УДК 517.95+517.929+519.863
№ держреєстрації 0111U000181
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ЧНУ ім. Ю. Федьковича
58000, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
тел. (0372) 52-61-42, nd-office@chnu.edu.ua

З А Т В Е Р Д Ж У Ю

Проректор з наукової роботи
та міжнародних зв'язків

професор _______Фочук П.М.

____________2015 р.

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ І ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ З ПІСЛЯДІЄЮ ТА ВИПАДКОВОСТЯМИ

(заключний)

Керівник НДР
д.ф.-м.н., професор ____________ Черевко І.М.

2015

С П И С О К   А В Т О Р І В

1. Професор кафедри, доктор фіз.-мат. наук, професор	____________	Черевко І.М. (реферат, вступ, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, висновки)
2. В.о. завідувача кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Піддубна Л.А. (3.4, 4.1, 4.2)
3. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Клевчук І.І. (3.1, 3.2)
4. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Пасічник Г.С. (1.1, 1.2)
5. Доцент кафедри кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Івасюк Г.П. (1.3)
6. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Фратавчан Т.М. (1.3)
7. Доцент кафедри кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Матвій О.В. (3.4, 4.1)
8. Асистент кафедри кандидат фіз.-мат. наук	____________	Іліка С.А. (3.4, 4.1)
9. Асистент кафедри кандидат фіз.-мат. наук	____________	Перцов А.С. (4.5)
10. Асистент кафедри	____________	Строєв О.М. (4.3, 4.4)
11. Асистент кафедри	____________	Дорош А.Б. (4.2)
12. Аспірант кафедри	____________	Осипова О.В. (3.3.2)

13. Асистент кафедри кандидат фіз.-мат. наук	_____________	Горбатенко М.Ю. (4.5)
14. Здобувач кафедри	_____________	Довжицька І.М. (2.1)
15. Здобувач кафедри	_____________	Васько О.Б. (2.2, 2.3)
Нормоконтролер	_____________	Холодницька Л.М.

Р Е Ф Е Р А Т

Звіт про НДР: 147 с., 197 джерел.

Об’єкт дослідження – параболічні системи типу Шилова та вироджені параболічні системи рівнянь типу Колмогорова векторного порядку, системи регулярно та сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь, квазілінійні рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом, крайові задачі для рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана.

Мета роботи – дослідження фундаментальних розв’язків задачі Коші для нових класів параболічних систем типу Шилова та вироджених параболічних системи рівнянь типу Колмогорова векторного порядку, аналіз асимптотичної поведінки розв’язків диференціально-функціональних рівнянь, побудова схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь, доведення мінімаксних оцінок функціоналів від розв’язків крайових задач та дослідження і математичне моделюванню динамічної моделі теорії ризиків.

Для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів у спеціальних вагових просторах досліджено фундаментальний розв’язок задачі Коші, а з його допомогою доведено теореми про коректну розв’язність задачі Коші та інтегральне зображення розв’язку. Означено новий клас параболічних систем типу Г. Є. Шилова з невід’ємним родом і коефіцієнтами, залежними від часової та просторової змінних, та встановлено коректну розв’язність задачі Коші для систем рівнянь із означеного класу у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова. Обґрунтовано алгоритми підвищеної точності наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів для лінійних автономних диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями і запропоновано схему знаходження коефіцієнтних областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Досліджено поведінку процесу ризику з перестрахуванням, знайдено граничні умови поведінки розв’язку процесу ризику за умови невід’ємного перестрахування та отримано представлення для мінімаксних оцінок функціоналів від розв’язків крайових задач для рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана

Усі наведені в звіті результати є новими. Вони можуть застосовуватись у теорії диференціальних, диференціально-функціональних рівнянь, теорії випадкових процесів, при математичному моделювання фізичних, технічних, економічних і виробничих процесів.

ПАРАБОЛІЧНІ, ЕВОЛЮЦІЙНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ВИРОДЖЕННЯ, СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ, ЗАДАЧА КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, КОРЕКТНА РОЗВ’ЯЗНІСТЬ, ІНТЕГРАЛЬНИЙ МНОГОВИД, МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ, МІНІМАКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ, СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ, ПРОЦЕС РИЗИКУ.

ЗМІСТ

ВСТУП

У звіті наведені результати, які одержані протягом 2011-2015 рр. співробітниками кафедри математичного моделювання ЧНУ при виконанні НДР "Методи аналізу диференціально-функціональних і еволюційних рівнянь та математичне моделювання процесів з післядією та випадковостями". Ці дослідження є продовженням виконаної в 2006-2010 рр. кафедрою математичного моделювання НДР "Якісне дослідження та математичне моделювання процесів, що описуються диференціальними та диференціально-функціональними рівняннями".

У звіті представлені в основному результати, що стосуються дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші для нових класів параболічних систем типу Шилова та вироджених параболічних системи рівнянь типу Колмогорова векторного порядку, аналізу асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, побудови схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь, а також математичному моделюванню процесів з випадковостями. Звіт складається з 4 розділів.

Результати, що представлені в першому розділі, стосуються вивчення фундаментальних розвязків задачі Коші для параболічних рівнянь зі зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами. Одержані результати про ФРЗК застовано до встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші у просторах швидкозростаючих при $|x| \to \infty$ функцій.

Другий розділ містить результати про побудову та дослідження фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічних за Шиловим систем рівнянь із залежними від часу коефіцієнтами. Досліджено умови різного виду рівномірної та слабкої стабілізації до нуля розв'язку задачі Коші. Для нового класу вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова векторного порядку побудовано ФМРЗК, досліджено її якісні властивості гладкості та поведінки в околі нескінченно віддалених просторових точок.

У третьому розділі наведено результати, пов'язані із дослідженням систем сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь. Одержано зображення інтегрального многовиду таких систем та достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь. Побудована розщеплююча заміна змінних для сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами та досліджено побудову асимптотичних розкладів інтегральних многовидів, за допомогою яких здійснюється розщеплення вихідної системи. У цьому розділі здійснено аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та обгрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

У четвертому розділі наводяться результати застосування схем апроксимації систем диференціально-різницевих рівняннь з багатьма запізненнями для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів підвищеної точності, побудови областей стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням, а також знаходження області значень запізнення для яких вихідна система зберігає властивості стійкості. У цьому ж розділі отримано мінімаксні оцінки функціоналів та здійсненно дослідження динамічної моделі теорії ризиків.

Дослідження, результати яких увійшли до звіту, використовуються при виконанні студентами курсових, дипломних і магістерських робіт. За їх матеріалами захищено кандидатські дисертації А. С. Перцова (2013 р., науковий керівник Ю. К. Подліпенко), С. А. Іліки (2013 р., науковий керівник І. М. Черевко), І. М. Довжицької (2014 р., науковий керівник В. А. Літовченко).

Виконавці НДР брали активну участь у роботі міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Ними зроблено 80 доповідей.

1 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ТА ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цьому розділі наводяться результати досліджень, що доповнюють і розвивають проведені в праці [32] дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) для параболічних рівнянь зі зростаючими при $|x| \to +\infty$ коефіцієнтами та рівнянь із класів $\mathbf{E_{22}}$. Рівняння з класу $\mathbf{E_{22}}$ є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова [33], є виродженими параболічними рівняннями, належать до класу ультрапараболічних рівнянь і зустрічаються при дослідженні різних фізичних явищ в так званому дифузійному наближенні. Ці математичні моделі в багатьох важливих випадках (наприклад, при вивченні броунівського руху) досить адекватно і відносно просто описують реальні явища. Часто ці рівняння визначають еволюцію марковського випадкового процесу, який функціонує в неперервному часі. Природно такі рівняння називають рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова.

Результати про ФРЗК застовано до встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші у просторах швидкозростаючих при $|x| \to \infty$ функцій.

Наведені в цьому розділі результати отримані Пасічник Г.С. спільно з професором Івасишеним С.Д. (п. 1.1 та 1.2) та Івасюк Г.П. і Фратавчан Т.М. спільно з професором Івасишеним С.Д.(п. 1.3), опубліковано в працях [1–31] та висвітлено в 21 доповіді на наукових конференціях різного рангу.

Сформульовані далі теореми та їх наслідки є результатами реалізації для рівняння (1.1) конструкції Ейдельмана–Івасишена, описаної і реалізованої для параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами [32, 34]. Ця конструкція дає можливість отримувати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та зображення визначених у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]}$, де $\Pi_H := H \times \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}$ розв'язків через їх граничні значення на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$. Згідно з цією конструкцією еволюція по часу t розв'язків характеризується їх належністю до сімейства банахових просторів, залежних від t.

Наведемо деякі позначення, які використовуються в цьому розділі. Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, ..., x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2})$.

1.1 Задача Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами

У теорії випадкових процесів і статистичній радіотехніці виникають параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти є сталими. Такі рівняння є рівномірно параболічними за І.Г. Петровським рівняннями зі змінними необмежено зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. У цьому пункті розглядаються деякі зі згаданих рівнянь.

Розглядається рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x) := \left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - a_0\right)u(t,x) - b\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_j u(t,x)) = 0,$$
$$t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

і спряжене до нього рівняння

$$(L^*v)(\tau,\xi) := \left(\partial_\tau - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} - a_0\right)v(\tau,\xi) + b\sum_{j=1}^{n}\xi_j\,\partial_{\xi_j}v(\tau,\xi) = 0,$$
$$\tau<0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

де n – задане натуральне число, a_{jl}, a_j, a_0 і b – задані дійсні числа, $a_{jl}=a_{lj}$, $\{j,l\}\subset\{1,\ldots,n\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\,\delta>0 \;\; \forall\,\sigma\in\mathbb{R}^n: \;\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\sigma_j\sigma_l \ge \delta|\sigma|^2. \tag{1.3}$$

Позначимо через A матрицю $(a_{jl})_{j,l=1}^n$. Умову (1.3) можна переписати у вигляді

$$\exists\,\delta>0 \;\; \forall\,\sigma\in\mathbb{R}^n: \;(A\sigma,\sigma)\ge\delta|\sigma|^2. \tag{1.4}$$

Умова (1.4) гарантує існування оберненої матриці $A^{-1} := (a^{jl})_{j,l=1}^n$ та сталої $\delta_0>0$ такої, що

$$\forall\,\sigma\in\mathbb{R}^n: \quad (A^{-1}\sigma,\sigma)\ge\delta_0|\sigma|^2. \tag{1.5}$$

Означення 1.1. *ФРЗК для рівняння* (1.1) *називається функція* $G(t-\tau,x,\xi)$, $t>\tau$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *яка є розв'язком у сенсі теорії узагальнених функцій задачі*

$$LG(t-\tau,x,\xi)=0,\;\; t>\tau,$$
$$G(t-\tau,x,\xi)\,|_{t=\tau+}=\delta_\xi(x),\;\; x\in\mathbb{R}^n,$$

де τ *– довільне число з* $\mathbb{R}$ *і* ξ *– будь-яка точка з* $\mathbb{R}^n$*, а* δ_ξ *– дельта-функція Дірака, що зосереджена в точці* ξ*.*

Зазначимо, що рівняння (1.2), спряжене до параболічного рівняння (1.1), є обернено параболічним, тобто перетворюється в параболічне, якщо замість $-\tau$ запровадити нову незалежну змінну τ'.

Означення ФРЗК для спряженого рівняння (1.2) виглядає так.

Означення 1.2. *ФРЗК для рівняння* (1.2) *називається функція* $G^*(\tau - t, \xi, x)$*,* $\tau < t$*,* $\{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n$*, яка є розв'язком у сенсі теорії узагальнених функцій задачі*

$$L^*G^*(\tau - t, \xi, x) = 0, \quad \tau < t,$$
$$G^*(\tau - t, \xi, x) \mid_{\tau = t-} = \delta_x(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для довільних $t \in \mathbb{R}$ *і* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Для функції G знайдена така формула:

$$G(t, x, \xi) = (4\pi q(t))^{-n/2} (\det A)^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\Bigg\{(a_0 + nb)t - \frac{1}{4q(t)} \sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(e^{bt}x_j + a_j p(t) - \xi_j)(e^{bt}x_l + a_l p(t) - \xi_l)\Bigg\},$$
$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

де

$$p(t) := \begin{cases} \frac{1}{b}(e^{bt} - 1), \ b \neq 0, \\ t, \ b = 0, \end{cases} \qquad q(t) := \begin{cases} \frac{1}{2b}(e^{2bt} - 1), \ b \neq 0, \\ t, \ b = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

З формул (1.6) отримано наступні властивості ФРЗК G.

$\mathbf{1^0}$. Функція $G(t - \tau, x, \xi)$, $0 \leq \tau < t$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, як функція t і x є розв'язком рівняння (1.1), а як функція τ і ξ – розв'язком спряженого рівняння (1.2).

