpha_{\nu,k_\nu}}{|z_\nu|^{k_\nu}} \right\}$, не завжди є функцією з властивостями функції $e^{-\overline{\Omega}_\nu(z_\nu)}$, $\nu = \overline{1,n}$, що є обов'язковим для простору $W^{\vec{M}}_{\vec{\Omega}}$. Зауважимо також, що якщо $\overline{M}_\nu(\cdot) = |\cdot|^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а $\alpha_{\nu,k_\nu} = k_\nu^{\beta k_\nu}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta > 0$, то $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} = S_\alpha^\beta$. Отже, $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ і $W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$ є певним узагальненням просторів $W^{\vec{M}}_{\vec{\Omega}}$ й S_α^β. Правильне таке твердження [63].

Теорема 2.12. *Якщо функції $\overline{M}_\nu(\cdot)$ і $\overline{\Omega}_\nu(\cdot)$ взаємодвоїсті за Юнгом, $\nu = \overline{1,n}$, а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову A, то*

$$F[W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}] = W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}, \quad F[W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}] = W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}},$$

причому оператор Фур'є F на цих просторах є неперервним і взаємооднозначним.

Розглянемо приклад. Нехай $n = 1$, $P(x) = 2\frac{(a+x)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a > 1$, $\gamma > 1$, причому a і γ такі, що функція $\overline{\Omega}_1(\cdot) = P(\cdot) - P(0)$ є опуклою на $[0; +\infty)$. Тоді для кожного $\delta > 0$ функція $\theta_\delta(\cdot) = \exp\{-\delta P(\cdot)\}$ належить до простору $W_{\overline{\Omega}_1}^{\{k!\}}$. Більше того, для того, щоб функція $\mu(\cdot)$ була мультиплікатором у просторі $\Phi \in \{W_{\overline{\Omega}_1}; W_{\overline{\Omega}_1}^{\{k^{\beta k}\}}, \beta \geq 1\}$, необхідно і достатньо, щоб для кожного фіксованого δ, $0 < \delta \ll 1$, добуток $\mu(\cdot)\theta_\delta(\cdot)$ належав простору Φ [57].

2.2 Оператор Бесселя дробового диференціювання з додатним параметром

У цьому підрозділі мова йтиме про побудову оберненого оператора до дробового степеня $(aE-\Delta)^{-1/2}$, $a>0$, у просторі S та продовження його на простір узагальнених функцій повільного зростання.

Розглянемо функцію $(a+\xi)^{-\alpha/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $a>0$. Згідно з відомою формулою Бохнера

$$F^{-1}[(a+\xi)^{-\alpha/2}](x)=\frac{a^{\frac{n-\alpha}{4}}K_{(n-\alpha)/2}(a^{1/2}\|x\|)}{(2\pi)^{n/2}2^{(\alpha-2)/2}\Gamma(\alpha/2)\|x\|^{(n-\alpha)/2}},\ \alpha>(n-1)/2, x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Тут $K_\nu(\cdot)$ – функція Макдональда порядку ν, а $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

Покладемо за означенням

$$G_\alpha(a,x):=\frac{a^{\frac{n-\alpha}{4}}K_{(n-\alpha)/2}(a^{1/2}\|x\|)}{(2\pi)^{n/2}2^{(\alpha-2)/2}\Gamma(\alpha/2)\|x\|^{(n-\alpha)/2}},\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Неважко бачити, що функція $G_\alpha(a,\cdot)$ має зміст уже при довільному $\alpha>0$. І оскільки

$$G_\alpha(a,\cdot)|_{a=1}=G_\alpha(\cdot),\quad \alpha>0,$$

де $G_\alpha(\cdot)$ – звичайне Бесселеве ядро (див. праці N.Aronszajn, K.T.Smith, A.P.Calderon, R.Adams), то надалі $G_\alpha(a,\cdot)$ називатимемо Бесселевим ядром з додатним параметром.

Функція $G_\alpha(a,\cdot)$ має такі властивості [65]:

1) $G_\alpha(a,\cdot)\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $a>0$, $\alpha>0$ (тут $L_p(\mathbb{R}^n)$ – простір визначених на $\mathbb{R}^n$ абсолютно сумовних зі степенем p функцій);

2) $F[G_\alpha(a,\xi)](x)=(a+x^2)^{-\alpha/2}$, $a>0$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}^n$;

3) $\forall a>0\ \forall\alpha>0\ \forall\beta>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$: $G_\alpha(a,x)*G_\beta(a,x)=G_{\alpha+\beta}(a,x)$;

4) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^m}G_\alpha(a,\xi)d\xi=a^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$, $a>0$.

Означимо тепер Бесселів потенціал з додатним параметром рівністю

$$G_a^\alpha\varphi=G_\alpha(a,\cdot)*\varphi,\quad \alpha>0, a>0.$$

Виходячи з властивостей $G_\alpha(a,\cdot)$, одержуємо, що

$$G_a^\alpha\varphi\ :\ L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n),\quad 1\le p\le\infty,\alpha>0,a>0,$$

причому

$$\forall\varphi\in L_p(\mathbb{R}^n)\ :\ \|G_\alpha^a\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le a^{-\alpha/2}\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\quad \alpha>0,a>0,$$

тобто G_α^a породжує у $L_p(\mathbb{R}^n)$ обмежений оператор (тут $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ – норма у просторі $L_p(\mathbb{R}^n)$).

Правильне таке твердження [65].

Теорема 2.13. *$\forall\varphi\in L_p(\mathbb{R}^n)$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^m$: $F[G_a^\alpha\varphi](\xi)=(a+\xi^2)^{-\alpha/2}F[\varphi](\xi)$, $a>0$, $\alpha>0$.*

Дане твердження одержується безпосередньо з формули перетворення Фур'є згортки та з властивостей $G_\alpha(a,\cdot)$.

Півгрупова властивість $G_\alpha(a,\cdot)$ породжує відповідну властивість і Бесселевого потенціалу з додатним параметром

$$G_a^\alpha G_a^\beta\varphi=G_a^{\alpha+\beta}\varphi,\quad \alpha>0,\beta>0,a>0,\varphi\in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Прозорою є, особливо на функціях φ з S, така властивість цього потенціалу:

$$(aE-\Delta)^kG_a^\alpha\varphi=G_a^{\alpha-2k}\varphi,\quad \alpha>2k,k\in\mathbb{N},a>0$$

(тут $G_a^0\equiv E$), яка, зокрема, вказує на те, що дробовий степінь оператора $(aE-\Delta)^{1/2}$ слід будувати як обернений оператор до потенціалу G_a^α.

Далі перейдемо до побудови оберненого оператора $T_a^\alpha f$ до Бесселевого потенціалу з додатним параметром: $f=G_a^\alpha\varphi$, $\alpha>0$, $a>0$, де $\varphi\in W$. Зрозуміло, що існування такого оператора, його структура, великою мірою залежать від простору W.

У випадку, коли $W = S$, структура T_a^α описується наступним твердженням [65].

Теорема 2.14.

$$\forall f \in S \,\forall \alpha > 0 \,\forall s > 0: \;\; T_a^\alpha f = F^{-1}\left[(a+\xi^2)^{\alpha/2} F[\varphi]\right]. \tag{2.4}$$

З цієї теореми, врахувавши те, що функція $(a+\|\cdot\|^2)^{\alpha/2}$ є мультиплікатором у просторі $W \in \{S, S_\nu, S_\nu^\beta\}$, $\nu > 0$, $\beta \geq 1$, одержуємо, що

$$T_a^\alpha: \;\; F[W] \to F[W], \quad \alpha > 0, a > 0.$$

Зауважимо, що форма оператора T_a^α, яка описується рівністю (2.4), не придатна для функцій, наприклад, з $L_1(\mathbb{R}^n)$. Отже, є потреба у відшуканні такої форми цього оператора, яка б дозволила продовжити його дію на ширший клас функцій.

Це продовження здійснюється, виходячи з таких міркувань [65]. Оскільки $(a+\|\cdot\|^2)^{\alpha/2}$ – мультиплікатор у W, то згідно з теоремою 2.4, його обернене перетворення Фур'є $\overline{\overline{(a+\|\cdot\|^2)}}^{\alpha/2}$ у сенсі узагальнених функцій є згортувачем у просторі $F[W]$. Тоді з (2.4) випливає, що для $f \in F[W]$, $\alpha > 0$ і $a > 0$

$$T_a^\alpha f = \overline{\overline{(a+\|\cdot\|^2)}}^{\alpha/2} * f,$$

або, що те ж саме,

$$(T_a^\alpha f)(x) = \left\langle \overline{\overline{(a+\|\xi\|^2)}}^{\alpha/2}, f(\xi + x) \right\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Обчислимо згортку у правій частині останньої рівності шляхом продовження потенціалу G_a^α на від'ємні значення α, використовуючи поняття регуляризатора.

Зауважимо, що регуляризацією функції $G_{-\alpha}(a,\cdot)$, $a > 0$, $\alpha > 0$, у просторі $(F[W])'$ називається функціонал $j_a^\alpha \in (F[W])'$, значення якого на всіх функціях $\varphi \in F[W]$, що тотожно дорівнюють нулю в околі початку координат, визначається формулою

$$< j_a^\alpha, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{-\alpha}(a,x)\varphi(x)dx.$$

Шукаючи явний вигляд регуляризатора згідно з ідеєю В.А. Ногіна, яку реалізовано ним при побудові $(E-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$ у просторі S', приходимо до такого твердження [65].

Теорема 2.15. *Нехай $\varphi \in F[W]$, $a > 0$, $\alpha > 0$ і $\alpha \neq 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді для $x \in \mathbb{R}^n$:*

1) $< j_a^\alpha, \varphi >= \sum\limits_{j \in \Lambda_\alpha} c_{\alpha,j}(D^j\varphi)(0) + d_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} \dfrac{[\varphi(x) - (R_x^{[\alpha]}\varphi)(0)]}{\|x\|^{n+\alpha}} \lambda_\partial(a^{1/2}\|x\|)dx;$

2) $(T_a^\alpha\varphi)(x) =< j_a^\alpha, \varphi(\cdot + x) >,$

тобто

$$(T_a^\alpha\varphi)(x) = \sum_{j \in \Lambda_\alpha} c_{\alpha,j}(D^j\varphi)(x) + d_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[\varphi(x+y) - (R_y^{[\alpha]}\varphi)(x)]}{\|y\|^{n+\alpha}} \lambda_\partial(a^{1/2}\|y\|)dy$$

(тут використані такі позначення: $(R_x^{[\beta]}\varphi)(\cdot) = \sum\limits_{|j| \leq [\beta]} \dfrac{x^j}{j!}(D^j\varphi)(\cdot)$, $d_\beta = \dfrac{2^\beta}{x^{n/2}\Gamma(-\beta/2)}$, $\lambda_\partial(a^{1/2}\|x\|) = 2^{1-\frac{n+\beta}{2}}(a^{1/2}\|x\|)^{\frac{n+\beta}{2}} K_{\frac{n+\beta}{2}}(a^{1/2}\|x\|)$, $c_{\beta,j} = \dfrac{d_\beta 2^{-\beta+|j|-1}\Gamma\left(\frac{n+|j|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|j|-\beta}{2}\right)}{j!a^{(1-\beta+|j|)/2}}\omega_j$, $\omega_j = \int\limits_{|\sigma|=1} \sigma^j d\sigma$, Λ_β *– множина мультіндексів з парними компонентами, довжина яких не перевищує* $[\beta]$, $[\cdot]$ *– ціла частина числа).*

З цієї теореми одержуємо, що

$$\forall \varphi \in F[W]:\, T_a^\alpha\varphi = j_a^\alpha * \varphi, \quad a > 0, \alpha > 0, \alpha \neq 2k, k \in \mathbb{N}.$$

Така форма дії оператора T_a^α на функціях $F[W]$ дозволяє, згідно з методом

Л.Шварца, продовжити цей оператор на простір $(F[W])'$ так:

$$\forall f \in (F[W])': \ \check{B}_a^\alpha f = j_a^\alpha * f, \quad a > 0, \alpha > 0, \alpha \neq 2k, k \in \mathbb{N}$$

(тут $\check{B}_a^\alpha$ – продовження T_a^α). Це продовження має сенс, оскільки j_a^α – згортувач у просторі $F[W]$.

Правильне наступне твердження [65].

Теорема 2.16.

$$\forall f \in (F[W])' \forall \varphi \in F[W]: \ \left\langle \check{B}_a^\alpha f, \varphi \right\rangle = \left\langle f, T_a^\alpha \varphi \right\rangle, \quad a > 0, \alpha > 0, \alpha \neq 2k, k \in \mathbb{N}.$$

Далі нехай B_a^α, $a > 0$, $\alpha > 0$ і $\alpha \neq k$, $k \in \mathbb{N}$, – звуження оператора $\check{B}_a^\alpha$ на простір $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тоді [65]:

а) область визначення $D(B_a^\alpha)$ оператора B_a^α щільна в$L_1(\mathbb{R}^n)$, причому $S \subset D(B_a^\alpha)$;

б) B_a^α – замкнений оператор у $L_1(\mathbb{R}^n)$;

в) $\forall \varphi \in S$: $B_a^\alpha \varphi = T_a^\alpha \varphi$.

Урахувавши властивість а), операторм B_a^α називатимемо оператором Бесселя дробового диференціювання з додатним параметром.

2.3 Цілковита розв'язність задачі Коші для рівнянь з коефіцієнтами, залежними тільки від часу

2.3.1 Задача Коші для параболічних за Петровським рівнянь.

Розглянемо рівняння

$$\partial_t u(t,x) = P(t, D_x) u(t,x), \quad (t,x) \in (0; +\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

де $P(t,x) = \sum\limits_{|k| \le 2b} a_k(t) x^k$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $b \in \mathbb{N}$, а $a_k(\cdot)$ – визначені на $(0; +\infty)$, обмежені за модулем, комплекснозначні функції такі, що

$$\exists \rho > 0 \, \forall t > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n: \ \mathrm{Re} \sum_{|k| = 2b} a_k(t) (ix)^k \le -\rho \|x\|^{2b}, \quad i^2 = -1.$$

Якщо для рівняння (2.5) задати початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \widetilde{\Phi}', \tag{2.6}$$

де $\Phi' \in \{S'_\alpha; (S^\beta_\alpha)'\}$, $\alpha = \dfrac{1}{2b}$, $\beta \geq 1 - \dfrac{1}{2b}$, то під розв'язком задачі Коші (2.5), (2.6) розумітимемо гладку функцію u, яка задовольняє рівняння (2.5) у звичайному розумінні, а початкову умову (2.6) у сенсі слабкої збіжності у просторі $\widetilde{\Phi}'$.

Нехай $G_t(x) = F^{-1}[\exp\{\int\limits_0^t P(\tau, ix)d\tau\}]$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. ФР рівняння (2.5), при кожному фіксованому $t > 0$ є елементом простору $S^\alpha_{1-\alpha}$ [53, 54].

Наступне твердження характеризує цілковиту розв'язність задачі Коші (2.5), (2.6) у просторі $\widetilde{\Phi}$ [54].

Теорема 2.17. *Для того, щоб задача Коші (2.5), (2.6) була коректно розв'язною (тобто мала єдиний розвязок, який неперервно залежить від початкових даних) і:*

1) її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t > 0$ належав простору $\widetilde{\Phi}$;

2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t > 0$,

необхідно і досить, щоб f був згортувачем у просторі $\widetilde{\Phi}$. При цьому завжди виконуватиметься рівність

$$u(t,x) = (f * G_t)(x), \quad (t,x) \in (0; +\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Таким чином сукупність усіх згортувачів у просторі $\widetilde{\Phi}$ становить "максимальний клас" початкових даних задачі Коші (2.5), (2.6), які забезпечують не лише існування та єдиність її розв'язку, а й ті самі властивості гладкості і ту саму поведінку при наближенні просторової змінної до нескінченності, що й ФР цієї задачі.

У випадку, коли початкова узагальнена функція f допускає локальну гладкість, то в околі її гладкості відбувається посилення збіжності відповідного розв'язку задачі Коші (2.5), (2.6) до f при $t \to +0$. Правильне таке твердження [54].

Теорема 2.18 (принцип локалізації). *Нехай узагальнена функція f з $\widetilde{\Phi}'$ така, що $F[f]$ – мультиплікатор у Φ. Тоді, якщо f збігається на $Q \subset \mathbb{R}^n$ з l разів неперервно диференційовною на цій множині функцією g, то $D_x^k(f * G_t(x)) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} D_x^k g(x)$ рівномірно щодо x на кожному компакті $\mathbb{K} \subset Q$, де $|k| \in \{0, 1, \dots, |l|\}$.*

Наступне твердження характеризує властивість стабілізації розв'язку задачі Коші (2.5), (2.6) [54].

Теорема 2.13. *Нехай многочлен $P(\cdot, \cdot)$ із рівняння (2.5), задовольняє умову*

$$\exists a(\cdot)\, \exists \rho_2 > 0\, \forall t > 0\, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \, \mathrm{Re} P(t, i\xi) \le -\rho_2 \|\xi\|^{2b} + a(t),$$

причому функція $a(\cdot)$ така, що

$$\exists \hat{a}(\cdot)\, \exists q > 0\, \exists c^* > 0\, \forall t > 0\, \forall t' \in [0; t) : \int\limits_{t'}^{t} a(\tau) d\tau \le c^* t^q + \hat{a}(t').$$

Тоді якщо $F[f]$ – мультиплікатор у $\Psi \in \{S_\alpha; S_\alpha^{\beta'}\}$, де $\beta' \ge 1 - \alpha(1 - \frac{1}{q})$, то відповідний розв'язок задачі Коші (2.5), (2.6) стабілізується до нуля у просторі $\widetilde{\Psi}$ (тобто $u(t, \cdot) \underset{t\to+\infty}{\overset{\widetilde{\Psi}}{\longrightarrow}} 0$).

2.3.2 Задача Коші для параболічних за Ейдельманом рівнянь. Нехай тут $j \in \{1, \dots, n\}$, $b_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_j = \dfrac{1}{2b_j}$, $\beta_j \ge 1 - \alpha_j$, $\Phi \in \{S_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}; S_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{\beta_1,\dots,\beta_n}\}$; $P(t, ix) = \sum\limits_{k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n \le 1} a_k(t)(ix)^k$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, а $a_k(\cdot)$ – визначені на $(0;+\infty)$, обмежені по модулю, комплекснозначні функції такі, що

$$\exists\rho>0\,\forall t>0\,\forall x\in\mathbb{R}^n:\ \mathrm{Re}\left(\sum_{k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n=1} a_k(t)(ix)^k\right)\leq-\rho(x_1^{2b_1}+\dots+x_n^{2b_n}).$$

Тоді для відповідної задачі Коші (2.5), (2.6) справджуються аналоги теорем 2.17 – 2.19 [66, 67].

2.3.3 Задача Коші для параболічних за Шиловим рівнянь.