$\mathbf{2^0}$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x, \xi)\, d\xi = e^{(a_0 + nb)t}, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x, \xi)\, dx = e^{a_0 t}, \ t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbf{3^0}$. Для будь-яких мультиіндексів $\{\alpha, \beta\} \subset\subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G(t, x, \xi)| \le C_{\alpha\beta}(q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2} e^{\lambda_{|\alpha|}^b} E_c^b(t, x, \xi),$$
$$t > 0, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

в яких $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі,

$$\lambda_{|\alpha|}^b := (a_0 + (n + |\alpha|)b)t + \frac{\delta_0}{4}|\vec{a}|^2\, r(t),$$
$$r(t) := \frac{p^2(t)}{q(t)} = \begin{cases} \dfrac{2(e^{bt} - 1)}{b(e^{bt} + 1)}, \ b \ne 0, \\ t, \ b = 0, \end{cases}$$
$$E_c^b(t, x, \xi) := \exp\{-c\frac{|e^{bt}x - \xi|^2}{q(t)}\},$$

де функції p і q означені в (1.7), δ_0 – стала з нерівності (1.5).

З тверджень $\mathbf{2^0}$ і $\mathbf{3^0}$ отримуємо, що для будь-якої неперервної та обмеженої в $\mathbb{R}^n$ функції φ інтеграли

$$u(t, x; \tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t - \tau, x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad t > \tau, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$v(\tau, \xi; t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t - \tau, x, \xi)\, \varphi(x)\, dx, \quad \tau < t, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

задовольняють відповідно умови

$$\lim_{t \to \tau+} u(t, x; \tau) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

і

$$\lim_{t \to \tau-} v(\tau, \xi; t) = \varphi(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

На підставі твердження $\mathbf{1^0}$ та співвідношень (1.9) і (1.10) можна стверджувати, що функція $G(t - \tau, x, \xi)$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФРЗК для рівняння (1.1), а функція

$$G^*(\tau - t, \xi, x) := G(t - \tau, x, \xi), \quad \tau < t, \quad \{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n,$$

є ФРЗК для рівняння (1.2).

Наведемо інші властивості ФРЗК, які встановлюються добре відомими способами, що грунтуються на використанні відповідної формули Гріна–Остроградського.

$\mathbf{4^0}$. ФРЗК для рівняння (1.1) єдиний.

$\mathbf{5^0}$. Є правильною формула згортки

$$G(t-\tau,x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\gamma,x,y)G(\gamma-\tau,y,\xi)\,dy,$$
$$\tau<\gamma<t,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Щоб сформулювати наступну властивість, рівняння (1.1) перепишемо у вигляді

$$(Lu)(t,x) = \left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^n a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \sum_{j=1}^n b_j(x)\partial_{x_j} - b_0\right)u(t,x) = 0,$$
$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

де $b_j(x) := a_j + bx_j$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $b_0 := a_0 + nb$.

У теорії дифузійних випадкових процесів рівняння (1.11) є рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова відповідного дифузійного процесу. Цей процес характеризується матрицею дифузії $A := (a_{jl})_{j,l=1}^n$, вектором переносу $b(x) := (b_1(x),\ldots,b_n(x))$, $x\in\mathbb{R}^n$, і коефіцієнтом обриву (коефіцієнтом інтенсивності лінійних джерел) b_0. ФРЗК G для рівняння (1.11) трактується як густина перехідних ймовірностей дифузійного процесу.

У наступній властивості наводяться зображення елементів матриці дифузії A, координат вектора переносу $b(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, і коефіцієнта обриву b_0 через густину перехідних імовірностей G.

$\mathbf{6^0}$. Справджуються такі рівності

$$a_{jl} = \frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,z)z_jz_l\,dz\right),\quad \{j,l\}\subset\{1,\ldots,n\};$$
$$b_j(x) = \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,z)z_j\,dz\right) + bx_j,\quad j\in\{1,\ldots,n\};$$
$$b_0 = \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,z)\,dz - 1\right)\right).$$

Застосуємо результати про ФРЗК до встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші для рівняння (1.1) у просторах швидкозростаючих при $|x|\to\infty$ функцій.

У шарі $\Pi_{(0,T]}$ скінченної товщини $T > 0$ розглянемо задачу Коші для рівняння (1.1), тобто задачу

$$(Lu)(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.12}$$

$$u(t,x) \mid_{t=0+} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Введемо функції k і $\hat{k}$, визначені формулами

$$k(t,a) := \frac{c_0 a e^{2bt}}{c_0 - aq(t)}, \quad \hat{k}(t,a) := \frac{c_0 a e^{2|b|t}}{c_0 - aq(t)}, \quad t \in [0,T].$$

Зауважимо, що $k(0,a) = \hat{k}(0,a) = a$, $k(t,a) = \hat{k}(t,a)$, $t \in [0,T]$, якщо $b > 0$, і $k(t,a) < \hat{k}(t,a)$, $t \in (0,T]$, при $b < 0$; функція $\hat{k}$ монотонно зростає від значення $\hat{k}(0,a)$ до значення $\hat{k}(T,a)$; функція k має напівгрупову властивість

$$k(t-\tau, k(\tau,a)) = k(t,a), \quad 0 \le \tau \le t \le T.$$

Введемо вагові функції

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu\, k(t,a)|x|^2\},$$
$$\hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\{\nu\, \hat{k}(t,a)|x|^2\},$$
$$(t,x) \in \Pi[0,T], \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Поведінка при $|x| \to \infty$ функцій з означених нижче просторів описуватиметься функціями Ψ_ν і $\hat{\Psi}_\nu$ з $\nu \in \{-1, 1\}$.

Використовуватимемо для функцій $u: \ \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ при кожному $t \in [0,T]$ такі вагові норми:

$$||u(t,\cdot)||_0^{k(t,a)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(|u(t,x)| \Psi_{-1}(t,x) \Big),$$
$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t,a)} := ||u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$||u(t,\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)} := ||u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$p \in [1,\infty].$$

Позначимо через $C^{k(t,a)}$ і C^a простори неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними відповідно норми $||\varphi(\cdot)||_0^{k(t,a)}$ і $||\varphi(\cdot)||_0^a := ||\varphi(\cdot)||_0^{k(0,a)}$, та через $L_p^{k(t,a)}$, $L_p^{\hat{k}(t,a)}$ і L_p^a – простори вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченними відповідно нормами $||\varphi(\cdot)||_p^{k(t,a)}$, $||\varphi(\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)}$ і $||\varphi(\cdot)||_0^a$. Говоритимемо, що функція $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ належить до просторів $C^{k(\cdot,a)}$ і $L_p^{k(\cdot,a)}$, якщо відповідно $u(t,\cdot) \in C^{k(t,a)}$ і $u(t,\cdot) \in L_p^{k(t,a)}$ для кожного $t \in (0,T]$.

Нехай $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}R^n$, а M – сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через M^a позначимо сукупність усіх борельових мір $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int\limits_A \Psi_{-1}(0,x)\, d\,\mu(x), \;\; A \in \mathfrak{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^a$

$$\|\mu\|_p^a := \int\limits_A \Psi_{-1}(0,x)\, d\,|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ.

Використовуватимемо ще такі простори:

W_1 – простір усіх вимірних за Лебегом функцій $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма

$$\|\eta\|_{W_1} := \|\eta(\cdot)\hat{\Psi}_1(T,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

W_0 – простір усіх неперервних функцій $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що

$$\hat{\Psi}_1(T,x)\,|\eta(x)| \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0.$$

ФРЗК для рівняння (1.12) породжує інтеграл Пуассона функції φ

$$(P\varphi)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.14}$$

та інтеграл Пуассона узагальненої міри μ

$$(P_0\mu)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x,\xi)\,d\mu(x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.15}$$

Основними результатами є наступні теореми.

Теорема 1.1. *Якщо в задачі* (1.12), (1.13) $\varphi \in C^a$, *то формулою*

$$u(t,x) = (P\varphi)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.16}$$

визначається єдиний розв'язок задачі Коші (1.12), (1.13), *який належить до простору* $C^{k(\cdot,a)}$ *і для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_0^{k(t,a)} \le C\|\varphi(\cdot)\|_0^a, \quad t \in (0,T],$$

та для довільного компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ $u(t,x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varphi(x)$ *рівномірно щодо* $x \in K$.

Теорема 1.2. *Є правильними такі твердження:*

1) *для довільної функції* $\varphi \in L_p^a$ *формула* (1.16) *визначає єдиний розв'язок рівняння* (1.12)*, який належить до простору* $L_p^{k(\cdot,a)}$ *і для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\,\|\varphi(\cdot)\|_p^a, \quad t \in (0,T],$$

при $p \in [1,\infty)$ *– рівність*

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,x) - \varphi(x)\|_p^{\hat{k}(t,a)} = 0, \tag{1.17}$$

а при $p = \infty$ *– співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\varphi(x)dx \tag{1.18}$$

для будь-якої функції $\eta \in W_1$*;*

2) *для будь-якої узагальненої міри* $\mu \in M^a$ *формулою*

$$u(t,x) = (P_0\mu)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.19}$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (34), який належить до простору $L_1^{k(\cdot,a)}$ *і для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\|\mu\|^a, \quad t \in (0,T],$$

і співвідношення

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, d\mu(x) \tag{1.20}$$

для довільної функції $\eta \in W_0$.

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 2.

Теорема 1.3. *Нехай* u *– розв'язок рівняння* (1.12) *в* $\Pi_{(0,T]}$*, для якого справджується нерівність*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C, \quad t \in (0,T], \tag{1.21$_p$}$$

з деякими сталими $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді при* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^a$*, а при* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^a$ *такі, що розв'язок* u *зображхується відповідно у вигляді* (1.16) *і* (1.19)*.*

Наслідок 1.1. *З теорем 2 і 3 випливають такі твердження:*

1) простори L_p^a і M^a є множинами початкових значень розв'яків рівняння (1.12) *тоді й тільки тоді, коли ці розв'язки задовольняють умову* (1.21_p) *при* $p \in (1, \infty]$ *і при* $p = 1$ *відповідно;*

2) *для зображення розв'яків рівняння* (1.12) *у вигляді* (1.16) *чи* (1.19) *з* $\varphi \in L_p^a$ *і* $\mu \in M^a$ *необхідно й досить, щоб виконувалась умова* (1.21_p)*;*

3) *розв'язки рівняня (34), для яких виконується умова* (1.21_p) *задовольняють початкові умови при* $t = 0$ *в сенсі* (1.17), (1.18) *і* (1.20).

Наслідок 1.2. *Нехай* U_p *– клас усіх розв'язків рівняння* (1.12)*, які належать до простору* $L_p^{k(\cdot,a)}$ *і для яких виконується умова* (1.21_p)*. З теорем 2 і 3 та наслідку 1 випливає, що класи* U_p*,* $p \in (1, \infty]$*, і* U_1 *є множинами значень операторів* P *і* P_0*, визначених формулами* (1.14) *і* (1.15) *на відповідно просторах* L_p^a M^a*, причому ці оператори встановлюють відповідно гомеоморфізми* $L_p^a \leftrightarrow U_p$ *і* $M^a \leftrightarrow U_1$.

Сформульвані тут результати доведені в [5].

Як видно, ФРЗК для рівняння (1.1) визначений формулою (1.6) та його оцінки (1.8) справджуються для всіх $t > 0$. Це дозволяє подібно до досліджувати властивості розв'язків рівняння (1.1) на необмежених часових інтервалах, зокрема встановлювати коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші на часовому інтервалі $(0, \infty)$ і задачі без початкових умов на інтервалі $(-\infty, T]$, $T \in \mathbb{R}$, а також доводити теореми про стійкість нульового розв'язку задачі Коші та теореми типу Ліувілля.

1.2 Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів

Розглядається рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} - b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\right)u(t,x) = 0,$$
$$t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.22}$$

де a_{jl} і b – дійсні сталі, причому $a_{jl} = a_{lj}$, $\{j, l\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \ \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2. \tag{1.23}$$

Позначатимемо через $A_{n_l n_k}$ матрицю $(a_{js})_{j,s=1}^{n_l,n_k}$, $\{l,k\} \subset \{1,2,3\}$. Умову (1.23) можна переписати у вигляді

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \ (A_{n_1 n_1}\sigma_1, \sigma_1) \geq \delta|\sigma_1|^2. \tag{1.24}$$

З цієї умови, очевидно, випливають також умови

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_s \in \mathbb{R}^{n_s} : \ (A_{n_s n_s}\sigma_s, \sigma_s) \geq \delta|\sigma_s|^2, \quad s \in \{2,3\}. \tag{1.25}$$

Умови (1.24) і (1.25) гарантують існування обернених матриць $A_{n_s n_s}^{-1} := (a_s^{jl})_{j,l=1}^{n_s}$, $s \in \{1,2,3\}$, та сталої $\delta_0 > 0$ такої, що

$$\forall\, \sigma_s \in \mathbb{R}^{n_s} : \ (A_{n_s n_s}^{-1}\sigma_s, \sigma_s) \geq \delta_0|\sigma_s|^2, \quad s \in \{1,2,3\}.$$

Означення 1.3. *ФРЗК для рівняння* (1.22) *називається функція* $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leq \tau < t$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

визначає розв'язок рівняння (1.22) *при* $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \geq 0$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

Оскільки коефіцієнти рівняння (1.22) не залежать від часової змінної t, то ФРЗК для цього рівняння залежить лише від різниці $t - \tau$, тобто

$$G(t,x;\tau,\xi) = G_0(t-\tau,x,\xi), \qquad 0 \leq \tau < t, \ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.26}$$

Для функції G_0 знайдена така формула:

$$\begin{gathered} G_0(t,x,\xi) = (4\pi)^{-n/2}(\mathrm{det}A_{n_1 n_1}\mathrm{det}A_{n_2 n_2}\mathrm{det}A_{n_3 n_3})^{-1/2}\times \\ \times(p(t))^{-n_1/2}(q(t))^{-n_2/2}(r(t))^{-n_3/2}\times \\ \times\exp\Big\{-\frac{1}{4p(t)}\sum_{j,l=1}^{n_1} a_1^{jl}(e^{bt}x_{1j}-\xi_{1j})(e^{bt}x_{1l}-\xi_{1l}) - \frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n_2} a_2^{jl}\times \\ \times\Big(x_{2j}-\xi_{2j}+f(t)(x_{1j}+\xi_{1j}) \Big)\Big(x_{2l}-\xi_{2l}+f(t)(x_{1l}+\xi_{1l}) \Big) - \\ -\frac{1}{4r(t)}\sum_{j,l=1}^{n_3} a_3^{jl}\Big(x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{t}{2}(x_{2j}+\xi_{2j})+g(t)(x_{1j}-\xi_{1j}) \Big)\times \\ \times\Big(x_{3l}-\xi_{3l}+\frac{t}{2}(x_{2l}+\xi_{2l})+g(t)(x_{1l}-\xi_{1l}) \Big)\Big\}, \\ t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{1.27}$$

де

$$p(t) := \frac{e^{2bt}-1}{2b}, \quad q(t) := \frac{t}{b^2} - \frac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)},$$
$$r(t) := \frac{t}{b^4} + \frac{t^3}{12b^2} - \frac{t^2}{b^3}\frac{e^{bt}+1}{2(e^{bt}-1)},$$
$$f(t) := \frac{e^{bt}-1}{b(e^{bt}+1)}, \quad g(t) := \frac{1}{b^2}\Big(\frac{tb(e^{bt}+1)}{2(e^{bt}-1)} - 1\Big).$$

Виходячи з формул (1.26) і (1.27), встановлено наступні властивості ФРЗК G.

1. *Для довільного* $T > 0$ *і будь-яких мультиіндексів* $\{k_l, m_l\} \subset \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, *справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3} G(t,x;\tau,\xi)| \le C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3} \prod_{l=1}^{3} (p_l(t-\tau))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2} \times$$
$$\times E_c(t-\tau, x, \xi), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.28}$$

де $C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}$ *і* c *– додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів* a_{jl}, b, n_1, n_2 *і* n_3, *а також від* T *тільки у випадку, коли* $b > 0$;

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{ - c\ \Big(\frac{|e^{bt}X_1(t) - \xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(t)-\xi_l|^2}{p_l(t)} \Big)\Big\},$$

$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b}x_1',$$

$$\alpha_b(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt}-1}{b}, & b \ne 0, \\ t, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_1(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{2bt}-1}{2b} & b \ne 0, \\ t, & b = 0, \end{cases},$$

$$p_2(t) := \begin{cases} 12\ \Big(\dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)} \Big), & b \ne 0, \\ t^3, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_3(t) := \begin{cases} 720\ \Big(\dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2}{b^3}\dfrac{e^{bt}+1}{2(e^{bt}-1)} \Big), & b \ne 0, \\ t^5, & b = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що функції p_l, $l \in \{1, 2, 3\}$, є монотонно зростаючими і $p_l(0) = 0$, бо $\lim\limits_{t \to 0+} p_l(t) = 0$.

2. *Справджуються рівності*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = 1, \quad t > \tau, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, dx = e^{-n_1 b(t-\tau)}, \quad t > \tau, \;\; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

3. *Функція*

$$G^*(\tau, \xi; t, x) := G(t, x; \tau, \xi), \quad \tau < t, \;\; \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

є ФРЗК для рівняння, спряженого з рівнянням (1.22).

4. *Є правильною формула згортки*

$$G(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \gamma, z) G(\gamma, z; \tau, \xi)\, dz, \quad \tau < \gamma < t, \;\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

5. *Існує тільки один ФРЗК для рівняння* (1.22), *який має попередні властивості.*

6. *Коефіцієнти a_{jl} рівняння* (1.22) *виражаються через ФРЗК G за формулами*

$$a_{jl} = \frac{1}{2} \lim_{\tau \to t} \frac{1}{t - \tau} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\xi_{1j} - e^{b(t-\tau)} x_{1j})(\xi_{1l} - e^{b(t-\tau)} x_{1l})\, G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi,$$
$$\{j, l\} \subset \{1, ..., n_1\}.$$

Використовуючи ці властивості ФРЗК, досліджуються властивості відповідних інтегралів Пуассона й на їх основі доводяться теореми про коректну розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані належать до спеціальних вагових просторів $L_p^{\vec{a}}$ функцій чи просторів $M^{\vec{a}}$ узагальнених мір. Сформулюємо відповідні теореми, доведені в [14, 15].

Означимо сімейства банахових просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $t \in [0, T]$, $p \in [1, \infty]$, функцій, швидко зростаючих з ростом просторових змінних. Еволюція розв'язків рівняння (1.22) буде характеризуватися належністю їх до цих просторів. Наведемо означення як указаних, так і інших просторів, які далі використовуватимуться. Для цього введемо такі набори функцій, визначених для $t \in [0, T]$:

$$\vec{k}(t, \vec{a}) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2), k_3(t, a_3)),$$

$$k_1(t, a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bt}}{c_0 - a_1 p_1(t)}, \qquad k_l(t, a_l) := \frac{c_0 a_l}{c_0 - a_l p_l(t)}, \quad l \in \{2, 3\};$$

$$\vec{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$

$$\vec{s_l}(t) := (s_{l1}(t), \dots, s_{ln_l}(t)), \quad l \in \{1, 2, 3\},$$

$$s_{1j}(t) := k_1(t, a_1) + 2\theta(n_2 - j)(\alpha_b(t))^2 k_2(t, a_2) + 4\Big(\frac{\alpha_b(t) - t}{b}\Big)^2 \theta(n_3 - j) k_3(t, a_3),$$

$$j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$s_{2j}(t) := 2k_2(t, a_2) + 4t^2 \theta(n_3 - j) k_3(t, a_3), \quad j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$s_{3j}(t) := 4k_3(t, a_3), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

де $c_0 \in (0, c)$, c – стала з оцінок (1.28), $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $p_l(T) < c_0/a_l$, $l \in \{1, 2, 3\}$, $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$, а також вагові функції

$$\Phi_\nu(t, x) := \exp\Big\{ \nu \sum_{l=1}^{3} k_l(t, a_l) |X_l(t)|^2 \Big\},$$

$$\Psi_\nu(t, x) := \exp\Big\{ \nu \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(t)\, |x_{lj}|^2 \Big\},$$

$$(t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

і норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} := \|u(t, \cdot)\Phi_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{s}(t)} := \|u(t, \cdot)\Psi_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$t \in [0, T], \quad p \in [1, \infty].$$

Зазначимо, що $s_{1j}(t) \geq a_1$, $s_{lj}(t) > a_l$, $l \in \{2, 3\}$, $t \in [0, T]$, тому для $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\vec{s}(t)} \leq \|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in [0, T], \quad p \in [1, \infty].$$

Використовуватимемо такі простори: $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ – простір вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $L_p^{\vec{a}} := L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$; $M^{\vec{a}}$ – простір узагальнених борелівських мір $\mu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, що

$$\|\mu\|^{\vec{a}} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0,x)\ d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелівських множин простору $\mathbb{R}^n$ і $|\mu|$ – повна варіація μ; $L_1^{-\vec{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\psi(\cdot)\Psi_1(T,\cdot)\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$; $C_0^{-\vec{s}(T)}$ – простір непрервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що

$$|\psi(x)|\Psi_1(T,x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ФРЗК G породжує інтеграли Пуассона відповідно функції φ та узагальненої міри μ за формулами

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.29}$$

та

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.30}$$

Теорема 1.4. *Для довільної функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1,\infty]$, та узагальненої міри $\mu \in M^{\vec{a}}$ формули (1.29) та (1.30) визначають єдині розв'язки рівняння (1.22) в шарі $\Pi_{(0,T]}$, які мають такі властивості: існує не залежна від φ і μ стала $C > 0$ така, що справджуються відповідно нерівності*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in (0,T], \tag{1.31}$$

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\mu\|^{\vec{a}}, \quad t \in (0,T]; \tag{1.32}$$

при $p \in [1,\infty)$ виконується співвідношення

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)} = 0, \tag{1.33}$$

а при $p = \infty$ і для функції (1.30) $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0+]{сл} \varphi$, $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0+]{сл} \mu$, тобто справджуються співвідношення

$$\forall\, \psi \in L_1^{-\vec{s}(T)} : \ \lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx, \tag{1.34}$$

$$\forall\, \psi \in C_0^{-\vec{s}(T)} : \quad \lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,u(t,x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\ d\mu(x). \tag{1.35}$$

Теорема 1.5. *Нехай* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1, \infty]$, *і* $\mu \in M^{\vec{a}}$. *Тоді правильні такі твердження:*

1) розв'язок u *рівняння* (1.22), *який задовольняє умови*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0, T]: \quad \|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \leq C, \tag{1.36}$$

при $1 \leq p < \infty$ *виконується співвідношення* (1.33) *і при* $p = \infty$ *– співвідношення* (1.34), *зображується у вигляді* (1.29);

2) для розв'язку u *рівняння* (1.22), *для якого виконується нерівність* (1.36) *з* $p = 1$ *і співвідношення* (1.35), *правильне зображення* (1.30).

Теорема 1.6. *Нехай* u *– розв'язок рівняння* (1.22) *в шарі* $\Pi_{(0,T]}$, *який задовольняє умову*

$$\exists\, C > 0 \quad \exists\, p \in [1, \infty] \quad \forall\, t \in (0, T]: \quad \|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \leq C. \tag{1.37}$$

Тоді при $1 < p \leq \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, *а при* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\vec{a}}$ *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (1.29) *і* (1.30).

Наслідки з теорем 1.4 – 1.6.

1) Якщо $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in (1, \infty]$, і $\mu \in M^{\vec{a}}$, то розв'язки (1.29) і (1.30) при кожному фіксованому $t \in (0, T]$ належать відповідно до просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $L_1^{\vec{k}(t,\vec{a})}$.

2) Простори $L_p^{\vec{a}}$, $p \in (1, \infty]$, і $M^{\vec{a}}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (1.22) тоді й тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (1.37) відповідно з $p \in (1, \infty]$ і $p = 1$. Ця умова є необхідною і достатньою для зображення розв'язку у вигляді (1.29) і (1.30).

3) Задача про знаходження умов на визначені в області розв'язки рівняння, які гарантують існування граничних значень цих розв'язків на межі області, є важливою класичною задачею теорії аналітичних і гармонічних функцій. Тут ця задача розв'язана для розв'язків рівняння (1.22), які визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$ і належать для кожного $t \in (0, T]$ до вагових просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$. Цим самим для рівняння (1.22) реалізовано описаний в [32, 34] підхід С. Д. Ейдельмана та С. Д. Івасишена, який дає можливість отримувати точні результати про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші, при цьому повністю охарактеризувати відповідні класи розв'язків.

Аналогічні результати отримані в [1] для двох груп змінних виродження.

1.3 Властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова на необмежених часових інтервалах

Розглянемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x) := (\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \mathcal{A}(\partial_{x_1}))u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1.38}$$

Тут

$$\mathcal{A}(\partial_{x_1}) := \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1k}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j\partial_{x_{1j}} + a_0, \tag{1.39}$$

де a_{jk}, a_j і a_0 – задані дійсні числа, причому $a_{jk} = a_{kj}$, $\{j,k\} \subset \{1,\ldots,n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\sigma_{1j}\sigma_{1k} \geq \delta|\sigma_1|^2. \tag{1.40}$$

Як і для рівняння (1.22) умова (1.40) гарантує існування обернених матриць $A^{-1}_{n_s n_s} := (a_s^{jl})_{j,l=1}^{n_s}$, $s \in \{1,2,3\}$, та сталої $\delta_0 > 0$ такої, що

$$\forall\, \sigma_s \in \mathbb{R}^{n_s} :\ \ (A^{-1}_{n_s n_s}\sigma_s, \sigma_s) \geq \delta_0|\sigma_s|^2, \quad s \in \{1,2,3\}.$$

Рівняння (1.38), для якого виконується припущення (1.40), є ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова [32]. Для випадку, коли $n_1 = n_2 = n_3$, воно є рівнянням Соніна зі сталими коефіцієнтами в диференціальному виразі (1.39).