Розглянемо рівняння (2.5), в якому оператор $P(t,D_x)=\sum\limits_{|k|\leq p}(-i)^{|k|}a_k(t)D_x^k$, $t>0$, $p\geq1$ такий, що рівняння (2.5) є параболічним за Шиловим рівномірно щодо t з показником параболічності h $(0<h\leq p)$, тобто

$$\exists\delta_1>0\,\exists\delta_2>0\,\forall x\in\mathbb{R}^n\,\forall t>0:\ \ \mathrm{Re}\left(\sum_{|k|\leq p}a_k(t)x^k\right)\leq-\delta_1\|x\|^h+\delta_2,$$

а $a_k(t)$ – визначені на $(0;+\infty)$ обмежені за модулем комплекснозначні функції.

У працях [68, 70] наводиться альтернативний метод дослідження ФР $G_t(\cdot)=F^{-1}[\exp\{\int\limits_0^t P(\tau,\xi)d\tau\}](t,\cdot)$, $t>0$ рівняння (2.5), який грунтується на відомій формулі Фаа де Бруно диференціювання складених функцій. Згідно з цим методом доведено, що $G_t(\cdot)\in S_{\frac{p-1}{h}}^{\frac{1}{h}}$ та встановлено коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (2.5) у просторах узагальнених функцій повільного зростання. При цьому одержані результати характеризуються лише порядком p та показником параболічності h.

Для рівняння (2.5) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)\ \xrightarrow[t\to+0]{\left(S_{\frac{p-1}{h}}^{\frac{1}{h}}\right)'}\ f. \tag{2.7}$$

Правильне таке твердження [70].

Теорема 2.20. *Нехай f – дійснозначний функціонал з простору $(S^{1/h}_{p-1/h})'$. Тоді для задачі Коші (2.5), (2.7) існує єдиний диференційовний по t, нескінченно диференційовний по x розв'язок u такий, що:*

1) $F[\partial_t u] = \partial_t F[u]$, $t > 0$;

2) $u(t,x) = (f * G_t)(x)$, $(t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Далі припустимо, що многочлен $P(\cdot,\cdot)$ з рівняння (2.5), крім умови параболічності за Шиловим, задовольняє ще й таку:

$$\exists \delta_1^* > 0 \, \exists \delta_2^* > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall t > 0 : \;\; \mathrm{Re} P(t,x) \geq -\delta_1^* \|x\|^h - \delta_2 \tag{2.8}$$

(наприклад, ця умова виконується для рівномірно щодо t параболічного за Петровським рівняння). У цьому випадку для задачі Коші (2.5), (2.7) можна сформулювати відповідну теорему про її цілковиту розв'язність у просторах типу S [70].

Теорема 15. *Нехай рівняння (2.5) є рівномірно щодо t параболічним за Шиловим, для якого використовується умова (2.8). Тоді для того, щоб задача Коші (2.5), (2.7) була коректно розв'язною і:*

1) її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t > 0$ належав до простору $\Phi \in \{S^{\frac{1}{h}}; S^{\frac{1}{h}}_{\beta}, \beta \geq \frac{p-1}{h}\}$;

2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t > 0$,

необхідно і досить, щоб f був згортувачем у просторі Φ. При цьому завжди виконуватиметься рівність

$$u(t,x) = (f * G_t)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

2.3.4 Задача Коші для рівняння з оператором Бесселя дробового диференціювання. Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x) = (P(t, \hat{B}_a^{\alpha})u)(t,x), \quad (t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

$$u(t,\cdot)|_{t=0}=f,\quad f\in(S^{\alpha}_{\beta})',\ \alpha>0,\beta>0,$$

де $P(t,\hat{B}^{\alpha}_{a})u=\sum\limits_{j=0}^{m}b_j(t)\hat{B}^{\alpha_j}_{a_j}u$, $m\in\mathbb{N}$, $a_j>0$, $\alpha_j>0$, $j\in\{0,1,\dots,m\}$, $\hat{B}^{\alpha}_{a}$ – узагальнений оператор Бесселя дробового диференціювання, побудований у підрозділі 2.2, а $b_j(\cdot)$ – неперервні, визначені на $(0;+\infty)$ обмежені за модулем, комплекснозначні функції. Припускатимемо, що серед α_j, $j=\overline{0,m}$, є лише одне максимальне число, нехай з номером $j=l$. Причому відповідна функція $b_l(\cdot)$ така, що

$$\exists\hat{\delta}>0\,\forall t>0\ :\ \ \mathrm{Re}\,b_l(t)\le-\hat{\delta}.$$

ФР $G_t(\cdot)=F^{-1}[\exp\{\int\limits_0^t P(\tau,(a+\|xi\|^2)^{\frac{\alpha}{2}})d\tau\}](t,\cdot)$ рівняння з (2.9) при кожному фіксованому $t>0$ є елементом простору $S_1^{1/\gamma}$, де $\gamma=\alpha_l$ [55, 56].

Правильні такі твердження [55, 56].

Теорема 2.22. *Якщо f – дійснозначний функціонал з $(S_1^{1/\gamma})'$, то для задачі Коші (2.9) існує єдиний, диференційовний по t, нескінченно диференційовний по x (у звичайному розумінні) розв'язок $u(t,\cdot)\in(S_1^{1/\gamma})'$, $t>0$, який задовольняє рівняння і початкову умову з (2.9) у слабкому розумінні, причому*

$$u(t,x)=(f*G_t)(x),\quad t>0,x\in\mathbb{R}^n.$$

Теорема 2.23. *Для того, щоб задача Коші (2.9) була коректно розв'язною і виконувалися такі умови:*

1) її розв'язок u задовольняє рівняння з (2.9) у звичайному розумінні;

2) $u(t,\cdot)\in\Phi\in\{S^{1/\gamma};S_\beta^{1/\gamma},\beta\ge1\}$ при кожному фіксованому $t>0$;

3) $\partial_tF[u]=F[\partial_tu]$, $t>0$,

необхідно і достатньо, щоб f був згортувачем у просторі Φ. При цьому завжди виконуватиметься рівність $u(t,x)=(f*G_t)(x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Наступні твердження характеризують властивості розв'язку задачі Коші (2.9) [56].

Теорема 2.24 (принцип локалізації). *Нехай f – узагальнена функція з $(S_1^{\frac{1}{\gamma}})'$. Тоді якщо f збігається у області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцію $g(\cdot)$, то відповідний розв'язок u задачі Коші (2.9) збігається до $g(\cdot)$ при $t \to +0$ рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.*

Теорема 2.25 (властивість стабілізації). *Нехай f – згортувач у просторі $\Phi \in \{S^{1/\gamma}; S_\beta^{1/\gamma}, \beta \geq 1\}$, тоді відповідний розв'язок задачі Коші (2.9) стабілізується до нуля у цьому просторі (тобто $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+\infty]{\widetilde{\Phi}} 0$).*

2.3.5 Задача Коші для одного класу рівнянь з псевдо-диференціальним оператором Е.Поста. Говоритимемо, що функція Ω: $(0;+\infty) \to [0;+\infty)$ належить до класу $\mathcal{L}_\alpha$, $\alpha > 0$, якщо:

1) $\Omega(\cdot) \in C^\infty((0;+\infty))$;

2) $\exists c_0 > 0\ \exists c_0' > 0\ \forall x \in (0;+\infty)$: $c_0 x^\alpha \leq \Omega(x) \leq c_0' x^\alpha$;

3) $\exists c_\alpha > 0\ \exists A_\alpha > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in (0;+\infty)$: $|D_x^k \Omega(x)| \leq c_\alpha A_\alpha^k k! x^{\alpha-k}$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_j > 0$, $a_j \geq 0$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$; $\gamma_l = \max\limits_{1\leq j\leq m}\{\gamma_j\}$, $\gamma_s = \min\limits_{1\leq j\leq m}\{\gamma_j\}$, $a_i \neq 0$, $i \in \{l;s\}$, $\gamma \equiv \gamma_l$, $a_0 = \min\{a_s, a_l\}$ і $P(\xi) = \sum\limits_{j=1}^m a_j \xi^{\gamma_j}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Далі, розглянемо функцію $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка розвивається у ряд Тейлора в околі точки $x = 1$, при цьому:

1) $g(x) = \sum\limits_{i=0}^\infty g^{(i)}(2.1)/i!(x-1)^i$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\exists \alpha > 0$: $\sum\limits_{i=0}^\infty |g^{(i)}(2.1)|(2(i+1))^{2(i+1)\alpha} < +\infty$;

3) $\exists c > 0\ \exists \delta > 0\ \exists \beta > 0\ \exists l < \dfrac{2}{\beta}\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|g(x)| \leq ce^{\delta|1-x|^l}$.

Нехай $g(E - D_x^2)$ – оператор узагальненого диференціювання за Е.Постом, породжений диференціальним оператором $E - D_x^2$, що визначається на функціях $f \in S_\alpha^\beta$ за допомогою рівності [75]

$$g(E - D_x^2)f = \lim_{h\to 0} g\left(E - \left(\frac{E-\tau_h}{h}\right)^2\right) f,$$

де

$$g\left(E - \left(\frac{E-\tau_h}{h}\right)^2\right) f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{g^{(k)}(2.1)}{k!} \left(\frac{E-\tau_h}{h}\right)^{2k} f,$$

де τ_h – звичайний оператор зсуву на крок h.

У [76] доведено, що

$$\forall f \in S_\alpha^\beta \, \forall x \in \mathbb{R}: \; (g(E - D_x^2)f)(x) = F^{-1}[g(1+\xi^2)Ff(\xi)](x). \tag{2.10}$$

Рівність (2.10), як і у випадку класичного означення дробового диференціювання, покладемо в основу означення псевдодиференціювання за Е.Постом.

Означення. Оператор $\Omega((aE - D_x^2)^{r/2})$, $r > 0$, $a > 0$, дія якого на функціях f з S визначається рівністю

$$\Omega((aE - D_x^2)^{r/2})f = F^{-1}[\Omega((a+\xi^2)^{r/2})F[f](\xi)], \tag{2.11}$$

називається псевдодиференціальним оператором Поста з символом Ω, породженим оператором Бесселя дробового диференціювання з додатним параметром a, порядку r у просторі S.

Зауважимо, що для того, щоб це означення мало зміст, достатньо вимагати від функції Ω, щоб вона забезпечувала існування правої частини рівності (2.11).

Далі, розглянемо рівняння

$$\partial_t u(t,x) + (\Omega(P((aE - D_x^2)^{1/2}))u)(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

де $\Omega(P((aE - D_x^2)^{1/2}))$ – псевдодиференціальний оператор Поста з символом $\Omega(P)$, породжений псевдодиференціальним оператором Бесселя I-го порядку з додатним параметром a; $\Omega \in \mathcal{L}_\alpha$, $\alpha > 0$.

Для рівняння (2.12) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (S_\alpha^\beta)', \alpha > 0, \beta > 0, \tag{2.13}$$

(в якій збіжність слід розуміти як слабку) і позначимо через $G_t(\cdot)$ – ФР цього рівняння. Відомо [64], що $G_t(\cdot) = F^{-1}[\exp\{-t\Omega(P((a+(\cdot)^2)^{1/2}))\}] \in S_1^{\frac{1}{\alpha\gamma}}$, $t > 0$.

Правильне наступне твердження [64].

Теорема 2.26. *Для того, щоб задача Коші (2.12), (2.13) була коректно розв'язною і :*

1) її розв'язок $u(t,\cdot)$для кожного $t > 0$ належав простору $\Phi \in \{S^\eta; S_\beta^\eta\}$, $\eta = \dfrac{1}{\alpha\gamma}$, $\beta \geq 1$;

2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t > 0$,

необхідно і досить, щоб f був згортувачем у просторі Φ. При цьому завжди виконуватиметься рівність $u(t,x) = (f * G_t)(x)$, $(t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}$.

Приклад. Нехай $a = 1$, $\Omega(\cdot) = (\cdot)^{-1}$ (очевидно, що $\Omega \in \mathcal{L}_\alpha$ при $\alpha = 1$) і $P(\cdot) = (\cdot)^\gamma$, $\gamma > 0$. Тоді оператор $\Omega(P((E - D_x^2))) = (E - D_x^2)^{\gamma/2}$, а рівняння (2.12) набуде вигляду

$$\partial_t u(t,x) + ((E - D_x^2)^{\gamma/2} u)(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Згідно з вищезазначеними результатами, ФР рівняння (2.14) $G_t(\cdot) = F^{-1}[\exp\{-t(1+\xi^2)^{\gamma/2}\}](t,\cdot) \in S_1^{1/\gamma}$ при кожному фіксованому $t > 0$, а задача Коші (2.14), (2.13) цілковито розв'язна в просторі $\Phi \in \{S^{1/\gamma}; S_\beta^{1/\gamma}, \beta \geq 1\}$.

Слід зазначити, що задача Коші (2.14), (2.13) вивчалася В.В. Городецьким і О.М. Ленюком у [77]. Ними були встановлені слабші оцінки її ФР: $G(t,\cdot) \in S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$ (відомо, що $S_1^{1/\gamma} \subset S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$) та доведено лише достатню умову розв'язності цієї задачі (відповідно, у вужчому класі початкових даних, бо $(S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma})' \subset (S_1^{1/\gamma})'$).

2.3.6 Задача Коші для одного псевдодиференціального рівняння інтегрального вигляду. Поширення операції інтегрування та диференціювання на дробові порядки дозволяє розглядати задачу Коші для рівнянь типу рівнянь з молодшими членами, в яких відбувається неперервне підсумовування псевдодиференціальних чи псевдоінтегральних операторів за їх порядками на певних обмежених або напівобмежених проміжках (називатимемо такі рівняння рівняннями інтегрального вигляду).

Розглянемо задачу Коші для одного з таких рівнянь:

$$\partial_t u(t,x) + \int\limits_{-\infty}^{\gamma} ((aE - D_x^2)^{\tau/2} u)(t,x) d\tau = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

де $\gamma > 0$, $a > 0$, причому γ і a такі, що функція $\overline{\Omega}_1(x) = 2\left(\dfrac{(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)} - a^{\gamma/2}/\ln a\right)$ є опуклою.

Нехай $G_t(\cdot) = F^{-1}[\exp\{-2t\dfrac{(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)}\}](t,\cdot)$, $t > 0$. Відомо [70], що при кожному фіксованому $t > 0$ функція $G_t(\cdot)$ є елементом простору $S_1^{\frac{1}{\gamma_1 - \eta}}$ для кожного $0 < \eta < 1$ і такого, що $\eta < \gamma$. Тому для рівняння (2.15) сформулюємо початкову умову так:

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (S_1^\alpha)', \alpha > \frac{1}{\gamma}. \tag{2.16}$$

Правильне таке твердження [69].

Теорема 2.27. *Якщо узагальнена функція f є згортувачем у просторі $\Phi \in \{S^\alpha; S^\alpha_\beta, \alpha > \dfrac{1}{\gamma}, \beta \geq 1\}$, то задача Коші (2.15), (2.16) коректно розв'язна, причому:*

1) її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t > 0$ належить до Φ;

2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t > 0$;

3) $u(t,x) = (f * G_t)(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Зазначимо, що встановлення цілковитої розв'язності задачі Коші (2.15), (2.16) у просторах типу S неможливе, оскільки не існує найвищого простору серед цих просторів, у який потрапляє ФР $G_t(\cdot)$. Виявляється, що для встановлення цілковитої розв'язності задачі Коші для рівняння (2.15) більш природними є простори типу W. Замінимо у початковій умові (2.16) простір $(S_1^{\alpha})'$ на $(F[W_{\overline{\Omega}_1}^{\{k!\}}])'$. Тоді правильне наступне твердження [57].

Теорема 2.28. *Нехай $\overline{M}_1(\cdot)$ – функція, разом з якою $\overline{\Omega}_1(\cdot)$ є взаємодвоїстими за Юнгом. Тоді для того, щоб задача Коші (2.15), (2.16) була коректно розв'язною і:*

1) її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t>0$ належав простору $\Phi \in \{W^{\overline{M}_1}; W^{\overline{M}_1}_{\{k^{\beta k}\}}, \beta \geq 1\}$;

2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t>0$,

необхідно і достатньо, щоб f був згортувачем у просторі Φ. При цьому завжди

$$u(t,x) = (f * G_t)(x), \quad t>0, x \in \mathbb{R}.$$

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ АСИМПТОТИЧНИМИ МЕТОДАМИ ТА МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ

Розділ містить результати застосування асимптотичних методів і методу інтегральних многовидів до дослідження сингулярно збурених диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь.

3.1 Інтегральні многовиди лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь із відхиленням аргументу у швидких та повільних змінних

У цьому підрозділі наведено результати дослідження лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь методом інтегральних многовидів у випадку, коли запізнення аргументу є у швидких та повільних змінних. Результати належать І.М. Черевку та опубліковані в [78 – 81].

Умови існування інтегральних многовидів лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь із малим запізненням вперше одержані А.Халанаєм [82].Тут також досліджено властивості функцій, що визначають інтегральний многовид. Існування стійких інтегральних многовидів, що не обов'язково вироджуються в тривіальні, встановлено в праці [83]. Слід зазначити, що в цих дослідженнях розглядався випадок малого запізнення у швидких змінних та істотно використовувалась лема А. Халаная [84] про оцінку фундаментальної матриці лінійної системи із запізненням.

У праці [85] одержано узагальнення леми А. Халаная [84] на лінійні диференціально-функціональні рівняння, що дозволило поширити метод інтегральних многовидів на сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння [86, 87]. За допомогою інтегральних многовидів швидких і повільних змінних одержано розщеплюючі перетворення для сингулярно збурених лінійних диференціально-функціональних рівнянь [88].

У цьому підрозділі розглядається лінійна сингулярно збурена диференціально-функціональна система із відхиленням аргументу як у швидких, так і повільних змінних. За допомогою центрального і стійкого многовидів ця система зводиться до блочно-трикутного вигляду [79, 80, 89].

3.1.1 Еквівалентна інтегро-диференціальна система. Нехай $\eta_0(\theta)$ — $n \times n$ матриця, елементи якої є функції обмеженої варіації; $\eta_i(t,\theta)$, $i = \overline{1,4}$, — матриці розмірностей відповідно $n \times n$, $n \times m$, $m \times m$, $m \times n$, елементи яких є функціями обмеженої варіації по θ для кожного t і неперервні по t рівномірно відносно θ.

За допомогою матриць $\eta_0(\theta)$, $\eta_i(t,\theta)$, $i = \overline{1,4}$, визначимо лінійні функціонали у вигляді інтегралів Стілт'єса

$$L_0\varphi = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta_0(\theta)]\varphi(\theta), \quad L_i(t)\varphi = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta_i(t,\theta)]\varphi(\theta), \quad i = 1,4,$$

$$L_j(t)\varphi = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta_j(t,\theta)]\varphi(\varepsilon\theta), \quad j = 2,3. \tag{3.1}$$

Розглянемо систему лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = L_0 x_t + L_1(t)x_t + L_2(t)y_t,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = L_3(t)y_t + L_4(t)x_t, \tag{3.2}$$

де $t \in R$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $x_t = x(t+\theta)$, $y_t = y(t+\varepsilon\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Наведемо деякі, необхідні нам надалі, відомості з теорії диференціально-функціональних рівнянь [90 – 92].