Зазначимо, що заміна

$$u(t,(x_1 - at, x_2, x_3))\, e^{-a_0 t} = u_0(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

де $a := (a_1,\ldots,a_{n_1})$, зводить рівняння (1.38) для функції u до такого рівняння для функції u_0:

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1k}})u_0(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1.41}$$

Означення 1.4. *ФРЗК для рівняння* (1.22) *називається функція* $G(t,x;\tau,\xi)$, $t > \tau$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad t > \tau,\ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

визначає розв'язок рівняння (1.38) *при* $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого числа $\tau \in R$ *і довільної гладкої та фінітної функції* φ.

Оскільки коефіцієнти рівняння (1.38) не залежать від t, то його ФРЗК G, як функція t і τ, залежить лише від $t-\tau$. Маємо

$$G(t,x;\tau,\xi) = e^{a_0(t-\tau)} G_0(t-\tau,(x_1+a(t-\tau),x_2,x_3),\xi),$$
$$t>\tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.42}$$

де $G_0(t-\tau,x,\xi)$, $t>\tau$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, – ФРЗК для рівняння (1.38).

Для функції G знайдено такі формули:

$$G(t,x;\tau,\xi) = M_0(t-\tau)^{-M} \exp\{-\rho(t-\tau,x,\xi) + a_0(t-\tau)\},$$
$$t>\tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.43}$$

де

$$M_0 := 2^{-n_1} 3^{n_2/2} 180^{n_3/2} \pi^{-n/2} (\det A_{n_1 n_1}\ \det A_{n_2 n_2}\ \det A_{n_3 n_3})^{-1/2},$$

$$\rho(t,x,\xi) := \frac{1}{4t} \sum_{j,k=1}^{n_1} a_1^{jk}(x_{1j}+a_j t-\xi_{1j})(x_{1k}+a_k t-\xi_{1k}) - \frac{3}{t^3} \times$$

$$\times \sum_{j,k=1}^{n_2} a_2^{jk} \left(x_{2j} + \frac{t}{2}(x_{1j}+a_j t+\xi_{1j}) - \xi_{2j} \right)\left(x_{2k} + \frac{t}{2}(x_{1k}+a_k t+\xi_{1k}) - \xi_{2k} \right) -$$

$$-\frac{180}{t^5} \sum_{j,k=1}^{n_3} a_3^{jk} \left(x_{3j} + \frac{t}{2}(x_{2j}+\xi_{2j}) + \frac{t^2}{12}(x_{1j}+a_j t-\xi_{1j}) - \xi_{3j} \right) \times$$

$$\times \left(x_{3k} + \frac{t}{2}(x_{2k}+\xi_{2k}) + \frac{t^2}{12}(x_{1k}+a_k t-\xi_{1k}) - \xi_{3k} \right).$$

Виходячи з формул (1.43), встановлено наступно такі оцінки:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G(t,x;\tau,\xi)| \le C_{\alpha\beta}(t-\tau)^{-M-M_{\alpha\beta}} \exp\{\lambda(t-\tau)\} E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$t>\tau, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.44}$$

де $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ і $\beta := (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\{\alpha_l,\beta_l\} \subset \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1,\dots,n_l\}$, – довільні n-вимірні мультиіндекси, $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі, $\lambda := a_0 + 2c_1|a|^2$, $M_{\alpha\beta} := [|\alpha_1|+|\beta_1|+3(|\alpha_2|+|\beta_2|)+5(|\alpha_3|+|\beta_3|)]/2$, $|\alpha_l| := \alpha_{l1} + \dots + \alpha_{l n_l}$, якщо $\alpha_l :=$

$(\alpha_{l1}, \ldots, \alpha_{ln_l})$,

$$E_c(t, x, \xi) := \exp\{-c \sum_{l=1}^{3} t^{1-2l} |X_l(t) - \xi_l|^2\},$$
$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1'.$$

Наведемо теореми, доведені в [20], про інтегральні зображення розв'язків відповідного (1.43) неоднорідного рівняння

$$L\,u = f, \tag{1.45}$$

які визначені в областях $\Pi_{[0,\infty)}$ і $\Pi_{(-\infty,T]}$, де $T \in \mathbb{R}$.

Розглянемо спочатку випадок області $\Pi_{[0,\infty)}$. Для будь-яких $t \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ і $\eta := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, де $\eta_l \geq 0$, $l \in \{1, 2, 3\}$, означимо вагові норми

$$\|\, u(t, \cdot\,)\, \|_{p,\,\eta} := \|\, u(t, \cdot)\Phi_\eta(t, \cdot\,)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.46}$$

де

$$\Phi_\eta(t, x) := \exp\Big\{ -\sum_{l=1}^{3} \eta_l |X_l(t)| \Big\},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 1.7. *Нехай u – розв'язок рівняння (1.45) в області $\Pi_{[0,\infty)}$, який задовольняє при заданих p і η такі умови:*

1) $\forall\, T_0 > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in [0, T_0]: \quad \|\, u(t, \cdot)\, \|_{p,\eta} \leq C$;

2) *функція f в $\Pi_{[0,\infty)}$ неперервна, задовольняє локальну умову Гельдера за x і для кожного $t \geq 0$ є скінченними величини $\|\, f(t, \cdot)\, \|_{p,\eta}$ і $F_{p,\eta}(t) := \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, \|\, f(\tau, \cdot)\, \|_{p,\eta}\, d\tau$.*

Тоді є правильними зображення

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi\ + \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; 0, \xi) u(0, \xi)\, d\xi.$$

для будь-якої точки $(t, x) \in \Pi_{[0,\infty)}$ та оцінка

$$\|\, u(t, \cdot)\, \|_{p,\eta} \leq C\Lambda_\eta(t)(F_{p,\eta}(t) + \|\, u(0, \cdot)\, \|_{p,\eta}), \quad t \geq 0,$$

де

$$\Lambda_\eta(t) := \exp\big\{ \lambda t + \frac{1}{c_0}\big(\eta_1^2 t + \frac{3}{2}\eta_2^2 t^3 + \eta_3^2 t^5\big) \big\},$$

λ – стала з оцінок (1.44).

Перейдемо до випадку області $\Pi_{(-\infty,T]}$. Розглянемо набір функцій

$$\overrightarrow{k}(t) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)),$$
$$k_l(t,a_l) := c_0 a_l (c_0 - a_l t^{2l-1})^{-1}, \quad l \in \{1,2,3\}, \quad t \le T,$$

де a_l, $l \in \{1,2,3\}$, – невід'ємні числа такі, що $T < \min\limits_{l\in\{1,2,3\}} (c_0/a_l)^{1/(2l-1)}$, а також вагову функцію

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu \sum_{l=1}^{3} k_l(t,a_l)|X_l(t)|^2\}, \quad (t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Для $p \in [1,\infty]$ і $t \le T$ означимо норму

$$\| u(t,\cdot) \|_p^{\overrightarrow{k}(t)} := \| u(t,\cdot)\, \Psi_{-1}(t,\cdot) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Теорема 1.8. *Нехай u – розв'язок рівняння (24) в $\Pi_{(-\infty,T]}$, який для деякого $p \in [1,\infty]$ задовольняє такі умови:*

1) $\forall\, t_0 \le T \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in [t_0,T]: \quad \| u(t,\cdot) \|_p^{\overrightarrow{k}(t)} \le C,$
причому $e^{-\lambda t}\| u(t,\cdot) \|_p^{\overrightarrow{k}(t)} \to 0$ при $t \to -\infty$;

2) *функція f неперервна і задовольняє локальну умову Гельдера за x в $\Pi_{(-\infty,T]}$, а також для кожного $t \le T$ є скінченними величини $\| f(t,\cdot) \|_p^{\overrightarrow{k}(t)}$ і*

$$F_p(t) := \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\tau} \| f(\tau,\cdot) \|_p^{\overrightarrow{k}(\tau)}\, d\tau.$$

Тоді є правильними зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(-\infty,T]},$$

та оцінка

$$\| u(t,\cdot) \|_p^{\overrightarrow{k}(t)} \le C e^{\lambda t} F_p(t), \ t \le T.$$

Зауваження. З теорем 1.7 і 1.8 та результатів з [32] для випадку обмежених часових інтервалів випливають теореми про коректну розв'язність у відповідних класах функцій задачі Коші в області $\Pi_{[0,\infty)}$ та задачі без початкових умов для рівняння (1.45).

Наслідком теореми 1.7 є наступна теорема про стійкість нульового розв'язку однорідного рівняння (1.38).

Для вимірної функції $u : \Pi_{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$ означимо норми

$$\| u \|_{p,\eta}^{g(\cdot)} := \sup_{t \geq 0}(g(t) \| u(t, \cdot) \|_{p,\eta}),$$

де $\| u(t, \cdot) \|_{p,\eta}$ – норма (1.46), а $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ – деяка неперервна функція.

Означення 1.5. *Нульовий розв'язок рівняння (1) називатимемо $E^g_{p,\eta}$-стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого розв'язку u цього рівняння, який задовольняє умову 1) теореми 1 та умову $\| u(0, \cdot) \|_{p,\eta} < \delta$, справджується нерівність $\| u \|_{p,\eta}^{g(\cdot)} < \varepsilon$.*

Теорема 1.9. *Нульовий розв'язок рівняння (1) є $E^g_{p,\eta}$-стійким з довільним $p \in [1, \infty]$ і $\eta_l \geq 0$, $l \in \{1, 2, 3\}$, та функцією $g(t) = (\Lambda_\eta(t))^{-1}$, $t \geq 0$.*

Для розв'язків рівняння (1.38), визначених у $\Pi_{(-\infty,T]}$, є правильними теореми типу Ліувілля. Наведемо деякі з них.

Теорема 1.10. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1.38) *такі, що для його ФРЗК справджуються оцінки* (1.44) *з* $\lambda = 0$. *Якщо u – розв'язок рівняння* (1.38), *який задовольняє умову*

$$\exists C > 0 \;\; \exists \beta_l \geq 0, \, l \in \{1, 2, 3\}, \; \forall (t, x) \in \Pi_{(-\infty,T]} : \quad |u(t, x)| \leq C \prod_{l=1}^{3} (1 + |x_l|)^{\beta_l},$$

то u, як функція x_l, є многочленом степеня, не вищого ніж ціла частина $[\beta_l]$ числа β_l.

Теорема 1.11. *Розв'язок рівняння* (1.38), *який визначений в області $\Pi_{(-\infty,T]}$ і задовольняє умову 1) теореми 1.8, є нульовим.*

2 ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ

У цьому розділі наведено результати дослідження нових класів параболічних систем типу Шилова та вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова векторного порядку.

У 1955 р. Г. Є. Шилов [35] дав нове означення параболічної системи, яке узагальнює поняття параболічності за І. Г. Петровським і приводить до істотного розширення класу Петровського систем першого порядку за часовою змінною із сталими коефіцієнтами.

Дослідженням задачі Коші для параболічних за Шиловим систем займались Г. Є. Шилов, І. М. Гельфанд, К. І. Бабенко, Б. Л. Гуревич, Г. М. Золотарьов, Я. І. Житомирський, С. Д. Ейдельман, Ф. О. Порпер, С. Д. Івасишен, В. В. Городецький та інші науковці [36-39, 40, 42, 44]. При цьому основна увага приділялася системам із сталими коефіцієнтами. Це пояснюється тим, що параболічні системи Г. Є. Шилова, взагалі кажучи, не є стійкими у сенсі параболічності до зміни коефіцієнтів, навіть тих, що знаходяться при нульовій похідній [45].

Дослідження нових класів параболічних систем Шилова здійснено у п. 2.1. У працях [46-59] означено новий клас параболічно стійких систем рівнянь із частинними похідними до зміни своїх (молодших) коефіцієнтів. Наведено приклади елементів цього класу та досліджено його зв'язок з відомими класами параболічних систем рівнянь із частинними похідними. Побудовано та досліджено фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для параболічних за Шиловим систем рівнянь із залежними від часу коефіцієнтами та систем рівнянь із означеного класу. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для систем рівнянь із означеного класу у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова. Одержано форму зображення розв'язку через початкову вектор-функцію та фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші.

При моделюванні броунівського руху фізичної системи, А.М. Колмогоров прийшов до ультрапараболічного рівняння відносно щільності ймовірності можливих значень координат системи та їх похідних за часом [33]. Це рівняння має також важливе значення при дослідженні теплових і дифузійних процесів з інерцією в однорідному середовищі.

Це послужило поштовхом до зародження теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, в розвитку якої взяло участь багато як вітчизняних, так і зарубіжних математиків (див. [32] і наведену там літературу).

Першою працею, присвяченою дослідженню систем таких рівнянь, є [61], в якій вивчається питання побудови та дослідження фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для систем вигляду

$$(\partial_t - x\partial_y)u_j(t;x,y) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{jl}(t)\partial_x^k u_l(t;x,y), t \in (0;T],$$

$$\{x,y\} \subset (-\infty;\infty),\ j \in \mathbb{N}_m.$$

Дослідження властивостей ФМРЗК проводилося засобами класичної теорії параболічних за Петровським систем рівнянь з частинними похідними з неперервними за t і незалежними від просторової змінної коефіцієнтами. Варто зазначити, що наявність виродження параболічності в такій системі призводить до того, що коефіцієнти старших членів відповідної двоїстої за Фур'є системи на характеристиках вже не володіють необхідною властивістю рівномірної неперервності за t відносно просторової змінної. Тому застосування цієї методики дослідження у випадку, коли розмірність змінної x більше за одиницю, пов'язане зі суттєвими труднощами.

Побудова ФМРЗК для вироджених систем рівнянь типу Колмогорова вивчається у п. 2.2. У працях [62 – 72] означено новий клас вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова векторного порядка, який містить системи, що розглядалися в [61], і охоплює класи $\mathbb{E}_{21}^0 - \mathbb{E}_{23}^0$ однорідних вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова вищих порядків з коефіцієнтами, незалежними від просторової змінної, означених у [32]. Для таких систем побудовано ФМРЗК, досліджено її якісні властивості гладкості та поведінки в околі нескінченно віддалених просторових точок.

Результати цього розділу одержані І. М. Довжицькою та О. Б. Васько сумісно з професором В. А. Літовченком.

Наведемо позначення та скорочення, використані в даному розділі:
ФМРЗК – фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші;
$\mathrm{PSh}_{\mu\geq 0}^{\infty}$ – клас параболічних типу Г. Є. Шилова систем із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом;
$\partial_x^k = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ – оператор диференціювання, $k := (k_1;\ldots;k_n)$;
S – простір Л. Шварца нескінченно диференційовних швидкоспадних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$;
$\mathbb{SE}_{\overrightarrow{2b}}^t$ – клас вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова векторного порядку із коефіцієнтами, залежними лише від часової змінної;
$z^l := z_1^{l_1}\ldots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1}\ldots|z_m|^{l_m}$ при $z = (z_1;...;z_m)$ і $l := (l_1;\ldots;l_m)$;
$k \in \mathbb{Z}_+^n \Longleftrightarrow k = (k_1;k_2;k_3),\ k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j},\ j \in \{1,2,3\}$;

$x \in \mathbb{C}^n \Longleftrightarrow x = (x_1; x_2; x_3)$;
$x'_j := (x_{j1}; ...; x_{jn_3})$;
$x''_j := (x_{j(n_3+1)}; ...; x_{jn_2})$;
$x'''_1 := (x_{1(n_2+1)}; ...; x_{1n_1})$;
$\widehat{x}_1 := (x_{11}; ...; x_{1n_2})$;
$\widetilde{x} := (x'''_1; x''_2; x_3) \in \mathbb{C}^{n_1}$;
$\check{x} := (x'_2; x''_2; x_3) \in \mathbb{C}^{n-n_1}$;
$\overrightarrow{2b} = (2b_1; \ldots; 2b_{n_1})$ – вектор з парними натуральними координатами;
$\overrightarrow{\alpha}^* := \big(\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}, \big(\widehat{\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}\big), \big(\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\big)'\big) \in \mathbb{R}^n$;
$\overrightarrow{\beta}^* := \overrightarrow{1} - \overrightarrow{\alpha}^* \equiv \big(\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}, \widehat{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}, \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}'\big) \in \mathbb{R}^n$;
$\Pi^m_M := \{(t; \xi) |\ t \in M, \xi \in \mathbb{R}^m\}$;
S_α, S^α, $S_{\overrightarrow{\alpha}}$, $S^{\overrightarrow{\beta}}$, $S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}$ – простори типу S Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є.

2.1 Дослідження нових класів параболічних систем типу Шилова

2.1.1 Побудова та дослідження фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічних систем типу Шилова

Цікавий підхід до розширення класу Шилова тими системами, які б зберігали параболічність за Шиловим при зміні молодших коефіцієнтів, запропонував Житомирський Я. І. [46]. Його ідея полягає в розгляді систем рівнянь із частинними похідними, для яких матричний диференціальний вираз стосовно просторової змінної допускає зображення у вигляді суми двох доданків, один із яких є параболічним за Шиловим матричним диференціальним виразом із сталими коефіцієнтами (головна частина системи), а інший доданок - це диференціальний вираз із молодшими похідними, коефіцієнти якого також не залежать від часу, але можуть залежати вже від просторової змінної. Житомирський запропонував такі системи називати системами, параболічними типу Шилова. Для таких систем методом послідовних наближень Житомирський встановив існування розв'язку задачі Коші у випадку, коли початкові дані є гладкими обмеженими функціями та довів єдиність цього розв'язку у класі обмежених функцій [46].

Розвиваючи ідею Я. І. Житомирського, у [48] Літовченком В. А. означено новий клас $\mathrm{PSh}^{\infty}_{\mu\geq 0}$ параболічних систем типу Г. Є. Шилова з невід'ємним родом і коефіцієнтами, залежними від часової та просторової змінних. Цей клас одночасно охоплює та істотно розширює класи параболічних за Г. Є. Шиловим систем рівнянь із невід'ємним родом та параболічних за І. Г. Петровським лінійних систем рівнянь першого порядку стосовно часової змінної з обмеженими гладкими змінними коефіцієнтами, коефіцієнти групи старших членів яких можуть залежати лише від t.

Розглядається система диференціальних рівнянь із частинними похідними порядку p на множині $\Pi_{(0;T]}$

$$\partial_t u_j(t;x) = \sum_{l=1}^{m} \{P_0^{lj}(t;i\partial_x) + P_1^{lj}(t,x;i\partial_x)\} u_l(t;x), \quad j \in \mathbb{N}_m, \tag{2.1}$$

де

$$P_0^{lj}(t;i\partial_x) := \sum_{|k|_+ \le p} a_{0,k}^{lj}(t) i^{|k|_+} \partial_x^k, \quad P_1^{lj}(t,x;i\partial_x) := \sum_{|k|_+ \le p_1} a_{1,k}^{lj}(t;x) i^{|k|_+} \partial_x^k$$

– елементи відповідних матричних диференціальних виразів $P_0(t;i\partial_x)$ і $P_1(t,x;i\partial_x)$, причому система

$$\partial_t u_j(t;x) = \sum_{l=1}^{m} P_0^{lj}(t;i\partial_x) u_l(t;x), \quad j \in \mathbb{N}_m, \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2.2}$$

є параболічною за Г. Є. Шиловим у шарі $\Pi_{(0;T]}$ з показником параболічності h, $0 < h \le p$, зведеним порядком p_0 та невід'ємним родом μ.

Для системи (2.1) припускається виконання ще таких умов:

A) $0 \le p_1 < \gamma_* := h - n(1 - h\mu/p_0) - (m-1)(p-h), \ 0 \le \mu \le 1$,
у випадку $\gamma_* \le 0$ матричний диференціальний вираз $P_1(t,x;i\partial_x) \equiv 0$;

B) коефіцієнти $a_{0,k}^{lj}(t)$, $a_{1,k}^{lj}(t;x)$ є неперервними за змінною t, нескінченно диференційовними за змінною x і обмеженими разом із своїми похідними комплекснозначними функціями в шарі $\Pi_{[0;T]}$.

Означення 2.1. *Систему (2.1), для якої виконуються умови A та B, називатимемо параболічною типу Г. Є. Шилова системою із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом.*

Позначатимемо сукупність усіх таких систем $PSh^{\infty}_{\mu \ge 0}$. При цьому, порядком p, зведеним порядком p_0, показником параболічності h та родом μ системи із цього класу називатимемо відповідно p, p_0, h і μ відповідної системи (2.2), а матричні диференціальні вирази $P_0(t;i\partial_x)$ і $P_1(t,x;i\partial_x)$ – групами старших і молодших її членів.

Приклади рівнянь із цього класу, які не є параболічними за Г. Є. Шиловим і не параболічні за І. Г. Петровським, наведено в [48, 49]. Тут також досліджено зв'язок класу $\mathrm{PSh}^{\infty}_{\mu \ge 0}$ з відомими класами параболічних систем рівнянь із частинними похідними, а саме, встановлено, що: а) клас рівномірно параболічних за І. Г. Петровським лінійних систем першого порядку стосовно змінної t

зі змінними коефіцієнтами, старші з яких можуть залежати лише від t, міститься у класі PSh_1^∞ параболічних систем типу Г. Є. Шилова; б) сукупність усіх параболічних за Г. Є. Шиловим систем із $\mu \geq 0$ міститься у класі $\mathrm{PSh}_{\mu\geq 0}^\infty$.

Означення 2.2. *ФМРЗК для системи (2.1) називається функціональна матриця $Z(t,x;\tau,\xi)$ розмірності $m \times m$, визначена для всіх $(t;x) \in \Pi_{(\tau;T]}$ і залежна від параметричної точки $(\tau;\xi) \in \Pi_{[0;T)}$ така, що:*

1) Z як функція $(t;x)$ задовольняє систему (2.1) в шарі $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$;

2) виконується граничне співвідношення

$$Z(t,x;\tau,\cdot) \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} \delta(\cdot - x)E$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Л. Шварца (тут E – одинична матриця порядку m, а $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака).

Наступні дві леми стосуються властивостей ФМРЗК $G(t,\tau;x-\xi), (t,\tau;x,\xi) \in \Pi_T^2$ для параболічної за Г. Є. Шиловим системи (2.2) із залежними від часу коефіцієнтами та побудовано ФМРЗК для систем із класу $\mathrm{PSh}_{\mu\geq 0}^\infty$.

Лема 2.1. *Нехай система (2.2) є параболічною за Г. Є. Шиловим, тоді*

$$\exists\{c,B,\delta\} \subset (0;+\infty)\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall \tau \in [0;T)\ \forall t \in (\tau;T]\ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\partial_x^k G(t,\tau;x)| \leq c(t-\tau)^{-\frac{n+|k|_+ +\gamma}{h}} B^{|k|_+} |k|_+^{\frac{1}{h}|k|_+} e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

(тут $\gamma := (m-1)(p-h)$ і $\alpha := \mu/p_0$).

Лема 2.2. *ФМРЗК $G(t,\tau;x)$ параболічної за Г. Є. Шиловим системи (2.2) є диференційовною за кожною змінною t,τ при $0 \leq \tau < t \leq T$ і $x \in \mathbb{R}^n$, причому*

$$\partial_\beta G(t,\tau;x) = (-1)^l F^{-1}[P_0(\beta,\xi)\Theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;x),\ \beta \in \{t;\tau\},$$

або, що те саме, що

$$\partial_\beta G(t,\tau;x) = (-1)^l P_0(\beta, i\partial_x)G(t,\tau;x),\ \beta \in \{t;\tau\},$$

(тут $l = 2$ при $\beta = t$ і $l = 1$, якщо $\beta = \tau$, а $F^{-1}[\cdot]$ – обернене перетворення Фур'є).

Зазначимо, що ФМРЗК для системи (2.1) шукається згідно з класичним методом Леві у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t,\tau;x-\xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \equiv$$

$$\equiv G(t,\tau;x-\xi) + W(t,x;\tau,\xi), \qquad (2.3)$$

де Φ – деяка функціональна матриця розмірності $m \times m$, така, що матриця Z є розв'язком системи (2.1). Для знаходження Φ одержано інтегральне рівняння

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \tag{2.4}$$

в якому

$$K(t,x;\tau,\xi) := P_1(t,x;i\partial_x)G(t,\tau;x-\xi),\ P_1(t,x;i\partial_x) := \Big(P_1^{lj}(t,x;i\partial_x)\Big)_{l,j=1}^{m}.$$

Формальним розв'язком рівняння (2.4) є такий матричний ряд:

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t,x;\tau,\xi), \tag{2.5}$$

де $K_1 = K$, а

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y)K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad l > 1.$$

Лема 2.3. *Для всіх $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$ матричний функціональний ряд (2.5) є абсолютно збіжним рядом, для суми якого виконується нерівність*

$$\big|\Phi(t,x;\tau,\xi)\big| \le c_0(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

з додатними оціночними сталими c_0 і δ_*, не залежними від t, x, τ і ξ.

Зазначимо, що матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ коректно визначена формулою (2.3) на всій множині Π_T^2.

Лема 2.4. *Матрична функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 є нескінченно диференційовною функцією за кожною із просторових змінних x і ξ, для похідних якої виконуються такі оцінки:*

$$\big|\partial_\xi^r \partial_x^q \Phi(t,x;\tau,\xi)\big| \le c_1(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n+\frac{|r+q|_+}{h})} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$\big|\partial_\xi^r \Phi(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\big| \le c_2(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\eta,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ *(тут $\{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, а оціночні сталі c_1, c_2 і δ_* не залежать від t, τ, x, ξ та η).*

Сформулюємо основні результати, що стосуються ФМРЗК для системи (2.1).

Теорема 2.1. *Матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ є нескінченно диференційовною функцією за кожною із просторових змінних x і ξ на множині Π_T^2, причому*

$$\exists\delta>0\,\forall\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n\,\exists c>0\,\forall(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2:$$

$$|\partial_\xi^r\partial_x^q Z(t,x;\tau,\xi)|\le c(t-\tau)^{-\frac{n+|r+q|_++\gamma}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}};$$

$$|\partial_\xi^k Z(t,x+\xi;\tau,\xi)|\le c_k(t-\tau)^{\beta_k-\frac{n+\gamma}{h}}e^{-\delta_1\left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$k\in\mathbb{Z}_+^n,\ 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *де*

$$\beta_k:=\begin{cases}0, & k=0,\\ \alpha_0, & k\ne0,\end{cases}\quad \alpha_0:=1+\alpha n-\frac{n+p_1+\gamma}{h},$$

де оціночні сталі не залежать від t, τ, x і ξ, а δ і δ_1 – ще й від k.