Визначимо оператор зсуву вздовж розв'язків автономного рівняння

$$\frac{dx}{dt} = L_0 x_t \tag{3.3}$$

рівністю $T(t)\varphi = x_t(\varphi)$. Сім'я $\{T(t), t \geq 0\}$ утворює сильно неперервну півгрупу, твірний оператор якої визначається співвідношенням

$$A\varphi = \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\theta}, & -\Delta \leq \theta < 0, \\ \\ L_0(\varphi), & \theta = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Спектр оператора A тільки точковий і складається із коренів характеристичного рівняння

$$\det\left(\lambda E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta}[d\eta(\theta)]\right) = 0. \tag{3.5}$$

У будь-якій півплощині $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \gamma$ знаходиться тільки скінченна кількість коренів рівняння (3.5).

Нехай $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ — множина коренів рівняння (3.5), для яких $|\mathrm{Re}\,\lambda| < \alpha$, а всі інші корені лежать у півплощині $\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha$. Позначимо власний підпростір у C, що відповідає кореням із Λ, через P, а доповнювальний до нього підпростір — через Q. Підпростір P є скінченновимірним і його розмірність дорівнює k.

Дамо конструктивний опис підпросторів P і Q.

Розглянемо спряжене до (3.3) рівняння

$$\frac{dy}{dt} = -\int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta^T(\theta)]y(t-\theta), \quad t \leq 0. \tag{3.6}$$

Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$, — базис у P, а $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \le \theta \le \Delta$ — базис у спряженому до P підпросторі розв'язків (3.6) P^*. Для елементів $\varphi \in C[-\Delta, 0], \psi \in C[0, \Delta]$ введемо скалярний добуток

$$(\psi, \varphi) = \psi^T(0)\varphi(0) - \int_{-\Delta}^{0} \int_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi.$$

Відомо [91], що $k \times k$ матриця (Ψ, Φ) невироджена і можна вважати, що $(\Psi, \Phi) = E$. Через B позначимо $l \times l$-матрицю таку, що $A\Phi = \Phi B$. Множина власних значень матриці B збігається із множиною Λ.

Підпростори P і Q тепер визначаються рівностями

$$P = \{\varphi \in C[-\Delta, 0] : \varphi = \Phi(\Psi, \varphi)\}, \quad Q = \{\varphi \in C[-\Delta, 0] : (\Psi, \varphi) = 0\}.$$

Кожний елемент $x_t \in C$ можна зобразити у вигляді

$$x_t = x_t^P + x_t^Q = \Phi u(t) + z_t, \quad u(t) = (\Psi, x_t) \in R^k, \quad z_t \in Q. \tag{3.7}$$

Визначимо матриці

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0, & -\Delta \le \theta < 0, \\ E, & \theta = 0, \end{cases} \qquad Y_0(\theta) = \begin{cases} 0, & -\varepsilon\Delta \le \theta < 0, \\ E, & \theta = 0, \end{cases}$$

і оператор $V(t, \sigma)$ зсуву вздовж розв'язків рівняння

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = L_3(t) y_t. \tag{3.8}$$

Для проекцій $X_0(\theta)$ на підпростори P і Q маємо рівності

$$X_0^P = \Phi\Psi^T(0), \quad X_0^Q = X_0 - X_0^P = X_0 - \Phi\Psi^T(0).$$

Здійснюючи в системі (3.2) заміну змінних (3.7) та використовуючи формулу варіації сталих [90], одержимо еквівалентну інтегро-диференціальну систему

$$\frac{du}{dt} = Bu(t) + \Psi^T(0)[L_1(t)(\Phi u(t) + z_t) + L_2(t) y_t],$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q[L_1(s)(\Phi u(s)+z_s)+L_2(s)y_s]ds,$$

$$y_t = V(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t V(t,s)Y_0L_4(s)(\Phi u(s)+z_s)ds. \tag{3.9}$$

Інтеграли в (3.9) для кожного θ розуміємо як інтеграли в евклідових просторах R^n і R^m.

Припустимо, що всі корені характеристичного рівняння для (3.8)

$$\det\left(\lambda E - \int\limits_{-\Delta}^0 e^{\lambda\theta}[d\eta_3(t,\theta)]\right) = 0$$

лежать у лівій півплощині $\mathrm{Re}\,\lambda \le -2\mu < 0$.

Із цієї умови та способу розбиття коренів рівняння (3.5) випливають оцінки [90, 91]

$$|e^{Bt}| \le K_1 e^{(\alpha-\beta)|t|}, \quad t \in R,$$

$$|T(t)\varphi^P| \le K_2 e^{(-\alpha+\beta)t}|\varphi^P|, \quad t \le 0,$$

$$|T(t)\varphi^Q| \le K_2 e^{-(\alpha+\beta)t}|\varphi^Q|, \quad t \ge 0,$$

$$|V(t,\sigma)\xi| \le K_3 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}|\xi|, \quad t \ge \sigma, \tag{3.10}$$

де $K_1, K_2, K_3 > 0$, $\alpha > \beta > 0$, $\varphi \in C[-\Delta, 0]$, $\xi \in C[-\varepsilon\Delta, 0]$.

3.1.2 Існування центрального многовиду.

Означення. *Множину точок $M \subset R \times R^k \times Q \times C[-\varepsilon\Delta, 0]$ називатимемо інтегральним многовидом системи (3.9), якщо для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і будь-якої точки $(t_0, u_0, z_{t_0}, y_{t_0}) \in M$ випливає, що $(t, u(t), z_t, y_t) \in M$ для всіх $t \in R$, де $(u(t), z_t, y_t)$ – розв'язок системи (3.9) з початковими умовами $(t_0, u_0, z_{t_0}, y_{t_0})$.*

Теорема 3.1. *Нехай справджуються оцінки (3.10) і нерівності*

$$|L_i(t)\varphi| \le \nu|\varphi|, \quad i = 1, 2, 4, \quad \nu > 0.$$

Тоді для достатньо малих ε, ν *система (3.9) має центральний многовид*

$$M^* = \{(t, u, z_t, y_t) : t \in R, u \in R^k, z_t = H_t u, \quad y_t = h_t u\},$$

де $H_t : R^k \to Q$, $h_t : R^k \to C[-\varepsilon\Delta, 0]$ *— лінійні обмежені оператори.*

Доведення цієї теореми нескладно одержати за схемою [83], використовуючи ітераційний процес

$$H_t^0 = 0, \quad H_t^{i+1} = \int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s) X_0^Q [L_1(s)(\Phi + H_s^i) + L_2(s) h_s^i] U_i(s,t) ds,$$

$$h_t^0 = 0, \quad h_t^{i+1} = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} V(t,s) Y_0 L_4(s)(\Phi + H_s^i) U_i(s,t) ds, \quad i = 0, 1, ..., \quad (3.11)$$

де $U_i(t,s)$ — фундаментальна матриця рівняння

$$\frac{du}{dt} = [B + \Psi^T(0)(L_1(t)(\Phi + H_t^i) + L_2(t) h_t^i)] u(t). \quad (3.12)$$

Одержимо диференціальні рівняння для функцій H_t, h_t. Введемо позначення: W — множина всіх неперервно диференційовних функцій $\varphi \in C[-\varepsilon\Delta, 0]$; E_1 — множина функцій $H_t : R^k \to C[-\Delta, 0]$, E_2 — множина функцій $h_t : R^k \to C[-\varepsilon\Delta, 0]$, які неперервно диференційовні по t, θ. Для $\varphi \in W$ визначимо оператор

$$D(\varepsilon)\varphi = \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\theta}, & -\varepsilon\Delta \le \theta < 0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon} L_3(t)\varphi, & \theta = 0. \end{cases}$$

Розглянемо систему рівнянь для функцій $H_t \in E_1$, $h_t \in E_2$

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} u + H_t [B + \Psi^T(0)(L_1(t)(\Phi + H_t) + L_2(t) h_t)] u =$$

$$= A(H_t u) + X_0^Q[L_1(t)(\Phi + H_t) + L_2(t)h_t]u, \quad \theta \in [-\Delta, 0],$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial t}u + h_t[B + \Psi^T(0)(L_1(t)(\Phi + H_t) + L_2(t)h_t)]u =$$

$$= D(\varepsilon)(h_t u) + \frac{1}{\varepsilon}Y_0 L_4(t)(\Phi + H_t)u, \quad \theta \in [-\varepsilon\Delta, 0], \tag{3.13}$$

де u — розв'язок задачі Коші

$$\frac{du}{dt} = [B + \Psi^T(0)(L_1(t)(\Phi + H_t) + L_2(t)h_t)]u(t),$$

$$u(\sigma) = u_0. \tag{3.14}$$

Нехай u — розв'язок задачі Коші (3.14). Тоді функції $z_t = H_t u$, $y_t = h_t u$ — розв'язки другого і третього рівняння системи (3.9)

$$H_t u(t) = T(t-\sigma)H_\sigma u_0 + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q[L_1(s)(\Phi + H_s)+$$

$$+L_2(s)h_s]u(s)ds, \quad \theta \in [-\Delta, 0],$$

$$h_t u(t) = V(t,\sigma)h_\sigma u_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t V(t,s)Y_0 L_4(s)(\Phi + H_s)u(s)ds,$$

$$\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]. \tag{3.15}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи (3.15) справа по t при $t = \sigma$ для фіксованого $\theta \in [-\Delta, 0]$. Для похідної лівої частини маємо рівність

$$\frac{d}{dt}[H_t u(t)]\bigg|_{t=\sigma} = \frac{\partial H_\sigma}{\partial t}u_0 + H_\sigma[B + \Psi^T(0)(L_1(\sigma)(\Phi + H_\sigma) + L_2(\sigma)h_\sigma)]u_0. \tag{3.16}$$

Позначимо через $X(t)$ ФМР рівняння (3.3), що задовольняє початкову умову $X(t) = X_0(t), t \in [-\Delta, 0]$. Скориставшись рівністю $T(t)X_0 = X(t+\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, дістаємо, що функція $T(t)X_0^Q = T(t)[X_0 - \Phi\Psi^T(0)]$ є неперервною для $t \geq 0$. Тоді одержуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_\sigma^{\sigma+t} T(t+\sigma-s)X_0^Q[L_1(s)(\Phi + H_s) + L_2(s)h_s]u(s)ds =$$

$$= X_0^Q[L_1(\sigma)(\Phi + H_\sigma) + L_2(\sigma)h_\sigma]u_0. \tag{3.17}$$

На підставі визначення оператора $T(t)$ для правої похідної першого доданка в правій частині рівняння дістанемо

$$\frac{d}{dt}[T(t-\sigma)H_\sigma u_0]\bigg|_{t=\sigma} = A(H_\sigma u_0). \tag{3.18}$$

Із рівностей (3.16)—(3.18) випливає, що функції $H_t u$, $h_t u$ для $t = \sigma$, $u = u_0$ і всіх $\theta \in [-\Delta, 0]$ задовольняють перше рівняння системи (3.15). Аналогічно доводиться, що ці функції задовольняють для всіх $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$ друге рівняння системи (3.15).

Навпаки, нехай пара функцій (H_t, h_t) — розв'язок системи (3.13). Потрібно показати, що функції $H_t u$, $h_t u$ задовольняють друге і третє рівняння системи (3.9).

Розглянемо рівність

$$\Omega = H_t u - T(t-\sigma)H_\sigma u_0 - \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q[L_1(s)(\Phi + H_s) + L_2(s)h_s]u(s)ds. \tag{3.19}$$

Якщо $\varphi : [\sigma, \infty) \to C[-\Delta, 0]$ — неперервно диференційовне відображення, тоді для $t \geq \sigma$, $\theta \in [-\Delta, 0]$ справджується рівність

$$\varphi(t) - T(t-\sigma)\varphi(\sigma) = \int_\sigma^t T(t-s)\left[\frac{d\varphi(s)}{ds} - A\varphi(s)\right]ds. \tag{3.20}$$

Використовуючи формулу (3.20), із $\varphi(t) = H_t u(t)$ перепишемо рівність (3.19) у вигляді

$$\Omega = \int_\sigma^t T(t-s)\Bigg[\frac{d}{ds}(H_\sigma u(s)) - A(H_s u(s)) -$$

$$-X_0^Q(L_1(s)(\Phi + H_s) + L_2(s)h_s)u(s)\Bigg]ds.$$

Враховуючи перше рівняння системи (3.13), дістаємо, що $\Omega = 0$. Значить, функції $H_t u$, $h_t u$ задовольняють друге рівняння системи (3.9). Аналогічно доводиться, що ці функції задовольняють третє рівняння системи (3.9). Із наведених вище міркувань дістаємо таке твердження.

Теорема 3.2. *Функції H_t, h_t описують центральний многовид системи (3.9) тоді і тільки тоді, коли $H_t \in E_1$, $h_t \in E_2$, і задовольняють для всіх $t \in R$, $u_0 \in R^k$ систему (3.13).*

3.1.3 Принцип зведення. Здійснимо в системі (3.9) заміну змінних

$$\bar{z}_t = z_t - H_t u, \quad \bar{y}_t = y_t - h_t u. \tag{3.21}$$

Користуючись формулами

$$H_t u - T(t-\sigma)H_\sigma u_0 = \int\limits_\sigma^t T(t-s)\left[\frac{d}{ds}(H_s u(s)) - A(H_s u(s))\right] ds,$$

$$h_t u - V(t,\sigma)h_\sigma u_0 = \int\limits_\sigma^t V(t,s)\left[\frac{d}{ds}(h_s u(s)) - D(\varepsilon)(h_s u(s))\right] ds$$

і враховуючи рівняння (3.13), для нових змінних одержимо систему

$$\frac{du}{dt} = [B + \Psi^T(0)(L_1(t)H_t + L_2(t)h_t)]u(t) + \Psi^T(0)[L_1(t)\bar{z}_t + L_2(t)\bar{y}_t],$$

$$\bar{z}_t = T(t-\sigma)\bar{z}_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)[(X_0^Q - H_\sigma\Psi^T(0))(L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s)]ds,$$

$$\bar{y}_t = V(t,\sigma)\bar{y}_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t V(t,s)[Y_0 L_4(s)\bar{z}_s - \varepsilon h_s \Psi^T(0)(L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s)]ds. \tag{3.22}$$

Теорема 3.3. *Нехай справджуються оцінки (3.10) і умови теореми 3.1. Тоді для достатньо малих ε, ν існує стійкий многовид системи (3.22)*

$$u(t) = G(t, \bar{z}_t, \bar{y}_t), \tag{3.23}$$

де $G : R \times Q \times C[-\varepsilon\Delta, 0] \to R^l$ *— лінійний обмежений оператор.*

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$u(t) = -\int_t^{\infty} U(t,s)\Psi^T(0)[L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s]ds,$$

$$\bar{z}_t = T(t-\sigma)\bar{z}_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)[(X_0^Q - H_s\Psi^T(0))(L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s)]ds,$$

$$\bar{y}_t = V(t,\sigma)\bar{y}_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t V(t,s)[Y_0L_4(s)\bar{z}_s - \varepsilon h_s\Psi^T(0)(L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s)]ds. \quad (3.24)$$

Враховуючи рівномірну обмеженість операторів H_t, h_t та нерівності (3.10), дістаємо для розв'язків другого та третього рівняння системи (3.24) оцінки

$$|\bar{z}_t| \le K_2e^{-(\alpha+\beta)(t-\sigma)}|\bar{z}_\sigma| + \int_\sigma^t K_2e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}\nu(1+m_0K_4)(|\bar{z}_s| + |\bar{y}_s|)ds,$$

$$|\bar{y}_t| \le K_3e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}|\bar{y}_\sigma| + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t K_3e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}\nu(1+\varepsilon m_0K_4)(|\bar{z}_s| + |\bar{y}_s|)ds. \quad (3.25)$$

Додаючи нерівності (3.25), при $\varepsilon < \dfrac{\mu}{\alpha+\beta}$ маємо

$$|\bar{z}_t|+|\bar{y}_t| \le K_5e^{-(\alpha+\beta)(t-\sigma)}(|\bar{z}_\sigma|+|\bar{y}_\sigma|)+K_3\nu(1+m_0K_4)\int_\sigma^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}(|\bar{z}_s|+|\bar{y}_s|)ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}K_5\nu(1+\varepsilon m_0K_4)\int_\sigma^t e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}(|\bar{z}_s| + |\bar{y}_s|)ds,$$

де $K_5 = \max\{K_2, K_3\}$.

Розв'язуючи останню нерівність за допомогою нерівності Гронуолла-Белмана при $\varepsilon < \dfrac{\mu}{2(\alpha+\beta)}$ і

$$\nu < \min\left\{\frac{\beta}{2K_5(1+m_0K_4)}, \frac{\mu}{2K_5(1+\varepsilon m_0K_4)}\right\},$$

одержуємо

$$|\bar{z}_t| + |\bar{y}_t| \le K_6 e^{-(\alpha+\frac{\beta}{2})(t-\sigma)}(|\bar{z}_\sigma| + |\bar{y}_\sigma|), \quad t \ge \sigma, \tag{3.26}$$

де $K_6 = K_5 e$.

Дослідимо збіжність інтеграла в правій частині першого рівняння системи (3.24). За допомогою нерівності Гронуолла та оцінок (3.26) одержуємо

$$\left| \int\limits_t^\infty U(t,s)\Psi^T(0)[L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s]ds \right| \le$$

$$\le K_1 \int\limits_t^\infty e^{(\alpha-\frac{\beta}{2})(s-t)} \nu K_6 e^{(\alpha+\frac{\beta}{2})(s-\sigma)} ds =$$

$$= \frac{K_1 K_6 \nu}{\beta} e^{-(\alpha+\frac{\beta}{2})(t-\sigma)}(|\bar{z}_\sigma| + |\bar{y}_\sigma|), \quad t \ge \sigma. \tag{3.27}$$

Отже, існує єдиний розв'язок $(u(t), z_t, y_t)$ системи інтегральних рівнянь (3.24). Покладаючи в (3.24) $t = \sigma$, дістанемо зображення стійкого інтегрального многовиду

$$u = G(\sigma, \bar{z}_\sigma, \bar{y}_\sigma) = -\int\limits_\sigma^\infty U(\sigma,s)\Psi^T(0)[L_1(s)\bar{z}_s(\sigma,\bar{z}_\sigma) + L_2(s)\bar{y}_s(\sigma,\bar{y}_\sigma)]ds, \tag{3.28}$$

де $\bar{z}_t(\sigma, \bar{z}_\sigma)$, $\bar{y}_t(\sigma, \bar{y}_\sigma)$ — функції, що задовольняють друге і третє рівняння системи (3.24). Теорема 3.3 доведена.

Зауваження 3.1. Із нерівностей (3.26), (3.27) випливає, що для будь-якого розв'язку $(u(t), \bar{z}_t, \bar{y}_t)$, який лежить на стійкому інтегральному многовиді (3.23), існують сталі $M > 0$, $\alpha > \beta > 0$ такі, що справджується оцінка

$$|u(t)| + |z_t| + |y_t| \le M e^{-(\alpha+\frac{\beta}{2})(t-\sigma)}(|z_\sigma| + |y_\sigma|), \quad t \ge \sigma. \tag{3.29}$$

Здійснимо в (3.22) заміну змінних

$$\bar{u} = u - G(t, \bar{z}_t, \bar{y}_t). \tag{3.30}$$

Одержимо систему рівнянь

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = [B + \Psi^T(0)(L_1(t)H_t + L_2(t)h_t)]\bar{u}(t),$$

$$\bar{z}_t = T(t-\sigma)\bar{z}_\sigma + \int\limits_0^t T(t-s)[(X_0^Q - H_\sigma\Psi^T(0))(L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s)]ds,$$

$$\bar{y}_t = V(t,\sigma)\bar{y}_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t V(t,s)[Y_0L_4(s)\bar{z}_s - \varepsilon h_s\Psi^T(0)(L_1(s)\bar{z}_s + L_2(s)\bar{y}_s)]ds. \quad (3.31)$$

Система (3.30) складається із звичайного диференціального рівняння на центральному многовиді та інтегральних рівнянь на стійкому многовиді. Зв'язок між системами (3.9) та (3.31) встановлюють співвідношення

$$u = \bar{u} + G(t, \bar{z}_t, \bar{y}_t), \quad z_t = \bar{z}_t + H_t u, \quad y_t = \bar{y}_t + h_t u, \qquad (3.32)$$

де $(u(t), z_t, y_t)$ — розв'язок системи (3.9) з початковими умовами $(\sigma, u_0, z_\sigma, y_\sigma)$, а $(\bar{u}(t), \bar{z}_t, \bar{y}_t)$ — розв'язок системи (3.31) з початковими умовами

$$\bar{u}_0 = u_0 - G(\sigma, z_\sigma - H_\sigma u_0, y_\sigma - h_\sigma u_0),$$

$$\bar{z}_\sigma = z_\sigma - H_\sigma u_0,$$

$$\bar{y}_\sigma = y_\sigma - h_\sigma u_0.$$

Функції $(G(t, \bar{z}_t, \bar{y}_t), \bar{z}_t, \bar{y}_t)$ описують розв'язок системи (3.22) на стійкому інтегральному многовиді і для нього справджується оцінка (3.30). Тоді із співвідношень (3.32) одержуємо принцип зведення для системи (3.9).

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови теореми 3.1. Тоді для достатньо малих ε, ν за допомогою заміни (3.32) система рівнянь (3.9) зводиться до вигляду (3.31). Нульовий розв'язок системи (3.9) стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) тоді і тільки тоді, коли стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) нульовий розв'язок рівняння*

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = [B + \Psi^T(0)(L_1(t)H_t + L_2(t)h_t)]\bar{u}(t) \qquad (3.33)$$

на центральному многовиді.

Теорема 3.4 дозволяє звести дослідження стійкості вихідної сингулярно збуреної диференціально-функціональної системи (3.9) до аналізу системи звичайних диференціальних рівнянь (3.33), яка є регулярною і не містить відхилення аргументу.

3.2 Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

У цьому підрозділі побудовано інтегральний многовид системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь, одержано друге наближення в методі усереднення для системи в стандартній формі та досліджено стійкість системи слабко зв'язаних осциляторів. Результати одержані І.І. Клевчуком і опубліковані в [93 – 104].

Важливою задачею в теорії нелінійних диференціально-функціональних рівнянь є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків. Для системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь одержано наближене зображення інтегрального многовиду. Це зображення застосовується до дослідження умов існування гомоклінічних точок [100, 105], а також для знаходження розв'язку задачі квазіоптимальної стабілізації лінійних керованих систем [97, 101, 104]. Проведено розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням [94]. Друге наближення в методі усереднення застосовується до вивчення стійкості системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням [95, 96, 102, 103]. Досліджена біфуркація розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними [93]. Крайові задачі для гіперболічної системи зведено до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь [98]. Досліджено відображення з абсолютно неперервною інваріантною мірою [99].

3.2.1 Побудова інтегральних многовидів. Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \qquad (3.34)$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbf{R^m}$, $y \in \mathbf{R^n}$.

Припустимо, що виконуються умови

1) для всіх $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R^m}$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні за t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені;

2) функції $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні за t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R^m}$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ в точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y + B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ правильна нерівність

$$|G_1(t, x, y, z)| \le K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0.$$

Нехай виконується умова

3) всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(t, x) + B_2(t, x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [106], а для сингулярно збурених – в

[107] та ін. Згідно з [107], при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (16), що може бути поданий у вигляді $y_t = \varphi(t,x)+\xi(t,x,\varepsilon)$, де $\xi(t,x,0) = 0$. У праці [108] одержано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. В [95] одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи більш загального вигляду, ніж в [105, 108].

Теорема 3.5. *Нехай для системи (3.34) виконуються умови 1 – 3. Тоді інтегральний многовид системи (3.34) можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(t,x) + g(t,x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(t,x) + B_2(t,x)]^{-1}[(E + \Delta B_2(t,x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))) - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))] + \theta[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))], \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Доведення цієї теореми наведено в [95].

Позначимо

$$\eta(t,x) = \frac{1}{\varepsilon}g(t,x,\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta} = [B_1(t,x) + B_2(t,x)]^{-1}[(E - \Delta B_1(t,x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\times$$

$$\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))) - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))].$$

Тоді рівняння на многовиді системи (3.34) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\varphi(t,x) + \varepsilon\psi(t,x),\varphi(t,x)+$$

$$+\varepsilon\eta(t,x)) + \varepsilon h(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + O(\varepsilon^2).$$

3.2.2 Застосування методу усереднення до дослідження стійкості системи слабко зв'язаних осциляторів. Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x,x(t-\Delta)), \qquad (3.35)$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbf{R^n}$, функція $X(t,x,y)$ тричі неперервно диференційовна за всіма змінними.

Нехай

$$X(t,x,x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x).$$

Тоді усереднена система для (3.35) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x),$$

де $X_0(x)$ – середнє значення функції $X(t,x,x)$, $X_0(x) = M\{X(t,x,x)\}$. У статті Хейла [20] доведено узагальнення другої теореми Боголюбова про усереднення для системи вигляду (3.35). Побудуємо друге наближення в методі усереднення для системи (3.35) і застосуємо його до дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

У системі (3.35) зробимо заміну $x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi)$, де

$$\tilde{X}(t,\xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \tilde{X}(t,x)}{\partial t} = X(t,x,x) - X_0(x),$$

одержимо систему

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi,\xi) - \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta)+$$

$$+\varepsilon \tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-\Delta))). \tag{3.36}$$

Оскільки згідно з [109]

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + O(\varepsilon^2),$$

то

$$\xi(t-\Delta) = \xi(t) - \Delta \frac{d\xi}{dt} + O(\varepsilon^2) = \xi(t) - \varepsilon \Delta X_0(\xi) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$X(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi),\xi(t-\Delta)+\varepsilon\tilde{X}(t-\Delta,\xi(t-\Delta)))=X(t,\xi,\xi)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}\tilde{X}(t,\xi)+\varepsilon\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}[\tilde{X}(t-\Delta,\xi)-\Delta X_0(\xi)]+O(\varepsilon^2).$$

Отже, система (3.36) набуде вигляду

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)-\varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi)+\varepsilon^2\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}\tilde{X}(t,\xi)+$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}[\tilde{X}(t-\Delta,\xi)-\Delta X_0(\xi)]+O(\varepsilon^3). \tag{3.37}$$

Ми одержали систему звичайних диференціальних рівнянь, яка апроксимує систему (3.36) із точністю до $O(\varepsilon^3)$. Тому згідно з [110, 111], рівняння другого наближення в методі усереднення для системи (3.37) набудуть вигляду

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2M\{\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}\tilde{X}(t,\xi)+\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}[\tilde{X}(t-\Delta,\xi)-\Delta X_0(\xi)]\}.$$

Розглянемо систему слабко зв'язаних осциляторів із запізненням

$$y''+L^2y+\varepsilon P(t)y(t-h)=0, \tag{3.38}$$

де ε – малий додатний параметр, $y=(y_1,...,y_q)^T$, $L^2=diag\{\lambda_1^2,...,\lambda_q^2\}$, $\lambda_s>0$, $\lambda_k\neq\lambda_s$, $k\neq s$, $h>0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t)=\sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_mt}+\bar{b}_{jsm}e^{-ia_mt}),\quad b_{jsm}\in\mathbb{C},\quad a_m\geq 0. \tag{3.39}$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалася у [112, 113] та ін. Далі використаємо методику цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (3.38) в термінах її коефіцієнтів.

Систему (3.38) перепишемо у вигляді

$$y_j''=-\lambda_j^2y_j-\varepsilon\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)y_s(t-h).$$

Позначимо $z_j = y'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y'_j = \lambda_j z_j, \quad z'_j = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + i z_j$, тоді

$$u'_j = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h) + \bar{u}_s(t-h)).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h) + \varepsilon G(t) \bar{x}(t-h), \tag{3.40}$$

де $x = (x_1, ..., x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h}, G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h} \tag{3.41}$$

відповідно.

Підставляючи (3.39) у (3.41), одержимо

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}),$$

$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{-i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t}).$$

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 3.6. *Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$ при $|j - s| + |m - 1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (3.38) асимптотично стійкий, якщо $c_j sin(\lambda_j h) < 0$ при $j = 1, ..., q$, і нестійкий, якщо $c_j sin(\lambda_j h) \neq 0$ для всіх j, та існує k, для якого $c_k sin(\lambda_k h) > 0$.*

Доведення цієї теореми випливає із теореми Хейла [109] і наведено в [95].

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість.

Позначимо $d_s = Re\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}|b_{skm}|^2(\frac{sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+\frac{sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}). \quad (3.42)$$

Теорема 3.7. *Нехай $a_m > 0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j-s| + |m-k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок системи (3.38) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s = 1, ..., q$ і нестійкий, якщо $d_s \neq 0$ для всіх s та існує k, для якого $d_k < 0$.*

Доведення цієї теореми наведено в [95]. Для доведення використовується друге наближення в методі усереднення. У системі (3.40) виконується заміна $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}(t)$, де $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{G}(t)$ – матриці з елементами

$$\tilde{F}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)}e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} +$$

$$+\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)}e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}), \tilde{G}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{-i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)}\times$$

$$\times e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)}e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t}).$$

Тоді одержимо систему

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\times$$

$$\times \bar{\bar{F}}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\bar{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3). \tag{3.43}$$

Для доведення теореми 3.7 досить використати метод усереднення для системи (3.43).

3.3 Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів для систем диференціально-різницевих рівнянь

У цьому підрозділі досліджено алгоритм знаходження неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів для диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів, що базується на апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь. Результати одержані Л.А. Піддубною та І.М. Черевком і опубліковані в [114].

Розміщення коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь має важливе значення при дослідженні стійкості та осциляції розв'язків, у задачах стабілізації й керування. Систематичному вивченню властивостей квазіполіномів присвячено праці [115, 116] та інші. При цьому для коренів з великими модулями (асимптотичні корені) побудовані ефективні асимптотичні формули.

Основний вплив на динамічні властивості квазіполіномів мають його неасимптотичні корені. Зокрема, якщо всі корені квазіполінома лежать у лівій півплощині, то це є необхідною й достатньою (за винятком виключних випадків) умовою асимптотичної стійкості нульового розв'язку відповідного диференціально-різницевого рівняння.

Для знаходження коренів многочленів розроблено багато універсальних алгоритмів, що включені в базове програмне забезпечення сучасних ЕОМ. Однак, для знаходження коренів квазіполіномів немає ефективних обчислювальних алгоритмів. Обчислення коренів квазіполіномів з великими модулями, що розміщені вздовж деяких кривих, можна здійснити за допомогою асимптотичних формул, які виписуються безпосередньо через коефіцієнти квазіполінома.

У працях [117, 118] побудовані алгоритми знаходження неасимптотичних коренів скалярних квазіполіномів, в яких використовується схема апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [119, 120] системою звичайних диференціальних рівнянь. У даному підрозділі цей підхід використовується для наближення неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів для диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів.

Відзначимо, що випадок диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого типу розглядався в праці [121].

3.3.1 Апроксимація квазіполіномів для систем із запізненням. Розглянемо диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{3.44}$$

де A, B - сталі $n \times n$ матриці, $x \in R^n$, $\tau > 0$.

Квазіполіном рівняння (3.44) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda E + Be^{-\lambda\tau}). \tag{3.45}$$

Поставимо у відповідність рівнянню (3.44) за схемою Красовського [119] систему звичайних матричних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_0' &= Ay_0 + By_m, \\ y_j' &= \mu(y_{j-1} - y_j), j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Характеристичне рівняння цієї системи має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A-\lambda E & 0 & \dots & 0 \\ \mu E & -(\mu+\lambda)E & \dots & 0 \\ 0 & \mu E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -(\mu+\lambda)E \end{pmatrix} = 0. \qquad (3.47)$$

Елементи визначника (3.47) є квадратні $n \times n$ матриці.

Враховуючи структуру визначника (3.47), для його обчислення можна одержати зручну формулу.

Лема 3.1. *Для визначника (3.47) правильне співвідношення*

$$\Psi_m(\lambda) = \det\left(A - \lambda E + \frac{\mu^m}{(\mu+\lambda)^m}B\right)(\mu+\lambda)^{mn}. \qquad (3.48)$$

Покажемо тепер, що функція

$$\overline{\Psi}_m(\lambda) = \det\left(A - \lambda E + \frac{\mu^m}{(\mu+\lambda)^m}B\right) \qquad (3.49)$$

апроксимує квазіполіном (3.45) при $m \to \infty$. Враховуючи позначення $\mu = \frac{m}{\tau}$, та переходячи до границі при $m \to \infty$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\Psi}_m(\lambda) = \det\left(A - \lambda E + Be^{-\lambda\tau}\right).$$

Отже, функція $\overline{\Psi}_m(\lambda)$, визначена рівністю (3.49), апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (3.45). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження коренів квазіполінома (3.45).

Оскільки нулі функцій $\overline{\Psi}_m(\lambda)$ і $\Psi_m(\lambda)$ збігаються, то нулі характеристичного многочлена $\Psi_m(\lambda)$ можна взяти за наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (3.45).

3.3.2 Система диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Розглянемо лінійне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу

$$(x(t) - Cx(t-\tau))' = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{3.50}$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau,\, 0], \tag{3.51}$$

де A, B, C - сталі $n \times n$ матриці, $x \in R^n$, $\tau > 0$, $\varphi(t)$ – абсолютно неперервна на $[-\tau, 0]$ функція.

Визначимо функції

$$y_j\,(t) = \begin{pmatrix} y_{1j}(t) \\ y_{2j}(t) \\ \vdots \\ y_{nj}(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0, m}, \;\; m \in N,$$

як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & y_0' = Ay_0 + \mu C y_{m-1} + (B - \mu C) y_m, \\ & y_j' = \mu(y_{j-1} - y_j), \\ & \mu = \frac{m}{\tau}, \quad j = 1, ..., m\;, \quad m \in N, \end{aligned} \tag{3.52}$$

з початковими умовами

$$y_j(0) = \varphi(-\frac{j\tau}{m}),\; j = \overline{0, m}. \tag{3.53}$$

Наближена заміна рівняння (3.50) системою звичайних диференціальних рівнянь (3.52) досліджувалась у працях [122, 123]. Зокрема, якщо власні значення матриці C лежать в одиничному крузі, тоді задача Коші (3.52)—(3.53) апроксимує початкову задачу (3.50)—(3.51) і правильні співвідношення

$$\left| x(t - j\frac{\tau}{m}) - y_j(t) \right| \leq Q_j \omega(x(t), \frac{\tau}{m}),$$

$$t \in [0, T], \quad T > 0,$$

де $Q_j, \quad j=\overline{0,m}$ - додатні сталі, а $\omega(x,\frac{\tau}{m})$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[-\tau,T]$.

Квазіполіном для диференціально-різницевого рівняння (3.50) має вигляд

$$\Phi(\lambda)=\det(A-\lambda E+Be^{-\lambda\tau}+\lambda Ce^{-\lambda\tau}). \tag{3.54}$$

Випишемо характеристичний многочлен для системи звичайних диференціальних рівнянь (3.52)

$$\Psi_m(\lambda)=\det\begin{pmatrix} A-\lambda E & 0 & \dots & \mu C & B-\mu C \\ \mu E & -(\mu+\lambda)E & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu E & -(\mu+\lambda)E \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Лема 3.2. *Для характеристичного многочлена апроксимуючої системи (3.51) справджується співвідношення*

$$\Psi_m(\lambda)=\det\left(A-\lambda E+\frac{\mu^m}{(\mu+\lambda)^m}B+\frac{\mu^m}{(\mu+\lambda)^m}\lambda C\right)(\mu+\lambda)^{mn}. \tag{3.56}$$

Доведення. Розіб'ємо визначник $\Psi_m(\lambda)$ на чотири блоки $\overline{A},\overline{B},C,D$, поклавши

$$\overline{A}=(A-\lambda E),\quad \overline{B}=(0,\ 0,\ \dots,\ \mu C,\ B-\mu C),$$

$$C=\begin{pmatrix}\mu E\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\qquad D_m=\begin{pmatrix} -(\mu+\lambda)E & \dots & 0\\ \mu E & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & -(\mu+\lambda)E\end{pmatrix}.$$

Тут $\overline{A},\ D_m$ - квадратні матриці і, очевидно, $\det(D_m)=(-1)^{mn}(\mu+\lambda)^{mn}$. Обчислимо визначник Ψ_m, використавши властивості блочних матриць [124] аналогічно випадку рівняння із запізненням [117]:

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ C & D_m \end{pmatrix} = \det(\overline{A} - \overline{B} D_m^{-1} C) \cdot \det(D_m), \qquad (3.57)$$

де D_m^{-1} - обернена матриця до матриці D_m.

Подамо D_m^{-1} у вигляді

$$D_m^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}.$$

Підрахуємо добуток матриць:

$$\overline{B} D_m^{-1} C = (0,\ 0,\ \dots,\ \mu C,\ B - \mu C) \times \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m1} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu E \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu C \cdot d_{m-1,1} + (B - \mu C) d_{m1}) \mu E = \mu^2 C d_{m-1,1} + \mu (B - \mu C) d_{m1}. \qquad (3.58)$$

Знайдемо блоки $d_{m1},\ d_{m-1,1}$ оберненої матриці D_m^{-1}. Для цього розіб'ємо матрицю D_m на чотири блоки $D_{m-1}, \overline{0}, C$і K, вважаючи, що

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \mu E \end{pmatrix},$$

$$K = -(\mu + \lambda) E \quad , \quad \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_m = \begin{pmatrix} D_{m-1} & \overline{0} \\ C & K \end{pmatrix}.$$

Тепер маємо $D_m^{-1} = \begin{pmatrix} D_{m-1}^{-1} & 0 \\ U & K^{-1} \end{pmatrix}$, де $K^{-1} = -\frac{1}{(\mu+\lambda)}E$.