Дослідження властивостей функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ стосовно змінних t і τ ґрунтується на наступних допоміжних твердженнях.

Лема 2.5. *Матрична функція $\Phi(\beta,x;\tau,\xi)$ є неперервною функцією за змінною β на проміжку $(\tau;T]$ при кожному фіксованому $\tau\in[0;T)$, $x\in\mathbb{R}^n$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$, причому*

$$|\Phi(\beta+\Delta,x;\tau,\xi)-\Phi(\beta,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le\max\{|\Delta|,|\Delta|^{\alpha_0}\}c_0(\beta-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n+\frac{p}{h})}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

при $0<|\Delta|<(\beta-\tau)$, тут сталі c_0 і δ_0 не залежать від Δ, β, τ, x і ξ.

Лема 2.6. *Матрична функція*

$$\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,$$

$0\le\tau<\beta<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *є неперервно диференційовною за змінною t на проміжку $(\beta;T]$, $\beta>\tau$, і неперервною за змінною β на інтервалі $(\tau;t)$, причому*

$$\lim_{\beta\to t-0}\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)=\Phi(t,x;\tau,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$$

Лема 2.7. *Об'ємний потенціал W є диференційовною матричною функцією за змінною t на $(\tau;T]$ такою, що*

$$\partial_tW(t,x;\tau,\xi)=\Phi(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_tG(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,$$

$(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 2.2. *Для кожного елемента $\varphi \in \mathbb{S}$ виконується граничне співвідношення*

$$< Z(t, x; \tau, \cdot), \varphi(\cdot) > \underset{t \to \tau + 0}{\longrightarrow} \varphi(x)\,, \quad 0 \le \tau < t \le T,\, x \in \mathbb{R}^n,$$

де $< (g_{lj}(\cdot))_{l,j=1}^m, \mathrm{col}(\varphi_1(\cdot); ...; \varphi_m(\cdot)) >:=$

$:= \mathrm{col}\Big(\sum\limits_{j=1}^m < g_{1j}(\cdot), \varphi_j(\cdot) >; ...; \sum\limits_{j=1}^m < g_{mj}(\cdot), \varphi_j(\cdot) > \Big)$, *$\mathbb{S}$ – декартів степінь з показником m простору S.*

Основний результат сформульовано у вигляді такого твердження.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови A) і B), тоді матрична функція Z, яка визначається рівністю (2.3), є ФМРЗК для системи (2.1).*

2.1.2 Коректна розв'язність та властивості розв'язків задачі Коші для параболічних систем типу Шилова

Одержані властивості ФМРЗК системи (2.1) гарантують належність стосовно кожної просторової змінної елементів цієї матриці до відповідного простору типу S Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. і, цим самим, дозволили використати простори типу S у якості середовища дослідження задачі Коші для систем з означеного класу $\mathrm{PSh}_{\mu \ge 0}^{\infty}$.

Для системи (2.1) задається початкова умова

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}, \tag{2.6}$$

яка розуміється як слабка збіжність у просторі $S'_{1-\alpha}$, тобто

$$\forall \varphi \in S_{1-\alpha} : \ \langle u(t; \cdot), \varphi(\cdot) E \rangle \underset{t \to +0}{\longrightarrow} \langle f, \varphi(\cdot) E \rangle.$$

Означення 2.3. *Розв'язком задачі Коші (2.1), (2.6) називатимемо диференційовну за змінною t і нескінченно диференційовну за змінною x на множині $\Pi_{(0;T]}$ вектор-функцію $u(t; x)$, що задовольняє систему (2.1) у звичайному розумінні, а початкову умову (2.6) – у сенсі слабкої збіжності в просторі $S'_{1-\alpha}$.*

Наведемо властивості фундаментальної матриці розв'язків у просторах типу S.

Теорема 2.4. *Матрична функція $Z(t, x; 0, \cdot)$ як абстрактна функція параметра:*

1) t з $(0; T]$ у класі $\mathrm{P}(S_{1-\alpha})$ (при фіксованому $x \in \mathbb{R}^n$), диференційовна за змінною t;

2) x з $\mathbb{R}^n$ у класі $\mathrm{P}(S_{1-\alpha})$ (при фіксованому $t \in (0;T]$), нескінченно диференційовна за змінною x.

У роботі [50] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для систем із класу $\mathrm{PSh}^{\infty}_{\mu\geq 0}$ із узагальненими початковими даними типу розподілів І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова, тобто обґрунтовано існування, єдиність і неперервну залежність від початкових даних звичайного розв'язку $u(t;x)$ задачі Коші, його диференційовність за змінною t і нескінченну диференційовність за просторовою змінною x, а також одержано форму зображення цього розв'язку через початкову вектор-функцію та ФМРЗК.

Теорема 2.5. *Задача Коші (2.1), (2.6) коректно розв'язна у класі початкових даних $\mathbb{S}'_{1-\alpha}$. Її розв'язок є звичайною вектор–функцією, диференційовною за змінною t, нескінченно диференційовною за x і зображується формулою*

$$u(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\cdot)\rangle, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \; f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}.$$

Уведено клас $\widehat{S}'$ усіх узагальнених функцій f з $S'_{1-\alpha}$ такий, що

$$F[\widehat{S}'] = \Big\{ F[f](\cdot) \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) | \, \forall k \in \mathbb{Z}^n_+ \, \exists \gamma_k \geq 0 \, \exists c_k > 0 \, \forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \\ |\partial^k_\sigma F[f](\sigma)| \leq c_k (1+\|\sigma\|)^{\gamma_k} \Big\}$$

(тут величини γ_k і c_k можуть залежати від функції $F[f](\cdot)$).

Через $\widehat{S}'_\beta$ позначено клас $\widehat{S}'$ у випадку, коли існує таке $\beta > 0$, що кожна оціночна величина c_k має вигляд

$$c_k = c B^{|k|_+} |k|_+^{\beta |k|_+}$$

з відповідними додатними сталими c і B, не залежними від k, і при цьому також не залежить від k величина $\gamma_k \equiv \gamma_0$.

Лема 2.8. *Кожен елемент класу $\widehat{S}'$ є згортувачем у просторі S. Якщо ж $f \in \widehat{S}'_\beta$, $\beta > 0$, то f – згортувач у S_β.*

Теорема 2.6. *Нехай початкова вектор-функція f є елементом класу $\widehat{\mathbb{S}}'$, тоді при кожному фіксованому t з $(0;T]$ відповідний розв'язок $u(t;\cdot)$ задачі Коші (2.1), (2.6) належить до простору $\mathbb{S}$.*

Якщо ж $f \in \widehat{\mathbb{S}}'_{\beta_0}$ при $\beta_0 \geq 1-\alpha$, то $u(t;\cdot) \in \mathbb{S}_{\beta_0}$ для всіх $t \in (0;T]$.

Наступна властивість стосується локального посилення збіжності розв'язку задачі Коші та його похідних при $t \to +0$ на тій частині $\mathbb{R}^n$, де початкова вектор-функція є досить гладкою.

Теорема 2.7. *Нехай узагальнена вектор-функція $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$ на множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ дорівнює нулеві, а $u(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\cdot)\rangle$ – відповідний розв'язок задачі Коші (2.1), (2.6). Тоді $\partial_x^q u(t;x)$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$, збігається до нуля при $t \to +0$ рівномірно стосовно змінної x на кожному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.*

Теорема 2.8. *Якщо узагальнена вектор-функція $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$ збігається на множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервно диференційовною на цій множині вектор-функцією $g(\cdot)$ до порядку $q_0 \in \mathbb{Z}_+^n$ включно, то для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що*

$$0 \le |k|_+ \le \begin{cases} |q_0|_+, & 2\alpha_0 + \dfrac{p_1}{h} > 1, \\ |q_0|_+ - n - \gamma, & 2\alpha_0 + \dfrac{p_1}{h} \le 1, \end{cases}$$

похідна $\partial_x^k u(t;x)$ відповідного розв'язку задачі Коші (2.1), (2.6) прямує до $\partial_x^k g(x)$ при $t \to +0$ рівномірно стосовно змінної x на кожному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Для розв'язків систем зі спеціальними Λ–властивостями ФМРЗК досліджено умови різного виду рівномірної та слабкої стабілізації до нуля.

Означення 2.4. *Система (2.1) задовольняє умову Λ_ψ^+, якщо існує стала $c > 0$ така, що для всіх $t > 0$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ виконується оцінка*

$$|\partial_x^k \partial_\xi^q Z(t,x;0,\xi)| \le c a(t)^{-\chi(|k+q|_+)} \psi(\|x-\xi\|/a(t)),$$

з деякою неперервною монотонно зростаючою необмеженою функцією $a(t)$, що перетворюється в нуль при $t = 0$, а також додатними функціями $\psi(\cdot)$ і $\chi(\cdot)$, перша з яких обмежена, а друга монотонно зростає на множині $[0;+\infty)$.

Наступні твердження характеризують рівномірну стабілізацію гладких розв'язків системи (2.1).

Теорема 2.9. *Якщо початкова вектор-функція f з простору $\mathbb{S}'_{1-\alpha}$ має компактний носій, то відповідний розв'язок задачі Коші для системи (2.1), яка задовольняє умову Λ_ψ^+, стабілізується до нуля рівномірно на $\mathbb{R}^n$.*

Теорема 2.10. *Нехай $f(\cdot) = \mathrm{col}(f_1(\cdot), \ldots, f_m(\cdot))$– неперервна вектор-функція така, що*

$$|f(x)| \le c(1+\|x\|)^\beta, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

при деякому $\beta \ge 0$, а узагальнена початкова вектор-функція f із $\mathbb{S}'_{1-\alpha}$ є функціоналом типу похідної порядку r від $f(\cdot)$, тобто таким функціоналом, дія кожної компоненти f_j якого на елементах $\varphi \in S_{1-\alpha}$ визначається рівністю

$$\langle f_j, \varphi\rangle = c_j \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \partial_x^r \varphi(x) dx, \; j \in \mathbb{N}_m,$$

з деякими сталими c_j. Тоді, якщо система (2.1) задовольняє умову Λ_ψ^+ при $\chi(|r|_*) > n+\beta$ та інтегровною функцією $\psi(\cdot)$ такою, що

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\|x\|)(1+\|x\|)^\beta dx < +\infty, \tag{2.7}$$

то розв'язок відповідної задачі Коші (2.1), (2.6) стабілізується до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K}$ із $\mathbb{R}^n$.

У випадку, коли коефіцієнти системи (2.1) не залежать від просторової змінної x правильне таке твердження.

Теорема 2.11. *Нехай система (2.1) з не залежними від x коефіцієнтами задовольняє умову Λ_ψ^+ і для кожної компоненти f_j узагальненої початкової вектор-функції $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$ згортка $(f_j * \varphi)(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_m$, з довільним елементом $\varphi \in S_{1-\alpha}$ є звичайною функцією такою, що*

$$|(f_j * \varphi)(x)| \leq c_\varphi(1+\|x\|)^{-\beta_j},\ \beta_j > n,\ j \in \mathbb{N}_m,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді відповідний розв'язок $u(t;x)$ задачі Коші (2.1), (2.6) слабко стабілізується до нуля у просторі $S'_{1-\alpha}$, тобто

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\forall \varphi \in S_{1-\alpha}).$$

Більш загальні умови на початкову вектор-функцію $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$, при яких має місце слабка стабілізація до нуля відповідного розв'язку задачі Коші (2.1), (2.6), формулюються у термінах узагальненого граничного середнього за просторовими тілами.