Знайдемо блок U, використавши рівність

$$DD_m^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ CD_{m-1}^{-1} + KU & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$U = -K^{-1}CD_{m-1}^{-1} = \frac{1}{(\mu+\lambda)}ECD_{m-1}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(\mu+\lambda)}(\mu d_{m-1,1} \ \mu d_{m-1,2} \quad \ldots \quad \mu d_{m-1,m-1}).$$

Прирівнюючи перші компоненти векторів, знаходимо, що

$$d_{m1} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}d_{m-1,1} = ... = \frac{\mu^{m-1}}{(\mu+\lambda)^{m-1}}d_{1,1} = -\frac{\mu^{m-1}}{(\mu+\lambda)^m}E. \tag{3.59}$$

Підставляючи (3.58), (3.59) у співвідношення (3.57), одержуємо

$$\Psi_m(\lambda) = \det\left(A - \lambda E + \frac{\mu^m C}{(\mu+\lambda)^{m-1}} + \frac{\mu^m(B-\mu C)}{(\mu+\lambda)^{mn}}\right)(\mu+\lambda)^{mn} =$$

$$= \det\left(A - \lambda E + \frac{\mu^m B}{(\mu+\lambda)^m} + \frac{\mu^m}{(\mu+\lambda)^m}\lambda C\right)(\mu+\lambda)^{mn}.$$

Лема 3.2 доведена.

Розглянемо фіксоване $\lambda \in Z$. Тоді $\lambda \neq \frac{m}{\tau}$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $\overline{\Psi}_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in N$ за можливим винятком одного $m \in N$.

Враховуючи позначення $\mu = \frac{m}{\tau}$ і рівність (3.56), маємо

$$\overline{\Psi}_m(\lambda) = \det\Big(A - \lambda E + \frac{m^m}{(m+\lambda\tau)^m}B + \frac{m^m}{(m+\lambda\tau)^m}\lambda C\Big). \tag{3.60}$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(\frac{m}{m+\lambda\tau})^m = e^{-\lambda\tau}$$

одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}(A-\lambda E+(\frac{m}{(m+\lambda\tau)})^m B+$$

$$+(\frac{m}{(m+\lambda\tau)})^m \lambda C) = A-\lambda E+Be^{-\lambda\tau}+\lambda Ce^{-\lambda\tau}.$$

Отже, переходячи в рівності (3.60) до границі при $m\to\infty$, для фіксованого $\lambda\in Z$ одержимо

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\Psi}_m(\lambda) = \det(A-\lambda E+Be^{-\lambda\tau}+\lambda Ce^{-\lambda\tau}).$$

Лема 3.3. *Для фіксованих $\lambda\in Z$ послідовність функцій*

$$\overline{\Psi}_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}}, \qquad m\in N,$$

збігається при $m\to\infty$ до квазіполінома (3.54).

Зауваження 3.2. Функція $\overline{\Psi}_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (3.60), апроксимує при $m\to\infty$ квазіполіном (3.54). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (3.54). Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $\overline{\Psi}_m(\lambda)$, згідно з рівністю (3.56), збігаються, то корені характеристичного рівняння (3.55) можна брати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (3.54).

4 ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Як відомо, соціально-економічні, зокрема еколого-еконономічні, виробничі та інші процеси, належать до тих унікальних об'єктів пізнання, при вивченні яких методам математичного моделювання практично немає альтернативи. Це в значній мірі пояснює актуальність та пріоритетність застосування математичного апарату для формалізації процесів сучасної економіки, їх машинної імітації та модельного аналізу з метою розробки відповідної системи прийняття соціально–економічних рішень.

У даному розділі побудовано та досліджено економіко-математичні моделі розвитку промислового потенціалу регіону та розвитку регіональних інвестиційних потоків. Зокрема, побудовано кореляційно–регресійні моделі, в тому числі лагові, що описують зв'язки між інвестиціями та макроекономічними показниками [126, с.130–142, 215–216, 325–353]. Встановлено тісний зв'язок в Україні та Чернівецькій області між інвестиціями в основний капітал невиробничого призначення та обсягами будівельно-монтажних робіт, між інвестиціями в основний капітал та індексом фізичного обсягу валової доданої вартості, між інвестиціями в основний капітал житлового будівництва та введенням в експлуатацію житлових будинків, між іншими показниками. На базі цих моделей знайдено віддачу від інвестиційної діяльності, еластичність параметрів відносно капіталовкладень, зроблено аналіз характеристик інвестиційної діяльності, порівняно їх загальноукраїнські та регіональні значення, зроблено прогнози та висновки.

Для визначення промислового потенціалу регіону побудовано [126, с.289–

303] економіко-математичну модель у формі макроекономічної мультиплікативної виробничої функції. Визначено основні характеристики виробничої функції: знайдено середні та граничні ефективності факторів, еластичності випуску за ресурсами та еластичність виробництва, граничні норми заміни між ресурсами; подано висновки про економіку регіону. Для прогнозування промислового потенціалу регіону побудовано тренди для часових рядів ресурсів, використано прогнозні значення величин ресурсів та виробничу функцію для прогнозування випуску промислової продукції.

Результати цього розділу належать В.С.Григорківу, В.Й.Кушнірчуку та В.С.Дроню [125, 126].

4.1 Багатокритеріальна оптимізаційна модель з нелінійним еколого-економічним міжгалузевим балансом

На сьогоднішній день людське суспільство перебуває на порозі глобальної екологічної кризи. Природа нашої планети невпізнанно збідніла, відбувається деградація грунтів, втрачається їх родючість, невпинно зростає їх отруєння нафтопродуктами, важкими металами, пестицидами. Величезна кількість продуктів забруднення отруює повітря та воду. Основним джерелом забруднення є виробничо-економічна діяльність людини, тому, очевидно, для подолання екологічної кризи потрібно здійснити рішучий перехід до екологізації економіки і виробництва, до постіндустріальної екологічно орієнтованої цивілізації. Стало зрозумілим, що взаємодія людини з природою повинна вивчатись у рамках єдиної еколого-економічної системи.

Відрадно, що в останні роки прогресивна частина людства проявляє особливу активність, спрямовану на розв'язання проблем охорони природи та довкілля. Зокрема, у 1992 р. відбулась Конференція ООН з навколишнього середовища і розвитку, на якій керівники 179 країн світу, включаючи Україну, спільно виробили всесвітню програму дій під назвою “Порядок дня на XXI століття” [127, 128]. Основу програми складають 27 принципів, які уточнюють правила раціональної поведінки країн світу (права і зобов’язання) на шляху переходу до збалансованого в екологічному, економічному та соціальному сенсі розвитку. Такий розвиток був названий сталим (стійким, самовідтворюваним).

Наука активно включилась у вивчення та розв’язання проблем сталого розвитку. Ці проблеми стали також основними в багатьох економіко-математичних дослідженнях, без яких, очевидно, не можна обійтися, оскільки абстрагування від реальних еколого-економічних систем і процесів до їх математичних моделей, та, навпаки, перехід від якісного (предметного) аналізу моделей до висновків про реальні еколого-економічні об’єкти – один з найбільш ефективних та економних методів дослідження цих проблем.

Основою для побудови багатьох економіко-математичних моделей еколого-економічної взаємодії стала лінійна статична міжгалузева модель Леонтьєва-Форда [129], яка включає дві групи галузей: основне виробництво (галузі матеріального виробництва) і допоміжне виробництво (галузі, що знищують шкідливі відходи).

Нижче розглядається багатокритеріальний підхід до побудови оптимізаційних моделей статичного нелінійного еколого-економічного балансу та пропонується алгоритм розв’язання відповідних задач на основі методу можливих напрямків.

Статичний нелінійний еколого-економічний міжгалузевий баланс запишемо у вигляді співвідношень [127, 130]:

$$x^{(1)} = \alpha^{11}(x^{(1)}) + \alpha^{12}(x^{(2)}) + y^{(1)}, \tag{4.1}$$

$$x^{(2)} = \alpha^{21}(x^{(1)}) + \alpha^{22}(x^{(2)}) - y^{(2)}, \tag{4.2}$$

де $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, ..., x_n^{(1)})^T$, $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, ..., x_m^{(2)})^T$, $y^{(1)} = (y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)})^T$, $y^{(2)} = (y_1^{(2)}, ..., y_m^{(2)})^T$ – вектори-стовпці (T– знак операції транспонування) відповідно валового випуску основної продукції, знищених забруднювачів, кінцевої продукції, незнищених забруднювачів,

$$\alpha^{11}(x^{(1)}) = (\alpha_1^{11}(x^{(1)}), ..., \alpha_n^{11}(x^{(1)}))^T; \quad \alpha^{12}(x^{(2)}) = (\alpha_1^{12}(x^{(2)}), ..., \alpha_n^{12}(x^{(2)}))^T;$$

$$\alpha^{21}(x^{(1)}) = (\alpha_1^{21}(x^{(1)}), ..., \alpha_m^{21}(x^{(1)}))^T; \quad \alpha^{22}(x^{(2)}) = (\alpha_1^{22}(x^{(2)}), ..., \alpha_m^{22}(x^{(2)}))^T;$$

$$\alpha_i^{11}(x^{(1)}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{11}(x_j^{(1)}), i = \overline{1,n}; \quad \alpha_i^{12}(x^{(2)}) = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{il}^{12}(x_l^{(2)}), i = \overline{1,n};$$

$$\alpha_l^{21}(x^{(1)}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{lj}^{21}(x_j^{(1)}), l = \overline{1,m}; \quad \alpha_l^{22}(x^{(2)}) = \sum_{s=1}^{m} \varphi_{ls}^{22}(x_s^{(2)}), l = \overline{1,m}.$$

Функції $\varphi_{ij}^{11}(x_j^{(1)})$ $(i, j = \overline{1,n})$, $\varphi_{il}^{12}(x_l^{(2)})$ $(i = \overline{1,n}; l = \overline{1,m})$, $\varphi_{lj}^{21}(x_j^{(1)})$ $(l = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$, $\varphi_{ls}^{22}(x_s^{(2)})$ $(l, s = \overline{1,m})$ у загальному випадку є нелінійними і мають такий зміст:

$\varphi_{ij}^{11}(x_j^{(1)})$– затрати продукції i на випуск продукції j кількістю $x_j^{(1)}$ одиниць; $\varphi_{il}^{12}(x_l^{(2)})$ – затрати продукції i на знищення забруднювачів l кількістю $x_l^{(2)}$ одиниць; $\varphi_{lj}^{21}(x_j^{(1)})$ – випуск забруднювачів l під час випуску продукції j кількістю $x_j^{(1)}$одиниць; $\varphi_{ls}^{22}(x_s^{(2)})$ – випуск забруднювачів l при знищенні забруднювачів s кількістю $x_s^{(2)}$ одиниць. З економічного змісту функцій затрат і випусків випливає, що ці функції є монотонно зростаючими в області невід'ємних аргументів і набувають нульових значень у нулі.

Зауважимо, що рівняння (4.1) відображає типовий розподіл основної продукції між затратами на основне і допоміжне виробництва та кінцеву продукцію, а рівняння (4.2) відтворює баланс для знищеного забруднення, яке дорівнює різниці між виробленим забрудненням і незнищеним забрудненням.

Основною задачею при складанні прогнозів та планових розрахунках є знаходження при заданих векторах $y^{(1)}$ і $y^{(2)}$ відповідних об'ємів виробництва $x^{(1)}$ і знищення забруднювачів $x^{(2)}$. Якщо вибрати той чи інший критерій розвитку еколого-економічної системи (скалярний чи векторний), то згадана вище задача може бути формалізована у вигляді деякої оптимізаційної задачі. Слід зауважити, що за своєю природою довільний еколого-економічний процес є багатокритеріальним, хоча при розв'язанні багатьох реальних задач частіше всього виділяють один, найбільш вагомий, критерій. Це, звичайно, спрощує пошук раціонального (або оптимального) розв'язку, але не вирішує проблеми адекватності відповідної моделі. При побудові оптимізаційних моделей складають інтерес ті, що зводяться до багатокритеріальних оптимізаційних задач. До тих критеріїв, які часто фігурують при моделюванні еколого-економічних об'єктів, належать, наприклад, мінімізація трудових ресурсів $f_0(x^{(1)}, x^{(2)})$ та максимізація тієї частини доходу $f_1(x^{(1)}, x^{(2)})$ від виробництва основної продукції, яка залишилась після комплексних затрат на знищення забруднювачів.

Розглянемо двокритеріальну оптимізаційну модель з нелінійним еколого-економічним балансом. Всі наведені далі викладення щодо цієї моделі легко переносяться на випадок моделі з n-критеріальним простором $(n > 2)$.

Нехай $f_0(x^{(1)}; x^{(2)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j^{(1)}(x_j^{(1)}) + \sum\limits_{l=1}^{m} \psi_l^{(2)}(x_l^{(2)})$, $f_2(x^{(1)}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^{(1)}(x_j^{(1)})$, $f_3(x^{(2)}) = \sum\limits_{l=1}^{m} \eta_l^{(2)}(x_l^{(2)})$, $f_1(x^{(1)}, x^{(2)}) = f_2(x^{(1)}) - f_3(x^{(2)})$, де $\psi_j^{(1)}(x_j^{(1)})$ і $\psi_l^{(2)}(x_l^{(2)})$ – відповідно трудові ресурси, які необхідні для виробництва продукції j кількістю $x_j^{(1)}$ одиниць і знищення забруднювачів l кількістю $x_l^{(2)}$ одиниць;

$\xi_j^{(1)}(x_j^{(1)})$ – дохід від виробництва продукції j кількістю $x_j^{(1)}$ одиниць; $\eta_l^{(2)}(x_l^{(2)})$ – комплексні затрати на знищення забруднювачів l кількістю $x_l^{(2)}$ одиниць.

При наявності вказаних критеріїв задачу раціонального планування еколого-економічного розвитку із урахуванням (4.1), (4.2) можна записати так:

$$\begin{cases} f_0(x^{(1)}, x^{(2)}) \mapsto \min, \\ f_1(x^{(1)}, x^{(2)}) \mapsto \max, \\ g(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)} - \alpha^{11}(x^{(1)}) - \alpha^{12}(x^{(2)}) \geq y^{(1)}, \\ h(x^{(1)}, x^{(2)}) = -\alpha^{21}(x^{(1)}) + x^{(2)} - \alpha^{22}(x^{(2)}) \geq -y^{(2)}, \\ x^{(1)} \geq 0 \in R^n, x^{(2)} \geq 0 \in R^m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Процес розв'язання двокритеріальної задачі нелінійного програмування (4.3), очевидно, залежить від конкретизації тих функцій, що формують задачу.

Більшість відомих підходів до розв'язування задачі багатокритеріальної оптимізації базується на її зведенні до задачі нелінійного програмування. Одним з основних методів такого типу є метод згорток, в якому всі критерії згортаються в один критерій. Використовуються також мультиплікативні згортки, методи поступок, цільового програмування та інші.

Але з успіхом застосовується й інший підхід, в якому не проводиться попередній перехід до задачі нелінійного програмування в явному вигляді. Фактично такі методи є узагальненням відомих локальних і глобальних методів нелінійного програмування на задачі з кількома критеріями.

Одним з таких методів є метод можливих напрямків, запропонований Зойтендейком для розв'язування задач опуклого програмування. Подальші модифікації цього методу стосувалися його застосуванню до розв'язування задач нелінійного програмування. Різні версії методу відрізняються між собою як видом допоміжної задачі, типом нормуючих обмежень, вибором кроку спуску, так і різними способами боротьби з “зигзагоподібністю” руху.

Так, якщо метод трактувати як метод мінімізації деякої допоміжної функції, яка залежить не тільки від вихідних прямих змінних, але й від оцінки зверху оптимального значення цільової функції, то можна узагальнити його на випадок розв’язування задач багатокритеріальної оптимізації [131].

Аналогічно можна узагальнити й інші методи нелінійного програмування – штрафних функцій, лінеаризації, центрів, функції Лагранжа тощо.

Метод можливих напрямків дещо поступається за точністю розв’язку іншим методам. Але він не вимагає досить точних початкових наближень для розв’язування задач і дозволяє дещо зменшити об’єм обчислень. Результати, одержані при розв’язуванні задач методом можливих напрямків можуть бути добрими початковими наближеннями для подальших розрахунків іншими методами.

Позначимо $x = (x^{(1)}, x^{(2)})^T \in R^{n+m}$– вектор-стовпець $(n+m)$-мірного евклідового простору, $u(x) = [f_0(x^{(1)}, x^{(2)}), -f_1(x^{(1)}, x^{(2)})]$,

$v(x) = [y^{(1)} - g(x^{(1)}, x^{(2)}), -y^{(2)} - h(x^{(1)}, x^{(2)}), -x^{(1)}, -x^{(2)}]$ – вектор-функції, які здійснють, відповідно, відображення $u : R^{n+m} \to R^2$, $v : R^{n+m} \to R^{2(n+m)}$. Будемо вважати функції, що формують задачу (4.3), неперервно диференційовними. Тоді і вектор-функції $u(x)$ та $v(x)$ також неперервно диференційовні і задачу (4.3) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} u(x) \mapsto \min, \\ v(x) \leq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Значення вектор-функції $u(x)$ визначають у просторі R^2 множину досяжних оцінок

$$U = \{w \in R^2 | w = u(x), v(x) \leq 0\}.$$

Під розв'язком задачі (4.4), а тому і (4.3), будемо розуміти множину слабко оптимальних за Парето оцінок [132] яка визначається так:

$$U^* = \{w^* \in U | \max(w_1 - w_1^*, w_2 - w_2^*) \geq 0, \forall w \in U\}.$$

Множині U^* відповідає множина слабко оптимальних за Парето точок $X^* = u^{-1}(U^*)$.

Нехай $l = 2(m+n+1)$. Візьмемо вектор $w \in R^2$ і через $z(x,w)$ позначимо l-мірну вектор-функцію, перша компонента якої $u_1(x) - w_1$, друга компонента $u_2(x) - w_2$, а наступними компонентами є функції $v_j(x)$, $j = 1, 2, ..., 2(m+n)$. Утворимо допоміжну функцію

$$Z(x,w) = \max_{1 \leq i \leq l} z(x,w).$$

Можна довести таке твердження:
якщо існують $x^* \in R^{n+m}$ і $w^* \in R^2$ такі, що

$$Z(x^*, w^*) = 0, \tag{4.5}$$

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \in R^{n+m}} Z(x, w^*), \tag{4.6}$$

то $x^* \in X^*$.

З цього твердження випливає, що розв'язування задачі (4.4) зводиться до знаходження таких x^*, w^*, які задовольняють умови (4.5), (4.6). Опишемо числовий метод відшукання таких точок. Виберемо початковий вектор w^0 і довільний додатний напрямок e. Нехай, крім того, відома початкова точка $x^0 \in R^{n+m}$. Ітерації у методі ведуться за такою рекурентною схемою:

$$w^{k+1} = w^k - \beta(x^k, w^k, e) \cdot e, \tag{4.7}$$

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k \cdot s^k, \tag{4.8}$$

де s^k – напрямок спадання функції $Z(x, w^k)$ у точці (x^k, w^{k+1}), який є розв'язком допоміжної задачі лінійного програмування; λ^k –деякий крок спуску. Коефіцієнт $\beta(x, w, e)$ обчислюється за формулою $\beta(x, w, e) = \min(\frac{w_1 - u_1(x)}{e_1}, \frac{w_2 - u_2(x)}{e_2})$.

Різні варіанти методу можливих напрямків можна одержати з рекурентної схеми (4.7), (4.8), використовуючи різні схеми побудови напрямку спадання функції максимуму $Z(x, w^k)$, а також різні схеми вибору кроку λ^k.

Довільна гранична точка послідовності $\{x^k\}$, побудованої за ітераційним процесом (4.7), (4.8) належить множині X^*.

У результаті роботи методу одержується одна слабко оптимальна за Парето оцінка. Вибір різних початкових векторів w^0 приводить до різних оптимальних оцінок з U^* і відповідних їм точок з X^*. Існує також інший спосіб знаходження різних розв'язків задачі (4.4): зафіксувавши w^0 і змінюючи напрямок e у межах додатного ортанта, можна одержати всі оцінки з U^*.

Суть методу можливих напрямків продемонструємо на прикладі. Візьмемо вектори і функції, які утворюють задачу раціонального планування еколого-економічного розвитку (4.3) такими:

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})^T, \quad x^{(2)} = (x_1^{(2)}), \quad y^{(1)} = (y_1^{(1)}) = 1, \quad y^{(2)} = (y_1^{(2)}) = 1,$$

$$f_0(x^{(1)}, x^{(2)}) = (x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + x_1^{(2)}) + 4(x_1^{(1)} - x_1^{(2)} - 1)^2,$$

$$f_1(x^{(1)}, x^{(2)}) = 20 - (x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + x_1^{(2)}) - 4(x_1^{(1)} - x_1^{(2)} + 1)^2,$$

$$g(x^{(1)}, x^{(2)}) = x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_1^{(2)}, \quad h(x^{(1)}, x^{(2)}) = 4x_1^{(2)} + 6x_2^{(1)} - (x_1^{(1)})^3 - 4.$$

Тоді двокритеріальна задача (4.4) записується у такому вигляді:

мінімізувати функції

$$u_1(x) = (x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + x_1^{(2)}) + 4(x_1^{(1)} - x_1^{(2)} - 1)^2 \mapsto \min,$$

$$u_2(x) = (x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + x_1^{(2)}) + 4(x_1^{(1)} - x_1^{(2)} + 1)^2 - 20 \mapsto \min,$$

за умов

$$v_1(x) = x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_1^{(2)} - 1 = 0,$$

$$v_2(x) = 3 - 4x_1^{(2)} - 6x_2^{(1)} + (x_1^{(1)})^3 \leq 0,$$

$$x_1^{(1)} \geq 0, \quad x_2^{(1)} \geq 0, \quad x_1^{(2)} \geq 0.$$

В усіх розрахунках була вибрана початкова точка $x^0 = (0.1, 0.7, 0.2)$. Слабко оптимальні за Парето оцінки цієї задачі були одержані двома способами. При фіксованому напрямку $e = (1, 1)$ і початковому значенні $w^0 = (12, -10)$ за 27 ітерацій була одержана оцінка $u(x^k) = (7.00709, -14.99392)$ і відповідна точка $x^k = (0.338879, 0.197242, 0.463879)$. Тобто мінімальне значення функції $f_0(x^{(1)}, x^{(2)})$ дорівнює 7.00709, а максимальне значення функції $f_1(x^{(1)}, x^{(2)})$ дорівнює 14.99392 і вони досягаються при $x_1^{(1)} = 0.338879$, $x_2^{(1)} = 0.197242$, $x_1^{(2)} = 0.463879$. Якщо ж вибрати початкове значення $w^0 = (20, 0)$ і здійснювати рух у напрямку $e = (4, 3)$, то за 32 ітерації одержується оцінка $u(x^k) = (5.50584, -10.87082)$ і відповідна точка $x^k = (0.422181, 0.382097, 0.195722)$. Тобто мінімальне значення функції $f_0(x^{(1)}, x^{(2)})$ дорівнює 5.50584, а максимальне значення функції $f_1(x^{(1)}, x^{(2)})$ дорівнює 10.87082.

Зауважимо, що тут розглянуто узагальнення лише одного варіанта методу можливих напрямків для розв'язування двокритеріальної задачі (4.3). Аналогічним чином можуть бути використані й інші схеми методу можливих напрямків.

4.2 Динамічна модель функціонування франчайзингу

Означимо механізм функціонування франчайзингу та деякі припущення, що допоможуть його формалізувати [128, 129].

Франчайзер — це власник ідеї, технології чи ноу-хау, яка дозволяє вивести на ринок новий товар чи послугу (для скорочення говоритимемо про новий товар). Франчайзер особисто не виготовляє товар, він тільки продає право це робити малим підприємствам і фірмам, які називаються франчайзі. Угода, що надає право франчайзі продукувати новий товар, називається франшизою.

Природними можуть бути такі припущення.

1. Франчайзі викуповує у франчайзера франшизу тільки на обмежений термін.

2. Франшиза передбачає строге дотримання технології, що перевіряється франчайзером. У випадку порушення технології франчайзер має право без компенсації розірвати угоду.

3. Франчайзі перераховують певний відсоток від реалізації товару.

4. Основну рекламну кампанію товару веде франчайзер. Франчайзі рекламують свій товар тільки у рамках загальної концепції.

Для формалізації моделі франчайзингу введемо позначення:

t — час (у роках), що пройшов із початку діяльності франчайзингу;

$V(t)$ — загальний обсяг продажу товару чи послуги за одиницю часу починаючи з моменту t;

V_{max} — потенційний платіжоспроможний попит на товар чи послугу за одиницю часу;

$n(t)$ — кількість франчайзі у момент t.

Для визначення темпу зростання обсягів продажу товару чи надання послуги можна записати таку початкову задачу

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\alpha(t) + \beta(t)n(t) + \gamma(t)V(t))(V_{max} - V(t)),$$

$$V(0) = 0, \tag{4.5}$$

де $\alpha(t)$ — коефіцієнт, який характеризує інтенсивність рекламної кампанії франчайзером;

$\beta(t)$ — коефіцієнт, що характеризує середній вплив на зростання обсягу продажу від діяльності одного франчайзі;

$\gamma(t)$ — характеристика рівня спілкування між споживачами товару чи послуги.

У моделі (4.5) ліва частина — це темп зростання обсягу продажу, тобто збільшення обсягу продажу за одиницю часу. Множник $(V_{max} - V(t))$ означає, що збільшення обсягу продажу прямо пропорційне різниці між потенційним і наявним продажем. Крім того, темп зростання обсягу продажу залежить від інтенсивності рекламної кампанії $\alpha(t)$, діяльності франчайзі $\beta(t)n(t)$ і посередньої реклами внаслідок спілкування споживачів $\gamma(t)V(t)$. Зауважимо, що величина γ визначається, як правило, за допомогою опитування.

Побудоване рівняння задачі (4.5) узагальнює уже відомі моделі. Якщо франчайзі немає, тобто "франчайзер"сам є виробником продукції й постачальником її на ринок, то $n(t) = 0$, $t > 0$ і одержуємо модель

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\alpha(t) + \gamma(t)V(t))(V_{max} - V(t)), \tag{4.6}$$

яка є аналогом моделі рекламної кампанії [133]. Зокрема, якщо величина $\alpha(t)$ набагато більша за $\gamma(t)V(t)$ (це найчастіше буває на початку рекламної кампанії, тобто при малих значеннях t), то з (4.6) одержуємо модель типу моделі популяції Мальтуса

$$\frac{dV(t)}{dt} = \alpha(t)(V_{max} - V(t)).$$

Якщо ж реклама припиняється ($\alpha(t) = 0$) або співвідношення між прямою і посередньою рекламою на користь останньої, то з (4.6) маємо рівняння логістичної кривої

$$\frac{dV(t)}{dt} = \gamma(t)V(t)(V_{max} - V(t)).$$

Дослідимо модель (4.5). Кожна зі складових α, β і γ має, як правило, додатне значення. І тоді рівняння з (4.5) задає зростання обсягів продажу товару чи послуги. Протилежні випадки вказують на незадовільний хід рекламної кампанії. У [128] описано ці випадки і для кожного подано висновки – рекомендації щодо корегування системи.

Якщо не буде спеціальних зауважень, то скрізь надалі вважатимемо, що величини α, β і γ є додатними або принаймні невід'ємними.

Дослідження моделі (4.5) проводиться на різних етапах діяльності франчайзингу.

І етап — "зародження". Розглянемо модель (4.5) в околі точки $t = 0$. Для малого часу характерна мала кількість інформації про продукт серед споживачів і тому нульовий рівень попиту на нього $V(t) = 0$. Рівняння з (4.5) матиме просту лінійний форму

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\alpha(t) + \beta(t)n(t))V_{max}. \tag{4.7}$$

Розв'язок початкової задачі для рівняння (4.7) має вигляд

$$V(t) = V_{max} \int_0^t (\alpha(\tau) + \beta(\tau)n(\tau))d\tau. \tag{4.8}$$

Обсяг проданої за одиницю часу продукції, визначений формулою (4.8), при дуже малій зміні часу (від початкової точки $t = 0$) змінюється з часом лінійно (параметри α і β фактично не змінюються). Тобто на етапі "зародження" графік функції $V(t)$, $t > 0$ спочатку близький до прямої, що проходить через початок координат, а потім починає зростати швидше, ніж пряма (опуклий вниз). Це відповідає спочатку лінійному, а потім лавиноподібному варіантам розвитку франчайзингу, описаних Е.Легейдою [134].

З формули для розв'язку (4.8) можна легко визначити співвідношення між загальними витратами франчайзера і його доходом. Позначимо:

$p(t)$ — частина ціни одиниці проданого товару (послуги), яка надходить франчайзеру протягом року t;

$f(t)$ — вартість франшизи в момент t;

$s(t)$ — вартість елементарної рекламної дії для франчайзера протягом року t;

$w(t)$ — середні затрати на моніторинг одного франчайзі протягом року t.

Перший етап діяльності франчайзера є дуже короткий у часі. Для спрощення можна вважати, що він триває один рік. Тому можна вважати, що величини p, f, s і w у цей період не залежать від часу. Оскільки за змістом α – це кількість рівнозначних рекламних дій за одиницю часу, то затрати франчайзера на рекламну кампанію протягом часу t від початку діяльності франчайзингу становлять $s\int\limits_0^t \alpha(t)dt$. Затрати на моніторинг франчайзі протягом першого етапу дорівнюють $wn(1)$. Дохід франчайзера у першому році функціонування також складається з двох частин: доходу від продажу франшизи – $fn(1)$ і доходу від продажу продукції чи надання послуги

$$p\int\limits_0^1 V(t)dt = p\int\limits_0^1 \left(V_{max}\int\limits_0^t (\alpha(\tau)+\beta(\tau)n(\tau))d\tau \right) dt.$$

Порівнюючи дохід і споживання можна побачити переваги франчайзингу над власною фірмовою мережею уже на початковому етапі. У випадку самостійної діяльності фірми дохід більший за витрати тільки у випадку $pV_{max} > s$, що буває дуже рідко. Тобто фірма на початку своєї рекламної кампанії найчастіше терпить збитки, які повинні покриватися на пізніших етапах.

Для прибутку франчайзера на етапі "зародження" умова $pV_{max} > s$ не є обов'язковою. Основний дохід на цьому етапі франчайзер має від продажу франшизи.

II етап — "становлення". Розглянемо модель (4.5) при малих $t > 0$. Для таких значень часу залишається малою кількість інформації про продукт серед споживачів. І хоча існує деякий попит на товар чи послугу ($V(t) > 0$), посередня реклама є ще дуже малою: $\gamma V(t) \approx 0$. Рівняння з (4.5) набуде вигляду

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\alpha(t) + \beta(t)n(t))(V_{max} - V(t)). \tag{4.9}$$

Розв'язок початкової задачі для рівняння (4.9) має вигляд

$$V(t) = V_{max}\left(1 - \exp\left[-\int\limits_0^t (\alpha(\tau) + \beta(\tau)n(\tau))d\tau\right]\right). \tag{4.10}$$

На відміну від графіка розв'язку (4.8), графік для обсягу проданої продукції, заданого формулою (4.10) одразу залежить від кількості франчайзі. Якщо їх кількість не зростає (а тим більше, якщо зменшується), то графік функції V заданий формулою (4.10) є опуклий вгору. В такому режимі приріст обсягу проданої продукції за одиничні проміжки часу із зростанням часу буде зменшуватися. Це відповідає динамічному варіанту розвитку франчайзингу за Е. Легейдою.

Якщо кількість франчайзі збільшується, то графік обсягу продажу товару за одиницю часу буде S–подібним. Тобто цей етап "становлення" також розбивається на дві частини – на частину із лавиноподібним розвитком та частину із динамічним розвитком франчайзингу.

Час тривалості другого етапу також відносно невеликий. Тому як і вище, можна припускати, що ціна товару, зокрема та її частина p, що належить франчайзеру, середні річні затрати на моніторинг одного франчайзі w, а також вартість одиничної дії рекламної кампанії s протягом даного періоду залишаються незмінними. Якщо другий період умовно розпочався у час t_1 від початку діяльності франчайзингу, то загальні витрати франчайзера протягом етапу "становлення" із розрахунку на 1 рік дорівнюють

$$S = s \int\limits_{t_1}^{t_1+1} \alpha(t)dt + wn(t_1+1),$$

річний дохід франчайзера —

$$P = f(t_1)(n(t_1+1) - n(t_1)) +$$
$$+pV_{max}\left(1 - \int\limits_{t_1}^{t_1+1}\left(\exp\left[-\int\limits_{0}^{t}(\alpha(\tau)+\beta(\tau)n(\tau))d\tau\right]\right)dt\right).$$

III етап — "розвиток". На третьому етапі, починаючи з деякого моменту t_2, відчутним стає вплив посередньої реклами внаслідок спілкування покупців. У рівнянні з (4.5) присутні всі доданки, тобто вона стає нелінійною, і тому набагато складнішою. Розв'язок задачі (4.5) можна відносно легко одержати у випадку сталих величин α, β, γ і n:

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\alpha + \beta n + \gamma V(t))(V_{max} - V(t)), \quad t \geq t_2. \tag{4.11}$$

Стаціонарне положення рівноваги знаходимо з умови $\frac{dV(t)}{dt} = 0$. Воно досягається у двох випадках: $V_{max} - V(t) = 0$ і $\alpha + \beta n + \gamma V(t) = 0$. Перший випадок означає, що обсяг продажу досяг потенційного (максимально можливого) попиту. Тому подальшого зростання обсягу не може бути. У другому випадку $\alpha+\beta n = -\gamma V(t)$. Тобто він настає, коли деякі з параметрів α, β, γ від'ємні. Якщо $\alpha + \beta n < 0$, то $\gamma > 0$, тобто у цілому реклама франчайзера й усіх франчайзі має негативний ефект, а товар (послуга) якісний і має хороші відгуки споживачів (це рідкісний випадок). Якщо $\alpha + \beta n > 0$, то $\gamma < 0$, тобто вся реклама може тільки урівноважити негативну думку про товар у споживачів (більш поширений випадок). Щоб знайти розв'язок рівняння (4.11) зробимо зсув на величину $\frac{\alpha+\beta n}{\gamma}$, тобто заміну $W(t) = V(t) + \frac{\alpha+\beta n}{\gamma}$. Для W одержимо задачу

$$\frac{dW(t)}{dt} = \gamma W(t)(W_{max} - W(t)),$$

$$W(0) = \frac{\alpha + \beta n}{\gamma}, \tag{8}$$

де $W_{max} = V_{max} + \frac{\alpha+\beta n}{\gamma}$. Задача (8) має розв'язок

$$W(t) = \frac{W_{max} W(t_2) \exp(W_{max}\gamma t)}{W_{max} - W(t_2)(1 - \exp(W_{max}\gamma t))}.$$

Поведінка функції W (а, значить, функції V) описується так званою логістичною кривою. При довільному $W(t_2)$ ця величина прямує до рівноважного значення W_{max}, причому тим повільніше, чим величина $W(t)$ ближче до $W(t_2)$.

З рівняння із задачі (4.12) випливає, що починаючи з деякого моменту, продовжувати рекламу стає невигідно. Дійсно, при $W(t)$, близьких до W_{max}, рівняння (4.12) записується у вигляді

$$\frac{dW(t)}{dt} = \gamma W_{max}(W_{max} - W(t)).$$

Його розв'язок прямує при $t \to \infty$ до граничного значення W_{max} (при цьому функція $V(t)$ прямує до V_{max}) за повільним експоненціальним законом.

За одиницю часу надзвичайно мало зростає обсяг продажу і додатковий прибуток не може покрити видатки на рекламу.

Отже, починаючи з деякого часу t_3 франчайзі відмовляється від реклами: $\alpha(t) = 0, t > t_3$. Тому витрати франчайзера після цього моменту з розрахунку на 1 рік дорівнюють

$$S = \int\limits_{t_3}^{t_3+1} w(t)n(t)dt.$$

Дохід франчайзера також має тільки одну природу — відсоток від ціни реалізації (від продажу франшизи доходу немає):

$$P = \int\limits_{t_3}^{t_3+1} p(t)V(t)dt.$$

, де $V(t)$ — розв'язок рівняння (4.11). Цей розв'язок, а тому, й величина P певним чином залежать від кількості франчайзі $n(t)$. На етапі "розвитку" франчайзер буде оптимізовувати цю кількість. Перевіряючи франчайзі на предмет дотримання технології, він буде з деякими розривати угоди. Кількість франчайзі буде зменшуватися допоки виконуватиметься нерівність $\frac{dP}{dn} < w$. Як тільки $\frac{dP}{dn} = w$, то це означатиме, що франчайзер оптимізував кількість франчайзі і цим самим збільшив до максимально можливого за даних умов свій поточний прибуток.

4.3 Модель накопичення елементів ортштейнів

У підрозділі побудовано та досліджено математичну модель процесу накопичення елемента змінної валентності (заліза, марганцю тощо) в грунтових новоутвореннях (ортштейнах) у всіх можливих режимах. У кожному з випадків модель являє собою крайову задачу для рівняння дифузії з відповідними крайовими умовами. Використовуючи її, можна:

1) за грунтовими та гідрологічними характеристиками визначити динаміку густини елемента у грунті та середньої його маси в ортштейнах; 2) за відомими характеристиками грунту, вибірковими значеннями масових часток ортштейнів у грунті та окисленої форми елемента в ортштейні знайти співвідношення між тривалістю періодів розчинення елемента та його сегрегації. Створено програмний продукт, який чисельно розв'язує ці задачі для довільного ланцюжка режимів. Результати підрозділу 4.3 належать В.С Дроню і ввійшли до монографії [136, с.31, 70–74] та тез [137, 138].