Для цього розглядається однопараметрична сім'я гіперповерхонь $\Phi_t(x) = r,\ r \geq 0$, що володіє при кожному фіксованому $t \gg 1$ такими властивостями:

1) вона складається із замкнутих однозв'язних гіперповерхонь;

2) тіла $V^r_{\Phi_t}$, обмежені гіперповерхнями $\Phi_t(x) = r$, містять початок координат;

3) якщо $\rho(r,\varsigma,t)-$ довжина вектора, що з'єднує початок координат O з точкою гіперповерхні $\Phi_t(x) = r$ і утворює кути $\pi/2-\varsigma_j$ з осями $Ox_{j+1},\ j \in \mathbb{N}_{n-1}$, декартової системи координат, то $\rho(r,\varsigma,t)$ має неперервну додатну похідну за змінною r. Припускається також, що при $t \to +\infty$ сім'ї гіперповерхонь $\Phi_t(x) = r$ прямують до сім'ї замкнутих гіперповерхонь $F(x) = r$, тобто для кожного додатного ε існує $t_0 > 0$ таке, що для всіх $t > t_0$ і $r \geq 0$ виконується нерівність

$$mes(V^r_F \cup V^r_{\Phi_t})/mes(V^r_F \cap V^r_{\Phi_t}) < 1+\varepsilon.$$

Узагальнена вектор-функція $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$ має узагальнене нульове граничне середнє за тілами V_F^r (записується $M_F^\infty(f) = 0$), якщо

$$\lim_{r\to\infty} \Bigg(\int\limits_{V_F^r} (f * (\varphi E))(x) dx / mes V_F^r \Bigg) = 0 \quad (\forall \varphi \in S_{1-\alpha}).$$

Теорема 2.12. *Нехай система (2.1) з не залежними від x коефіцієнтами задовольняє умову Λ_ψ^+ при $\chi(1) \geq n+1$ і функцією $\psi(\cdot)$, для якої виконується умова (2.7) при $\beta = n$; ФМРЗК $G(t;x)$ цієї системи є сталою відносно змінної x на сім'ях гіперповерхонь $\Phi_t(x) = r$, що володіють властивостями 1)–3) та прямують при $t \to +\infty$ до сім'ї $F(x) = r$. Тоді якщо початкова узагальнена вектор-функція $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$ така, що $M_F^\infty(f) = 0$, то відповідний розв'язок задачі Коші (2.1), (2.6) слабко стабілізується до нуля у просторі $S'_{1-\alpha}$.*

Розглянемо систему (2.1) з класу $\mathrm{PSh}^\infty_{\mu\geq 0}$ на множині $\Pi_{(-\infty;T]}$ з припущенням, що умова B) для цієї системи виконується при $t \in (-\infty; T]$.

ФМРЗК Z системи (2.1) задовольняє умову Λ_ψ^-, якщо для довільних τ і t, $-\infty < \tau < t \leq T$, виконується оцінка

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq c_k a(t;\tau)^{-\chi(|k|_+)} \psi(\|x-\xi\|/a(t;\tau)),$$

$k \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, з додатною сталою c_k, неперервною монотонно зростаючою необмеженою функцією $a(t;\tau)$ такою, що $a(0;0) = 0$ та деякими додатними на множині $[0;+\infty)$ функціями $\chi(\cdot)$ і $\psi(\cdot)$ такими, що $\lim\limits_{r\to+\infty} \chi(r) = +\infty$ і

$$\int\limits_0^{+\infty} \psi(\eta)(1+\eta)^{\beta_0} d\eta < +\infty$$

при деякому $\beta_0 \geq 0$.

Теорема 2.13 *(Ліувілля).* *Нехай для системи (2.1) виконується умова Λ_ψ^-. Тоді кожна компонента регулярного у півпросторі $t \leq T$ розв'язку $u(t;\cdot)$ цієї системи такого, що*

$$|u(t;x)| \leq c(1+\|x\|)^\beta, \;\; 0 \leq \beta \leq \beta_0, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

є многочленом стосовно змінної x степеня, не вищого β.

2.2 Задача Коші для вироджених параболічних систем типу Колмогорова

При фіксованих довільно $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$, а також $\overrightarrow{2b} = (2b_1; \ldots; 2b_{n_1})$, де $b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа, розглядається система рівнянь

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right) u(t;x) = \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})u(t;x),\ (t;x) \in \Pi^n_{(0;T]}, \quad (2.8)$$

де $u = \mathrm{col}(u_1; \ldots; u_m)$,

$$\mathbb{A}(t;\partial_{x_1}) := \Big(a_{lj}(t;i\partial_{x_1}) := a_0^{lj}(t) \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1} + \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+<1} a_{k_1}^{lj}(t)(i\partial_{x_1})^{k_1}\Big)_{l,j=1}^m$$

— матричний диференціальний вираз, коефіцієнти $a_{k_1} \in \mathbb{C}$, $a_0^{lj}(\cdot)$ і $a_{k_1}^{lj}(\cdot)$ якого неперервні на $[0;T]$ комплекснозначні функції такі, що відповідний диференціальний вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$$

є параболічним за Ейдельманом на множині $\Pi^{n_1}_{[0;T]}$ ($\overrightarrow{2b}$-параболічним):

$$\exists \delta_0 > 0 \ \ \forall (t;\xi_1) \in \Pi^{n_1}_{[0;T]}: \ \lambda(t;\xi_1) := \max_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\ \lambda_j(t;\xi_1) \le -\delta_0|\xi_1|_+^{\overrightarrow{2b}}. \quad (2.9)$$

Тут λ_j – власні числа матричного символа

$$\mathcal{A}^0(t;\cdot) := \Big(a_{lj}^0(t;\cdot) := a_0^{lj}(t) \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(\cdot)^{k_1}\Big)_{l,j=1}^m$$

головної частини

$$\mathbb{A}^0(t;\partial_{x_1}) := \Big(a_{lj}^0(t;i\partial_{x_1}) := a_0^{lj}(t) \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1}\Big)_{l,j=1}^m$$

виразу $\mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$.

У випадку, коли $m = 1$ вираз $a_{11}^0(t;i\partial_{x_1})$ може набувати загальнішої форми:

$$a_{11}^0(t;i\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(t)(i\partial_{x_1})^{k_1}.$$

Означення 2.5. *Систему (2.8), для якої виконується умова параболічності (2.9), називатимемо виродженою $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою типу Колмогорова векторного порядку з коефіцієнтами, залежними лише від t і говоритимемо, що сукупність усіх таких систем становить клас $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$.*

Для системи (2.8) у точці $t=\tau,\ \tau\in[0;T)$, задається початкова умова

$$u(t;\cdot)\Big|_{t=\tau}=\varphi(\cdot) \tag{2.10}$$

з "пробною"початковою вектор-функцією $\varphi(\cdot)$, компоненти $\varphi_j,\ j\in\mathbb{N}_m$, якої є елементами простору S Л. Шварца.

Означення 2.6. *ФМРЗК для системи (2.8) називається функціональна матриця $G(t,x;\tau,\xi)$ розмірності $m\times m$, яка визначена для усіх $(t;x)\in\Pi^n_{(\tau;T]}$ і залежна від параметричної точки $(\tau;\xi)\in\Pi^n_{[0;T)}$, така, що:*

1) G як функція аргументу $(t;x)$ є розв'язком системи (2.8) на $\Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau\in[0;T)$;

2) виконується граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\tau+0}G(t,x;\tau,\cdot)=\delta(\cdot-x)E$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Л. Шварца (тут E – одинична матриця порядку m, а $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака).

Охарактеризуємо коротко процес побудови ФМРЗК для систем (2.8). Задачі Коші (2.8), (2.10) зіставлялася відповідна двоїста за Фур'є задача

$$\begin{cases}\left(\partial_t+\sum\limits_{j=1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}}+\sum\limits_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}}\right)v_1(t;\xi)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}(t;\xi_1)v_j(t;\xi),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\dots \\ \left(\partial_t+\sum\limits_{j=1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}}+\sum\limits_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}}\right)v_m(t;\xi)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{mj}(t;\xi_1)v_j(t;\xi),\end{cases}\quad (t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]}, \tag{2.11}$$

$$v_j(t;\cdot)|_{t=\tau}=F[\varphi_j](\cdot),\ j\in\mathbb{N}_m, \tag{2.12}$$

де $a_{lj}(t;\xi_1)$ – елементи матричного символу $\mathcal{A}(t;\xi_1)$ диференціального виразу $\mathbb{A}(t;\partial_{x_1}),\ F[\cdot]$ – пряме перетворення Фур'є, а

$$v_j(t;\xi):=F[u_j(t;x)](t;\xi)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_j(t;x)\mathrm{e}^{i(x,\xi)}dx,\quad j\in\mathbb{N}_m.$$

За допомогою методу характеристик задачу Коші (2.11), (2.12) зведено до задачі Коші для системи з частинними похідними першого порядку, рівняння якої мають однакові диференціальні вирази. Розв'язуючи послідовно рівняння цієї системи, одержано наступну задачу Коші:

$$\partial_t v(t;\check{s};\tilde{\xi})=\mathcal{A}(t;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))v(t;\check{s};\tilde{\xi}), \tag{2.13}$$

$$v(t;\check{s};\tilde{\xi})\Big|_{t=\tau}=F[\varphi](\rho_0(\tau;\check{s};\tilde{\xi})). \tag{2.14}$$

Через $\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})$ позначено матрицант системи (2.13), який задовольняє початкову умову

$$\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})\big|_{t=\tau} = E. \tag{2.15}$$

Для матриканта $\Theta_\tau^t(\cdot)$ правильним є наступне твердження.

Теорема 2.14. *Матрична функція $\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})$ є розв'язком задачі Коші (2.11), (2.15) при $\check{s} = s_{t,\xi}$, де $s_{t,\xi} := (\xi_1' - t\xi_2' + t^2\xi_3/2; \xi_1'' - t\xi_2''; \xi_2' - t\xi_3)$.*

Наслідок 2.1. *Вектор-функція*

$$v(t;\xi) = \Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})),\ (t;\xi) \in \Pi^n_{(\tau;T]},$$

є розв'язком задачі Коші (2.11), (2.12).

З наслідка 2.1, застосовуючи обернене перетворення Фур'є, одержано формулу

$$u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,y)\varphi(y)dy, \quad (t;x) \in \Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau \in [0;T), \tag{2.16}$$

у якій

$$G(t,x;\tau,y) := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(y,\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))}\mathrm{e}^{-i(x,\xi)}\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})d\xi, \tag{2.17}$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,y\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Досліджено властивості матриканта $\Theta_\tau^t(\cdot)$ та матричної функції G.

Лема 2.9. *Нехай коефіцієнти з правої частини системи (2.11) неперервно залежать від t на $[0;T]$. Тоді для відповідного їй матриканта $\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$ виконується оцінка*

$$\left|\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})\right| \le c\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)\left(|\xi_1|_+^{\overrightarrow{2b}}+|(t-\tau)\xi_2|_+^{\widehat{\overrightarrow{2b}}}+|(t-\tau)^2\xi_3|_+^{\overrightarrow{2b}'}\right)},\ (t;\xi) \in \Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau \in [0;T)$$

(додатні сталі c і δ не залежать від t,τ і ξ).

Здійснивши у матричній функції $\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$ заміну змінних згідно з правилом $\xi = \left(\frac{z_1}{(t-\tau)^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}}; \frac{z_2}{(t-\tau)^{\widehat{\overrightarrow{1}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}}}; \frac{z_3}{(t-\tau)^{(\overrightarrow{2}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b})'}}\right)$ і позначивши її через $\mathring{\Theta}_\tau^t(z)$, встановлено, що $\mathring{\Theta}_\tau^t(z)$ щодо просторової змінної z допускає аналітичне продовження у комплексний простір $\mathbb{C}^n$ до цілої матричної функції порядку зростання $\overrightarrow{2b}^* := (\overrightarrow{2b}, \widehat{\overrightarrow{2b}}, \overrightarrow{2b}')$ скінченного типу.

Правильними є такі допоміжні твердження.

Лема 2.10. *Для матричної функції $\mathring{\Theta}_\tau^t$ виконуються оцінки*

$$\left|\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\right| \le c\exp\left\{-\delta|x|_+^{\overrightarrow{2b}^*} + \delta_1|y|_+^{\overrightarrow{2b}^*}\right\} \qquad \left(\forall\ z = x+iy \in \mathbb{C}^n\right),$$

$$\left|\partial_z^k \mathring{\Theta}_\tau^t(z)\right| \le cB^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\alpha}^*} \exp\left\{-\delta |z|_+^{\overrightarrow{2b}^*}\right\} \qquad \left(\forall\ k\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall\ z\in\mathbb{R}^n\right),$$

в яких додатні сталі c, B, δ *і* δ_1 *не залежать від* t, τ, z *і* k, *а*

$$\overrightarrow{\alpha}^* := \left(\overrightarrow{1}-\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}, \left(\widehat{\overrightarrow{1}-\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}\right), \left(\overrightarrow{1}-\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right)'\right).$$

Лема 2.11. *Для кожного* $T>0$ *існують додатні сталі* c, B *і* δ *такі, що для всіх* $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$ *і* $x\in\mathbb{R}^n$ *виконується нерівність*

$$\left|\partial_x^k F[\mathring{\Theta}_\tau^t(z)](x)\right| \le c\, B^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} \mathrm{e}^{-\delta |x|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}^*}},\ \ \overrightarrow{\beta}^* := \overrightarrow{1}-\overrightarrow{\alpha}^*$$

На основі властивостей матриканта одержано властивість гладкості матричної функції G.