4.3.1 Процес накопичення елементів ортштейнів. Ортштейнами називають ґрунтові новоутворення округлої чи овальної форми розміром від 0,5 до 20 мм [135]. Ортштейни містять підвищену в порівнянні з оточуючою породою кількість заліза, марганцю, фосфору та інших мікроелементів. Тому їх також називають залізо-марганцеві конкреції.

Процес формування ортштейнів у ґрунті має циклічний характер, а кожний період розбивається на кілька етапів [136]. Розглянемо їх на прикладі процесу накопичення заліза.

Залізо в ґрунті входить до складу різних сполук (мінеральних, органічних, органомінеральних) у двохвалентній Fe^{2+} і трьохвалентній Fe^{3+} формах. Відновлене двохвалентне залізо Fe^{2+} має високу розчинність, а тому може переміщуватися як з ґрунтовим розчином, так і в ньому. Окислене кристалічне трьохвалентне залізо є водонерозчинним. Скупчення заліза такої форми міститься в ортштейнах.

У біохімії поняття окисно–відновний потенціал (ОВП) Eh задається співвідношенням окислених і відновлених сполук і вимірюється у мілівольтах. Існує обернена залежність між коефіцієнтом Eh і вологістю ґрунту.

При перезволоженні різко зменшується інтенсивність газообміну між ґрунтом та атмосферою, що за умови активного функціонування мікробоценозу веде до поступового зниження вмісту вільного кисню та розвитку відновних умов. Відбувається поступове відновлення всіх окисно–відновних систем ґрунту, в тому числі і сполук елементів змінної валентності. Це призводить до зниження окисно-відновного потенціалу. Зокрема, якщо $Eh < 300$ мВ, то це значить, що залізо знаходиться в відновленій двохвалентній формі.

Наступне зменшення перезволоженості веде до зростання аерації і поступового підвищення ОВП ґрунту. Кисню в грунті збільшується, але при $Eh \in [300; 350]$ недостатньо енергії для окислення заліза. У цьому випадку хімічних змін не відбувається.

Коли ОВП знаходиться в межах [350;400], грунтові хемолітотрофні мікроорганізми здатні окислити залізо ($Fe^{2+} - e \rightarrow Fe^{3+} + Q$), при цьому поглинаючи енергію Q, що виділяється. Зниження концентрації заліза в зоні перебування мікроорганізмів призводить до дифузії відновленого заліза до цих зон і осадження у новоутвореннях. Таким чином, збільшується вміст заліза у конкреції, що знаходиться у центрі колонії мікроорганізмів.

Досягнення Eh позначки 400 мВ і більше означає, що відбувається процес хімічного окислення заліза і його кристалізації.

Отже, за значенням ОВП у ґрунті можна виділити чотири відмінних режими процесу конкреціутворення і модель зміни маси заліза в ортштейні складатиметься з чотирьох різних моделей:

1) при $Eh < 300$ мВ, коли проходить розчинення заліза,

2) при Eh в межах 300 – 350 мВ, коли існує відновлене залізо, але його окислення і зміна маси в ортштейнах є неможливими,

3) при Eh в межах 350 – 400 мВ, коли відбувається окислення заліза у зонах дії хемотрофних мікроорганізмів і його сегрегація,

4) випадок високого рівня ОВП ($Eh > 400$ мВ), коли у ґрунті існують тільки окислені форми заліза і відбувається зменшення до мінімуму його дифузії.

4.3.2 Побудова моделі. Для побудови математичної моделі цього процесу введемо такі величини: V – об'єм ґрунту; ν - кількість конкрецій в цьому об'ємі (припускається, що вони розподілені рівномірно); $w = \frac{V}{\nu}$ – об'єм навколо однієї конкреції; $R = \left(\frac{3V}{4\pi\nu}\right)^{1/3}$ – усереднений радіус впливу однієї конкреції.

Вважатимемо, що густина заліза (у різних формах; у межах радіуса впливу) залежить тільки від відстані від поверхні конкреції. Тому стан системи однозначно визначає величина $\rho(t, x)$ – лінійна густина заліза в момент часу $t \geq 0$ на відстані від поверхні конкреції, $0 \leq x \leq R$.

У кожному з чотирьох режимів відбувається процес дифузії без зовнішніх джерел і впливів:

$$\partial_t \rho(x, t) = \frac{k(t)}{c}\ \partial_x^2 \rho(x, t),$$

де $k(t)$ – коефіцієнт дифузії у момент часу t, $= const$ – коефіцієнт пористості ґрунту.

Початкова умова для всіх чотирьох режимів однакова:

$$\rho(x, t)\ |_{t=0} = \mu(x),\ x \in [0; R]$$

На поверхні сфери радіуса R матимемо

$$k(t)\partial_x \rho(x, t)\ |_{x=R} = 0,\ t \geq 0,$$

для всіх чотирьох режимів, тобто вважаємо, що дифузія відбувається тільки в межах об'єму, що є кулею радіуса R навколо конкреції.

Перший режим розбивається на два випадки. Оскільки при ньому проходить розчинення заліза з конкреції, то перший випадок повинен описувати процес, коли у конкреції ще міститься залізо у формі Fe^{3+}. У другому випадку припускається, що залізо в конкреції повністю розчинилося.

Отже, у першому випадку маємо крайову умову

$$k(t)\partial_x \rho(x,t)\mid_{x=0} = C_1(\rho_0 - \rho(0,t)),\ t \geq 0, \tag{4.13}$$

де ρ_0 – густина насичення, $C_1 > 0$ - коефіцієнт пропорційності. Умова (4.13) означає, що потік заліза в околі точки $x = 0$ спрямований в бік зростання координати x (від конкреції) і пропорційний різниці між густиною насичення та існуючою густиною заліза біля конкреції.

Оскільки в другому випадку заліза в конкреції немає, то потік через межу $x = 0$ відсутній. Тобто маємо таку крайову умову:

$$k(t)\partial_x \rho(x,t)\mid_{x=0} = 0,\ t \geq 0,$$

При другому режимі не відбуваються окисно-відновні процеси заліза, тому кількість заліза в ортштейні не змінюється і його руху через межу $x = 0$ немає. Матимемо таку крайову умову:

$$k(t)\partial_x \rho(x,t)\mid_{x=0} = 0,\ t \geq 0,$$

При третьому режимі відбувається сегрегація (накопичення) трьохвалентного заліза в конкреції за рахунок мікроорганізмів. Крайова умова має вигляд

$$k(t)\partial_x \rho(x,t)\mid_{x=0} = -\min\{C_2\rho(0,t); \alpha(t)\},\ t \geq 0, \tag{4.14}$$

де $\alpha(t)$ – потужність бактеріального окислення. Умова (4.14) означає, що потік заліза відбувається в бік ортштейна пропорційно до концентрації заліза біля поверхні ортштейна, але не швидше ніж потужність бактеріального окислення.

При четвертому режимі за рахунок відсутності відновлених форм заліза, його дифузія відсутня ($k(t) = 0$) і тому рівняння вироджується, рух заліза відсутній. Крайова умова є зайвою.

Отже, моделі накопичення заліза в ортштейні залежно від ОВП містять спільну частину:

$$\partial_t \rho(x,t) = \frac{k(t)}{c}\, \partial_x^2 \rho(x,t),\ x \in (0,R),\ t > 0,$$

і відмінні частини (одну з крайових умов)

I. a) ($Eh < 300$ мВ, $m > 0$) $\quad k(t)\partial_x\rho(x,t)\mid_{x=0} = C_1(\rho_0 - \rho(0,t)),\ t \geq 0;$

I. b) ($Eh < 300$ мВ, $m = 0$) $\quad k(t)\partial_x\rho(x,t)\mid_{x=0} = 0,\ t \geq 0;$

II. (300 мВ $< Eh <$ 350 мВ) $\quad k(t)\partial_x\rho(x,t)\mid_{x=0} = 0,\ t \geq 0;$

III. (350 мВ $< Eh <$ 400 мВ) $\quad k(t)\partial_x\rho(x,t)\mid_{x=0} = -\min\{C_2\rho(0,t); \alpha(t)\},\ t \geq 0;$

IV. ($Eh > 400$ мВ) Дифузія відсутня.

У задачах I через m позначено усереднене значення маси заліза в конкреціях.

4.3.3 Підходи до дослідження моделі. Дослідження моделі, яка побудована вище, доцільно розпочинати після того, як система перебувала в другому режимі, коли відбувається дифузія без хімічних змін. Можна припустити, що в цей момент концентрація заліза рівномірно розподілиться у ґрунті навколо ортштейнів. Тому густину $\rho(t,x)|_{t=0} = \mu(x),\ x \in [0,R]$ можна вважати сталою і за $\mu(x)$ брати середнє значення із вибірки $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{i_0}$, де

μ_i – вибіркове значення концентрації заліза в ґрунті, i_0 – обсяг вибірки. Тобто $\mu(x) = \mu_{cep} = const$.

Після другого режиму може наступати або перший, або третій режими, тобто маємо ланцюжки: II $\rightarrow$ I $\rightarrow$ II або II $\rightarrow$ III [$\rightarrow$ IV $\rightarrow$ III] $\rightarrow$ II. Буде чи не буде система перебувати в четвертому режимі не впливатиме на другий ланцюжок, оскільки четвертий режим є режимом сталості.

Після закінчення кожного з ланцюжків, тобто після повторного закінчення другого режиму, доцільно провести вимірювання густини заліза в ґрунті, якісне і кількісне дослідження конкрецій з метою звірки експериментальних значень з модельними і уточнення параметрів моделі.

Після уточнення, за моделлю можна: 1) за грунтовими та гідрологічними характеристиками визначити динаміку густини елемента у грунті та середньої його маси в ортштейнах; 2) за відомими характеристиками грунту, вибірковими значеннями масових часток ортштейнів у грунті та окисленої форми елемента в ортштейні знайти співвідношення між тривалістю періодів розчинення елемента та його сегрегації.

4.3.4 Аналітичне розв'язання. Для знаходження динаміки зміни густини заліза (тобто слідкування за станом системи) аналітично у випадку першого ланцюжка II $\rightarrow$ I $\rightarrow$ II з часовими інтервалами $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ розв'язується спочатку I задача

$$\partial_t \rho(x,t) = k(t)\partial_x^2 \rho(x,t),\ 0 < x < R,\ t \in [0, t_1],$$

$$\rho(x,t)|_{t=0} = \mu,\ x \in [0, R],$$

$$\rho(x,t)|_{x=R} = 0,\ t \in [0, t_1],$$

$$\rho(x,t)|_{x=0} = C_1(\rho_0 - \rho(0,t)),\ t \in [0, t_1].$$

Вона має розв'язок

$$\rho(x,t) = L(x-R)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(B_n - \frac{A_n}{\varphi_n^2 k} \right) e^{-\varphi_n^2 kt} + \frac{A_n}{\varphi_n^2 k} \right) \left(\cos\varphi_n x - \frac{C_1}{\varphi_n k} \sin\varphi_n x \right),$$

де

$$L = -\frac{C_1\rho_0}{2kR - C_1R^2}, \quad A_n = \frac{4L}{R\varphi_n} \left(\sin\varphi_n R + \frac{C_1}{\varphi_n k}(\cos\varphi_n R - 1) \right),$$

$$B_n = \frac{2}{R\varphi_n k}(((\mu\varphi_n^3 k + 2L\varphi_n k)\sin\varphi_n R + (2L\varphi_n^2 C_1)\cos\varphi_n R) -$$

$$-(\varphi_n^2(\mu C_1 + 2LRk - LR^2C_1) + 2LC_1)),$$

а $\varphi_n,\ n \in N$, – корені рівняння

$$tg\lambda R = -\frac{C_1}{\lambda k}. \tag{4.14}$$

Далі знаходиться розв'язок задачі II на часовому відрізку $t \in [t_1, t_2]$. Вона зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$\partial_t\rho(x,t) = k(t)\partial_x^2\rho(x,t),\ 0 < x < R,\ t \in [t_1, t_2],$$

який задовольняє крайові умови

$$\partial_x\rho(x,t)|_{x=R} = 0, \quad \partial_x\rho(x,t)|_{x=0} = 0, \quad t \in [t_1, t_2]$$

і початкову умову

$$\rho(x,t)|_{t=t_1} = L(x-R)^2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(B_n - \frac{A_n}{\varphi_n^2 k} \right) e^{-\varphi_n^2 kt_1} + \frac{A_n}{\varphi_n^2 k} \right) \left(\cos\varphi_n x - \frac{C_1}{\varphi_n k} \sin\varphi_n x \right),\ x \in [0; R],$$

де

$$L = -\frac{C_1\rho_0}{2kR - C_1R^2}, \quad A_n = \frac{4L}{R\varphi_n} \left(\sin\varphi_n R + \frac{C_1}{\varphi_n k}(\cos\varphi_n R - 1) \right),$$

$$B_n = \frac{2}{R\varphi_n k}(((\mu\varphi_n^3 k + 2L\varphi_n k)\sin\varphi_n R + (2L\varphi_n^2 C_1)\cos\varphi_n R) -$$

$$-(\varphi_n^2(\mu C_1 + 2LRk - LR^2C_1) + 2LC_1)),$$

а $\varphi_n,\ n \in N$, – корені рівняння (4.14).

ВИСНОВКИ

Основними результатами, наведеними в звіті, є такі:

– для одного класу $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем, які можуть мати виродження на початковій гіперплощині та коефіцієнти яких можуть необмежено зростати при $|x| \to \infty$, побудована фундаментальна матриця розв'язків, вивчені її властивості, встановлена коректна розв'язність задачі з початковими умовами у випадку відсутності або слабкого виродження і задачі без початкових умов, коли виродження сильне;

– для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях уведені $\Lambda_\delta^{m,r}$–умови, які виділяють спеціальні класи таких систем; для систем із цих класів доведені теореми про стійкість розв'язків задачі Коші, коректну розв'язність задачі без початкових умов, типу Ліувілля і про побудову та оцінки фундаментальної матриці розв'язків $\overrightarrow{2b}$–еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$–параболічними;

– для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова досліджені властивості фундаментального розв'язку та коректна розв'язність задачі Коші у вагових L_p–просторах і просторах Гельдера;

– встановлені необхідні й достатні умови нетривіальності просторів $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$ та зв'язок між просторами $W_{\vec{M}}^{\vec{\Omega}}$, $W^{\vec{\Omega}}$ і $W_{\vec{M}}$;

– описана топологічна структура просторів, які є розширенням просторів типу W та з'ясоване питання їхньої двоїстості за Фур'є;

– знайдені критерії згортувачів та мультиплікаторів у просторах типу S, а також класи згортувачів у цих просторах, які містять у собі клас фінітних узагальнених функцій;

– побудований оператор Бесселя дробового інтегро-диференціювання з додатним параметром у просторах типу S та його продовження на простори узагальнених функцій повільного зростання;

– встановлена коректна розв'язність задачі Коші для параболічних за Петровським, Ейдельманом і Шиловим диференціальних рівнянь, а також для деяких класів псевдодиференціальних рівнянь поліноміального та інтегрального виглядів з початковими даними в просторах топологічно спряжених до просторів, породжених визначальними властивостями їх відповідних фундаментальних розв'язків;

– описані "максимальні" класи початкових даних зазначених задач Коші, які забезпечують не лише існування та єдиність розв'язків, а й наявність у цих розв'язків тих властивостей гладкості та поведінки в околах нескінченно віддалених точок, що й у фундаментальних розв'язків цих задач;

– запропонований альтернативний метод дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних за Шиловим рівнянь, який не використовує додаткову характеристику – рід рівняння;

– доведені теореми про якісні властивості розв'язків задач Коші;

– метод інтегральних многовидів поширений на новий клас лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь із відхиленням аргументу в швидких і повільних змінних;

– за допомогою центрального й стійкого інтегральних многовидів лінійна сингулярно збурена система із запізненням у швидких і повільних змінних зводиться до звичайного диференціального рівняння на центральному многовиді та інтегральних рівнянь на стійкому многовиді;

– одержаний наближений розклад інтегрального многовиду за степенями малого параметра для системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь;

– для системи диференціально-різницевих рівнянь у стандартній формі одержане друге наближення у методі усереднення та досліджена стійкість системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням;

– знайдений алгоритм наближеного знаходження неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів для диференціально-різницевих систем запізнюючого та нейтрального типів;

– реалізований багатокритеріальний підхід до побудови оптимізаційних моделей статичного нелінійного еколого-економічного балансу та запропоновано алгоритм розв'язання відповідних задач на основі методу можливих напрямків;

– побудована та досліджена динамічна модель функціонування франчайзингу; знайдено умови оптимізації системи франчайзером у питанні ведення рекламної компанії та у питанні кількості франчайзі;

– побудована та досліджена математична модель процесу накопичення елемента змінної валентності в грунтових новоутвореннях у всіх можливих режимах;

– побудовані та досліджені економіко-математичні моделі розвитку промислового потенціалу регіону та розвитку регіональних інвестиційних потоків.

Розробка питань, яким присвячений звіт, є актуальною в зв'язку із внутрішніми запитами розвитку теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики, а також із необхідністю побудови й дослідження математичних моделей реальних процесів.

Усі наведені в звіті результати є новими і мають наукову цінність. Вони можуть застосовуватись у теорії диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь, теорії випадкових процесів, при математичному моделювання фізичних, технічних, соціально-економічних і виробничих процесів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Ivasyshen S.D., Pasichnyk H.S.* On resolvability of the Cauchy problem for parabolic systems with growing coefficients // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations"(Kyiv, August 22–28, 2001): Book of abstracts. — Donetsk, 2001. — P. 57.

2. *Пасічник Г.С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука (16–19 травня 2002 р., Київ). — К.: НТУУ "КПІ 2002. — С.154.

3. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про розв'язність задачі Коші для параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Нелинейные граничные задачи. — Донецк, 2002. — № 12. — С.84–91.

4. *Пасічник Г.С.* Про задачу Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 4. — С.138-143.

5. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. — 390 p. — (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).

6. *Пасічник Г.С.* Про оцінки роз'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині // Міжнар. конф., присв. 125-й річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р.): Тези доп. — Чернівці, 2004. — С.82–83.

7. *Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.): Тези доп.

— Львів, 2004. — С.161.

8. *Пасічник Г.С., Тимків І.Р.* Крайові задачі параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 228. Математика. — Чернівці: Рута, 2004. — С.89–95.

9. *Пасічник Г.С., Черевко І.М., Мельничук В.Ф.* Вектор-функції Гріна деяких крайових задач для параболічних рівнянь із зростаючими коефіцієнтами і виродженням на початковій площині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. — Чернівці: Рута, 2005. — С.82–88.

10. *Пасічник Г.С., Мельничук В.Ф.* Про крайові задачі для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Intern. Conf. "Modern Problems and New Trends in Probability Theory"(Chernivtsi, June 19–26, 2005): Abstracts II. — P. 88.

11. *Балабушенко Т.М.* Про вектор-функції Гріна деяких параболічних задач Фур'є // Міжнар. конф., присв. 125-й річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р.): Тези доп. — Чернівці, 2004. — С.9–10.

12. *Балабушенко Т.М.* Про коректну розв'язність деяких параболічних задач Фур'є // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.): Тези доп. — Львів, 2004. — С.17.

13. *Лавренчук В.П.* Обернена задача визначення коефіцієнта в нелінійному параболічному рівнянні зі зростаючим коефіцієнтом // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Тези доп. Міжнар. конф. (Чернівці, 27–29 серпня 2001 р.) — Київ, 2001. — С.90–91.

14. *Лавренчук В.П.* Задача Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку із зростаючими коефіцієнтами // Міжнар. наук. конф.

"Шості Боголюбівські читання"(26–30 серпня 2003 р., Київ): Тези доп. — Київ, 2003. — С.119.

15. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. — 1999. — № 6. — С.18–22.

16. *Лавренчук В.П.* Задача Коші для нелінійного параболічного рівняння другого порядку з необмеженим коефіцієнтом і виродженням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. — Чернівці: Рута, 2000. — С.50–53.

17. *Aronson D.G., Besala P.* Parabolic equations with unbounded coefficients // Journal of differential equations. — 1967. — 3, № 1. — P.1–14.

18. *Balabushenko T.M.* On estimates of Green matrix of the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$–parabolic system in unbounded with respect to time variable domains and their applications // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations"(Kyiv, August 22–28, 2001): Book of abstracts. — Donetsk, 2001. — P.13.

19. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задач без початкових умов для деяких параболічних систем // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Тези доп. Міжнар. конф. (Чернівці, 27–29 серпня 2001 р.) — Київ, 2001. — С.11–12.

20. *Балабушенко Т.М.* Властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем на нескінченному часовому інтервалі // Міжнар. наук. конф. "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь"(1–5 жовтня 2001 р., Дрогобич): Тези доп. — Київ, 2001. — С.9.

21. *Балабушенко Т.М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$–

параболічних систем //Мат. студії. — 2002. — Т. 17, № 2. — С.163–174.

22. *Балабушенко Т.М.* Властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем в областях, необмежених відносно часової змінної // Мат. студії. — 2002. — Т. 18, № 1. — С.69–78.

23. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2002. - Т. 45, № 4. - С. 19-26.

24. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. — 2002. — № 411. — С.6–11.

25. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Свойства решений общих $\overrightarrow{2b}$–параболических систем в неограниченных по временной переменной областях // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (16–19 травня 2002 р., Київ). — Київ: НТУУ "КПІ 2002. — С.16.

26. *Балабушенко Т.М.* Побудова та оцінки фундаментальних матриць розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$–еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$–параболічною системою // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.160. Математика. — Чернівці: Рута, 2003. — С.5–10.

27. *Балабушенко Т.М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях матриці Гріна задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем та їх застосування // Нелинейные граничные задачи. — Донецк, 2003. — № 13. — С.3–9.

28. *Балабушенко Т.М.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем довільних порядків в необмежених за часовою змінною областях // Міжнар.

наук. конф. "Шості Боголюбівські читання"(26–30 серпня 2003 р., Київ): Тези доп. — Київ, 2003. — С.24.

29. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Івасишин Л.М.* Фундаментальні матриці розв'язків поліноміальної в'язки еліптичних систем, породжених параболічною системою // III Всеукраїнська наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"(9–12 вересня 2003 р., Івано-Франківськ): Тези доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С.8.

30. *Балабушенко Т.М., Івасишин Л.М.* Фундаментальні матриці розв'язків поліноміальної в'язки еліптичних систем, породжених параболічною системою // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 4. — С.95–100.

31. *Балабушенко Т.М.* Про матрицю Гріна задачі Коші та властивості розв'язків деяких $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем другого порядку за часом // Конф. молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С.Підстригача (24–27 травня 2005 р., Львів): Тези доп. — Львів, 2005. — С.254.

32. *Балабушенко Т.М.* Властивості розв'язків деяких параболічних рівнянь у необмежених за часом областях // Intern. Conf. "Modern Problems and New Trends in Probability Theory"(Chernivtsi, June 19–26, 2005): Abstracts I. — Chernivtsi, 2005. — P.23.

33. *Івасюк Г.П.* Про початкову задачу для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С.Підстригача (24–27 травня 2005 р., Львів): Тези доп. — Львів, 2005. — С.288–289.

34. *Івасюк Г.П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури // Науковий вісник Чернівецького

ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.269. Математика. — Чернівці: Рута, 2005. — С.49–52.

35. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 443 с.

36. *Івасишен С.Д., Кондур О.С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. — 2000. — Т. 14, № 1. — С.73–84.

37. *Івасишин Л.М.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних систем високого порядку по часовій змінній у півпросторі R_+^{n+1} // Доп. НАН України. — 1998. — № 1. — С.17–23.

38. *Фущич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С.* О новой математической модели процессов теплопроводности // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 2. — С.237–245.

39. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1965. — Т. 83. — С.3–163.

40. *Kolmogorov A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. — 1934. — Vol.35. — P.116–117.

41. *Dron' V.S.* On correct solvability of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations of Kolmogorov tyre // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations"(Kyiv, August 22–28, 2001): Book of abstracts. — Donetsk, 2001. — P.43.

42. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Структура і оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші для одного ультрапараболічного рівняння // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Тези доп. Міжнар. конф., 27–29 серпня 2001 р. — Київ, 2001. — С.53.

43. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Структура та оцінки фундаментального

розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика. — Чернівці: Рута, 2001. — С.41–50.

44. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку // III Всеукраїнська наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"(9–12 вересня 2003 р., Івано-Франківськ): Тези доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С.35.

45. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Український мат. вісник. — 2004. — Т. 1, № 1. — С.61–68.

46. *Івасишен С.Д., Дронь В.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я.Скоробагатька (27 вересня – 1 жовтня 2004 р., Дрогобич): Тези доп. — Львів, 2004. — С.86.

47. *Ейдельман С.Д., Івасишен С.Д., Дронь В.С.* Про фундаментальний розв'язок рівняння Колмогорова деяких вироджених дифузійних процесів // Intern. Conf. "Modern Problems and New Trends in Probability Theory"(Chernivtsi, June 19–26, 2005): Abstracts I. — Chernivtsi, 2005. — P.78.

47. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Dron' V.S., Layuk V.V.* The Cauchy problem for general degenerate Fokker-Planck-Kolmogorov equations // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations"(Alushta, September 17–23, 2005): Book of abstracts. — Donetsk, 2005. — P.28.

49. *Лаюк В.В.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь типу Колмогорова // Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука (13–15 травня 2004 р., Київ). — К., 2004. — С.430.

50. *Лаюк В.В.* Про оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь типу Колмогорова // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (24–27 травня 2005 р., Львів): Тези доп. — Львів, 2005. — С.294–295.

51. *Лаюк В.В.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних // Intern. Conf. "Modern Problems and New Trends in Probability Theory"(Chernivtsi, June 19–26, 2005): Abstracts II. — Chernivtsi, 2005. — P.2–3.

52. *Лаюк В.В.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.239. Математика. — Чернівці: Рута, 2005. — С.82–85

53. *Літовченко В.А.* Коректна розв'язність однієї задачі Коші // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 8. — С.1067–1076.

54. *Літовченко В.А.* Цілковита розв'язність задачі Коші у просторах типу S для рівнянь, параболічних за Петровським // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 11. — С.1467–1479.

55. *Litovchenko V.* Cauchy problem for equations with fractional differentiation Bessel operator in the space of temperate distributions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — Vilnius. — Vol. 8, № 1. — 2003. — С.61–75.

56. *Літовченко В.А.* Коректна розв'язність задачі Коші для рівняння з псевдодиференціальним оператором Бесселя // Доп. НАН України. — 2003. — № 2. — С.21–25.

57. *Літовченко В.А.* Коректна розв'язність задачі Коші для одного інте-

грального вигляду // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 2. — С.185–197.

58. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. - Чернівці: Рута, 2001. - С. 21 - 26.

59. *Готинчан Т.І., Шеленко О.В.* Простори типу W багатьох змінних // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука (16 – 19 травня 2002 р., Київ). — Київ: НТУУ "КПІ 2002. — С.253.

60. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика. — Чернівці: Рута, 2003. — С.39–44.

61. *Готинчан Т.І.* Теорема Фрагмента-Ліндельофа для функцій з просторів типу W // Міжнар. наук. конф. "Шості Боголюбовські читання"(26 – 30 серпня 2003 р., Київ): Тези доп. — Київ, 2003. — С.51.

62. *Готинчан Т.І.* Про поведінку цілих функцій з просторів типу W // Міжнар. конф., присв. 125-й річниці від дня народження Ганса Гана. (Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р.): Тези доп. — Чернівці, 2004. — С.28.

63. *Літовченко В.А.* Про одне узагальнення просторів типу S // Міжнарод. конф., присв. 125-й річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р.): Тези доп. — Чернівці, 2004. — С.53–54.

64. *Літовченко В.А.* Повна розв'язність задачі Коші для одного псевдодиференціального рівняння у просторах типу S // Мат. студії. — 2002. — Т. 17, № 2. — С.189–198.

65. *Літовченко В.А.* Бесселеве дробове інтегродиференціювання з додатним параметром // Наук. вісник Чернівецького у-ту. Вип.134. Математика. — Чернівці: Рута, 2002. — С.65–70.

66. *Litovchenko V.* Solvability in the whole of the Couchy problem on the spases of type S for parabolic equation // Матеріали Міжнар. наук. конф., присв. 110-й річниці С.Банаха (28–21 травня 2002 р., Львів). — Львів, 2002. — С.122.

67. *Литовченко В.А.* Полная разрешимость задачи Коши в пространствах типа S для $\overrightarrow{2b}$–параболических уравнений // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2003. — Т. 8, № 5. — С.4–7.

68. *Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних за Шиловим рівнянь у класах узагальнених функцій повільного зростання // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука (16-19 травня 2002р., Київ). — Київ: НТУУ "КПІ 2002. — С.121.

69. *Литовченко В.А.* Корректная разрешимость задачи Коши для одного псевдоинтегро дифференциального уравнения интегрального вида в пространствах типа S // Нелинейные граничные задачи. - Донецк, 2003. — № 13. — С.105–113.

70. *Литовченко В.А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 4. — С.809–821.

71. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 307 с.

72. *Schwartz L.* Theorie des distributions // Acta. Sci industr. — Vol. 1, № 1091. — 1950. — P.101–135.

73. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.

74. *Гуревич Б.Л.* Новые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно–разностных систем // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 99, № 6. — С.893–896.

75. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

76. *Літовченко В.А.* Зображення узагальненого диференціювання за Е.Постом у класичній формі дробового диференціювання // Наук. вісник Чернівецького у-ту. Вип.76. Математика. — Чернівці: Рута, 2000. — С.54–60.

77. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Про дробове диференціювання у просторах типу S // Доп. НАН України. — Київ, 1998. — № 11. — С.20–24.

78. *Черевко І.М., Білоголовка Т.Т.* Інтегральні многовиди повільних змінних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь // Міжнар. конф., присвячена 125-й річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р.): Тези доп. — Чернівці, 2004. — С.116.

79. *Черевко І.М.* Сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння із запізненням у швидких і повільних змінних // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я.Скоробагатька (Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.): Тези доп. — Львів, 2004. — С.223.

80. *Cherevko I.M., Perestyuk N.A.* Integral manifolds in singularly perturbation problems for functional differential equations // Intern. workshop "Analysis and its applications": Abstract of talks. — Mersin, 2004. — P.22.

81. *Черевко І.М.* Інтегральні многовиди повільних змінних лінійних сингулярно збурених періодичних диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.269. Математика. — Чернівці: Рута, 2005. — С.120–124.

82. *Halanay A.* An invariant surface for some linear singularly perturbed systems with time lag // J. Diff. Eqs. — 1966. — Vol. 2, № 1. — P.33–46.

83. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально–разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 34, № 6. — С.725–731.

84. *Халанай А.* Периодические и почти периодические решения некоторых сингулярно возмущенных систем // Rev. Math. Pure Appl. — 1963. — Vol. 8, № 2. — P.285–292.

85. *Черевко И.М.* Оценка фундаментальной матрицы сингулярно возмущенных дифференциально–функциональных уравнений и некоторые ее применения // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 2. — С.281–283.

86. *Черевко І.М.* Про інтегральні многовиди сингулярно збурених диференціально–функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2000. — Т. 3, № 4. — С.562–570.

87. *Черевко І.М.* Асимптотика інтегральних многовидів лінійних сингулярно збурених диференціально–функціональних рівнянь // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2000. — № 4. — С.122–129.

88. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України. — 2002. — № 6. — С.32–36.

89. *Perestyuk M.O., Cherevko I.M.* Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations // Nonlinear Oscillations. — 2001. — Vol. 4, № 3. — P.345–353.

90. *Хейл Дж.* Теория функционально–дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

91. *Hale J.* Linear functional-differential equations with constant coefficients // Contr. to Diff. Eqs. — 1963. — № 2. — P.291–319.

92. *Hale J.K., Perello C.* The neighborhood of singular point of functional differential equations // Contr. to Diff. Eqs. — 1964. — Vol. 3, № 3. — P.351–375.

93. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in nonlinear partial differential equations // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations"(Kyiv, August 22–28, 2001): Book of abstracts. — Donetsk, 2001. — P.63.

94. *Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". № 411. Прикладна математика. — Львів : Вид-во Нац.ун-ту "Львівська політехніка 2000. — С.160–165.

95. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально–різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.150. Математика. — Чернівці: Рута, 2002. — С.36–41.

96. *Клевчук І.І.* Стійкість системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням // Intern. Conf. "Dynamical systems modelling and stability investigation". — Kyiv, 2003. — С.63.

97. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням // III Всеукраїнська наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"(9–12 вересня 2003 р.,Івано-Франківськ): Тези доп. — Івано–Франківськ, 2003. — С.48.

98. *Klevchuk Ivan.* Reduction of boundary value problems to difference and differential difference equations // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations". — Donetsk, 2003. — P.104.

99. *Клевчук І.І.* Дослідження одновимірних відображень з абсолютно неперервною інваріантною мірою // Міжнар. конф., присв. 125-й річниці від дня

народження Ганса Гана (Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р.): Тези доп. — Чернівці, 2004. — С.41.

100. *Клевчук І.І.* Применение критерия Мельникова для иссле-дования сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // VII Крымская Междунар. мат. школа "Метод функций Ляпунова и его приложения": Тез. докл. — Симферополь, 2004. — С.72.

101. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних неавтономних сингулярно збурених систем із запізненням // Intern. Conf. "Dynamical systems modeling and stability investigation". — Kyiv, 2005. — С.59.

102. *Клевчук І.І.* Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку // Міжнар. конф., присв. 60–річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь КНУ ім. Т.Шевченка (6–9 червня 2005 р., Київ): Тези доп. — Київ, 2005. — С.41.

103. *Клевчук І.І.* Застосування методу інтегральних многовидів до дослідження диференціально-функціональних рівнянь // Intern. Conf. "Modern Problems and New Trends in Probability Theory"(Chernivtsi, June 19–26, 2005): Abstracts I. — С.111.

104. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.269. Математика. — Чернівці: Рута, 2005. — С.56–59.

105. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 4. — С.563–567.

106. *Hale J.K.* Flow on center manifolds for scalar functional differential equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. — 1985. — A101, № 1. — P.193–201.

107. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интеграль-ные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1986. — Т. 38, № 3. — С.335—340.

108. *Клевчук І.І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 8. — С.1022–1028.

109. *Hale J.K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. — 1966. — Vol.2, № 1. — P.57–73.

110. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 502 с.

111. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

112. *Фодчук В.І., Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1986. — № 8. — С.23–25.

113. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 4.— С.464–472.

114. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Про апроксимацію неасимптотичних коренів квазіполіномів для систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.191–192. Математика. — Чернівці: Рута, 2004. — С.119–122.

115. *Пинни Е.* Обыкновенные дифференциально разностные уравнения. — М.: ИЛ, 1961. — 248 с.

116. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. —

М.: Мир, 1967. — 548 с.

117. *Бернік В.О., Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Алгоритм знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. праць. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — С.30–35.

118. *Черевко І.М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. — С.74–84.

119. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. — 1965. — № 2. — С.226–235.

120. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 1999. — Т. 2, № 1. — С.42–50.

121. *Піддубна Л.А.* Наближене знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Системи еволюційних рівнянь з післядією. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. — С.89–97.

122. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Алгоритм апроксимації диференціально-різницевих рівнянь її моделювання процесів електродинаміки // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 1999. — № 2. — С.111–118.

123. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація системи диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.150. Математика. — Чернівці: Рута, 2002. — С.50–54.

124. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.— 552 с.

125. *Григоркiв В.С., Кушнiрчук В.Й.* Багатокритерiальна оптимiзацiйна модель з нелiнiйним еколого-економiчним мiжгалузевим балансом // Економiчна кiбернетика. — 2003. — № 3–4. — С.43–50.

126. *Школа I.М., Шилепницький П.I., Зибарева О.В., Вербiвська Л.В., Дронь В.С.* Тренсформацiйнi процеси економiки України в регiональному вимiрi: Монографiя. — Чернiвцi: Книги – XX, 2004. — 360 с.

127. *Ляшенко I.М.* Економiко–математичнi методи та моделi сталого розвитку. — Київ: Вища школа, 1999. — 236 с.

128. *Ляшенко И.Н., Михалевич М.В., Утеулиев Н.У.* Методы эколого–экономического моделирования. — Нукус: Билим, 1994. — 236 с.

129. *Леонтьев В.В., Форд Д.* Межотраслевой анализ влияния структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. — 1972. — Т.8, № 3. — С.370–400.

130. *Григоркiв В.С.* Оптимiзацiйна модель з нелiнiйним динамiчним мiжгалузевим балансом // Волинський мат. вiсн. — 1999. — Вип.6. — С.47–52.

131. *Жадан В.Г., Кушнирчук В.И.* Метод возможных направлений для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1987. — Т.27, № 6. — С.829–838.

132. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

133. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматгиз, 2001. — 320 с.

134. *Легейда Е.* Жизненный цикл франчайзинга // Бизнесинформ. — 1997. — № 5. — С.28–33.

135. *Зайдельман Ф.Р., Никифорова А.С.* Генезис и диагностическое значе-

ние новообразований почв лесной и лесостепной зон. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 216 с.

136. *Дронь Ю.С.* Грунтовий гідрофорфізм та його оцінки: Монографія. — Чернівці: Книги – XXI, 2004. — 102 с.

137. *Дронь В.С., Дронь Ю.С.* Функціональна модель накопичення елементів грунтових ортштейнів // Тези доп. Сьомої міжн. наук.–техн. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології "(28 червня – 2 липня 2005 р.). — Київ, 2005. — С.32.

138. *Дронь В.С., Дронь Ю.С.* Математична модель накопичення елементів змінної валентності у грунтових ортштейнах // Тези доп. XII Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"(4 – 6 жовтня 2005 р.) — Львів, 2005. — С.80.