Теорема 2.15. *Матрична функція* G *диференційовна за* t, *нескінченно диференційовна за* x *і* ξ *у свой області визначення, при цьому існують додатні сталі* A, B, c *і* δ *такі, що для всіх* $\{q,l\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $t\in(\tau;T]$ *і* $\tau\in[0;T)$ *виконуються оцінки*

$$\left|\partial_x^q\partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$

$$\le \frac{cA^{|q|_+} q^{q\overrightarrow{\beta^*}} B^{|l|_+} l^{l\overrightarrow{\beta^*}}}{(t-\tau)^{\left|(l_1+q_1)/\overrightarrow{2b}+\overrightarrow{1}\right|_+ + \left|\left(\widehat{\overrightarrow{1}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}\right)\left(l_2+q_2+\widehat{\overrightarrow{1}}\right)\right|_+ + \left|\left(\overrightarrow{2}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right)'\left(l_3+q_3+\overrightarrow{1}'\right)\right|_+}}\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-\delta\Bigg(\sum_{j=1}^{n_1}\left((t-\tau)^{-\frac{1}{2b_j}}|x_{1j}-\xi_{1j}|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\left((t-\tau)^{-1-\frac{1}{2b_j}}|x_{2j}-\xi_{2j}+(t-\tau)\xi_{1j}|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\left((t-\tau)^{-2-\frac{1}{2b_j}}|x_{3j}-\xi_{3j}+(t-\tau)\xi_{2j}-(t-\tau)^2\xi_{1j}/2|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\Bigg)\Bigg\},$$

$$\left|\partial_t G(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$

$$\le c(t-\tau)^{-\left|\overrightarrow{\beta}^*\right|_+-n_2-2n_3-1}\exp\Bigg\{-\delta\Bigg(\sum_{j=1}^{n_1}\left((t-\tau)^{-\frac{1}{2b_j}}\,|x_{1j}-\xi_{1j}|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\left((t-\tau)^{-1-\frac{1}{2b_j}}\,|x_{2j}-\xi_{2j}+(t-\tau)\xi_{1j}|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+\sum_{j=1}^{n_3}\Bigg((t-\tau)^{-2-\frac{1}{2b_j}}\,|x_{3j}-\xi_{3j}+$$

$$+(t-\tau)\xi_{2j}-(t-\tau)^2\xi_{1j}/2\big|\Big)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\Big)\Big\}.$$

Крім того, вектор-функція (2.16) є класичним розв'язком задачі Коші (2.8), (2.10) на множині $\Pi^n_{(\tau;T]}$, $\tau\in[0;T)$, а для матричної функції $G(t,x;\tau,\xi)$, що задається формулою (2.17), правильне наступне твердження.

Теорема 2.16. *Матрична функція (2.17) є ФМРЗК для системи (2.8).*

Одержані результати є важливими для всебічного вивчення систем із класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$, зокрема, при описі якомога ширших множин гладких розв'язків таких систем та узагальнених початкових даних, з якими відповідна задача Коші є коректно розв'язною, а також при дослідженні якісних властивостей розв'язків систем із цього класу.

2.3 Задача Коші у вагових просторах Лебега

Наведемо результати застосування ФМРЗК до досліджень задачі Коші у вагових просторах Лебега. Ці результати аналогічні до відповідних результатів з [32] для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з класів $\mathbb{E}^0_{21}-\mathbb{E}^0_{23}$ у вагових просторах Лебега зростаючих функцій на випадок вироджених параболічних систем рівнянь із класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$.

Середовищем подальших досліджень є векторні аналоги $\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{s}(t)}$ і $\mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$ просторів $L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $L_p^{\overrightarrow{s}(t)}$ та $L_p^{\overrightarrow{a}}$ відповідно, отриманих у [32].

Коротко нагадаємо означення цих просторів та наведемо важливі для подальшого факти з [32]. Розглянемо набори функцій:

$$\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a}):=(k_{11}(t,a_{11}),...,k_{1n_1}(t,a_{1n_1});k_{21}(t,a_{21}),...,$$

$$k_{2n_2}(t,a_{2n_2});k_{31}(t,a_{31}),...,k_{3n_3}(t,a_{3n_3})),$$

$$\overrightarrow{s}(t):=(s_{11}(t),...,s_{1n_1}(t);s_{21}(t),...,s_{2n_2}(t);s_{31}(t),...,s_{3n_3}(t));$$

$$k_{lj}(t,a_{lj}):=\eta_0a_{lj}\Big(\eta_0^{2b_j-1}-a_{lj}^{2b_j-1}t^{2b_j(l-1)+1}\Big)^{1-\alpha_j},\ j\in\mathbb{N}_{n_l},\ l\in\mathbb{N}_3;$$

$$s_{1j}(t):=k_{1j}(t,a_{1j})+2^{\alpha_j-1}\theta(n_2-j)t^{\alpha_j}k_{2j}(t,a_{2j})+$$

$$+2^{\alpha_j-2}\theta(n_3-j)t^{2\alpha_j}k_{3j}(t,a_{3j}),\ j\in\mathbb{N}_{n_1};$$

$$s_{2j}(t):=2^{\alpha_j-1}k_{2j}(t,a_{2j})+4^{\alpha_j-1}\theta(n_3-j)t^{\alpha_j}k_{3j}(t,a_{3j}),\ j\in\mathbb{N}_{n_2};$$

$$s_{3j}(t):=4^{\alpha_j-1}k_{3j}(t,a_{3j}),\ j\in\mathbb{N}_{n_3},\ t\le T,$$

де $\eta_0 \in (0;\delta)$, δ —константа з оцінки похідних ФРЗК, $\theta(z) = 1$ для $z \geq 0$ і $\theta(z) = 0$ для $z < 0$; $\overrightarrow{a} := (a_{11}, ..., a_{1n_1}; a_{21}, ..., a_{2n_2}; a_{31}, ..., a_{3n_3})$ — n-вимірний вектор з такими додатними координатами, що

$$\min_{j\in\mathbb{N}_{n_l}, l\in\mathbb{N}_3} \left(\frac{\eta_0}{a_{lj}}\right)^{\frac{2b_j-1}{2b_j(l-1)+1}} > T.$$

Функції $\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})$ мають наступні властивості:

1) $k_{lj}(t,a_{lj}) \geq a_{lj},\ t \in (0;T],\ j \in \mathbb{N}_{n_l},\ l \in \mathbb{N}_3$;

2) $\overrightarrow{k}(0,\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$;

3) $k_{1j}(t-\tau, k_{1j}(\tau;a_{1j})) = k_{1j}(t,a_{1j}),\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ j \in \mathbb{N}_m$;

4) $k_{rj}(t-\tau, k_{rj}(\tau;a_{rj})) \leq k_{rj}(t,a_{rj}),\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ j \in \mathbb{N}_{n_r},\ r \in \{2;3\}$.

Нехай p — натуральне число, а $v(t;x),\ (t;x) \in \Pi^n_{[0;T]}$, — комплекснозначна функція, вимірна за змінною x при кожному $t \in [0;T]$. Для довільного $t \in [0;T]$ покладемо

$$\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} := \|v(t;x)\cdot \exp\{-[\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a}), X(t)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} := \|v(t;x)\cdot \exp\{-[\overrightarrow{s}(t), x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $L_p(\mathbb{R}^n)$ — відповідний простір Лебега. Тоді простори $L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$ і $L_p^{\overrightarrow{s}(t)}$, $t \in [0;T]$, $p \geq 1$, означуються як сукупності усіх вимірних стосовно просторової змінної функцій $\varphi :\ \mathbb{R}^n \times [0;T] \longrightarrow \mathbb{C}$, для яких скінченними є норми $\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$ та $\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{s}(T)}$ відповідно при кожному фіксованому $t \in [0;T]$, а $L_p^{\overrightarrow{a}} := L_p^{\overrightarrow{k}(0,\overrightarrow{a})}$.

Для елементів $v(t;\cdot) \in L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$ і $\varphi(\cdot) \in L_p^{\overrightarrow{a}}$ виконуються співвідношення:

$$\|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \leq \|v(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})},\ \|\varphi(\cdot)\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \leq \|\varphi(\cdot)\|_p^{\overrightarrow{a}},\ t \in [0;T],\ p \geq 1.$$

Надалі також використовуватимемо простір $L_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $p \geq 1$, який складається з усіх вимірних стосовно змінної x функцій $u :\ \mathbb{R}^n \times [0;T] \longrightarrow \mathbb{C}$ із скінченною нормою

$$\|u(t;\cdot)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} := \left\| u(t;x)\cdot \frac{\exp\{-[\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a}), X(t)]\}}{(1+\|\hat{x}_1\|+\|x_2'\|)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\ t \in [0;T].$$

Оскільки

$$\|u(t;\cdot)\|_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} \leq \|u(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})},\ t \in [0;T],\ p \geq 1,$$

то правильними є неперервні вкладення

$$L_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} \subset L_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})},\ t \in [0;T],\ p \geq 1.$$

Для системи (2.8) задаємо початкову умову

$$u(t;x)_{|t=0} = \varphi(x),\ \varphi(\cdot) \in \mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}},\ p \geq 1. \tag{2.18}$$

Означення 2.7. *Вектор-функцію* $u(t;x) \in \mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $p \geq 1$, $(t;x) \in \Pi^n_{(0;T]}$, *називатимемо розв'язком задачі Коші (2.8), (2.18) у просторі* $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $p \geq 1$, *якщо ця функція задовольняє систему (2.8) у звичайному розумінні, а початкову умову (2.18) у сенсі наступного граничного співвідношення:*

$$\|u(t;\cdot) - \varphi\|_p^{\overrightarrow{s}(t)} \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0.$$

Наведемо результати дослідження рівняння Пуассона Досліджено умови існування розв'язку задачі Коші (2.8), (2.18) у вигляді

$$u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ (t;x) \in \Pi^n_{(0;T]}, \tag{2.19}$$

породженого функцією φ.

Лема 2.12. *Нехай* $\varphi \in \mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$, $p \geq 1$, *тоді матричний диференціальний оператор*

$$S_{t,x} := \left\{\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right\}E - \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$$

системи (2.8) коректно визначений у сенсі топології простору $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{a}}$, $p \geq 1$, *на відповідній вектор-функції* u *з (2.19), як елементі цього простору, причому* $S_{t,x}u(t;\cdot) \in \mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $p \geq 1$, $t \in (0;T]$. *Крім цього, для похідних* $\partial_t u(t;x)$, $\partial_x^l u(t;x), l \in \mathbb{Z}_+^n$, *на множині* $\Pi^n_{(0;T]}$ *справджуються відповідні рівності:*

$$\partial_x^l u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^l G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$\partial_t u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ \varphi \in \mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}},\ p \geq 1.$$

Сформулюємо основні результати досліджень інтеграла Пуассона (2.19).

Теорема 2.17. *Якщо* $\varphi \in \mathbb{L}_p^{\overrightarrow{a}}$, $p \geq 1$, *то відповідна вектор-функція* u, *що визначається рівністю (2.19), є розв'язком задачі Коші (2.8), (2.18) у просторі* $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $t \in (0;T]$, *при цьому, виконується оцінка*

$$\|u(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} \leq c\|\varphi\|_p^{\overrightarrow{a}},\ p \geq 1,\ t \in (0;T].$$

Теорема 2.18. *Існує не більше одного розв'язку задачі Коші (2.8), (2.18), який задовольняє умову*

$$\int_0^T \|u(t;\cdot)\|_p^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})} dt < +\infty.$$

Теорема 2.19. *Задача Коші (2.8),(2.18) коректно розв'язна у просторі* $\mathbb{L}_{p,1}^{\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})}$, $t \in (0;T]$, *її розв'язок зображується у вигляді (2.19).*

Теореми 2.17–2.19 про існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних розв'язку задачі Коші для вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова із класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ правильні у шкалі просторів Лебега із спеціальними вагами. Використання цих просторів у якості середовища дослідження задачі Коші для систем з цього класу дозволило ширше описати множину їх гладких розв'язків і охопити ті розв'язки, які можуть мати вже максимальний експоненціальний порядок зростання на нескінченності, щоправда, із звичайними граничними значеннями на початковій гіперплощині $t = 0$.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для диференціально-функціональних рівнянь важливою задачею є побудова та обґрунтування методів знаходження розв'язків початкових і крайових задач, оскільки на даний час немає універсальних методів їх розв'язання. Особливий інтерес викликають дослідження, в яких методи теорії звичайних диференціальних рівнянь застосовано для якісного аналізу диференціально-функціональних рівнянь.

Для сингулярно збурених задач важливими задачами є дослідження стійкості розв'язків та розвиток асимптотичних методів для дослідження якісної поведінки як окремих розв'язків так і їх множин.

У п. 3.1 розглядається система сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь. Одержано зображення інтегрального многовиду цієї системи. Метод усереднення застосовується до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням. Друге наближення в методі усереднення застосовано до дослідження стійкості системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням. Одержано достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь.

Існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом досліджено в п. 3.2.

Питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння та рівняння Хатчінсона розглянуто в п. 3.2.3.

Результати п.п. 3.1, 3.2 одержані І.І. Клевчуком в працях [83, 92–107].

Ефективним методом дослідження систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь є метод інтегральних многовидів [108, 109], який дозволяє понизити розмірність вихідної системи на інтегральному многовиді. У багаточисельних застосуваннях сингулярно збурених систем важливу роль відіграє перетворення змінних, яке дозволяє здійснити декомпозицію вихідної системи до блочно-трикутного вигляду [110–111], а в лінійному випадку розщепити вихідну систему на незалежні швидку і повільну підсистеми [112–114].

У п. 3.3 встановлюється аналогічна [112] розщеплююча заміна змінних для сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами та досліджується побудова асимптотичних розкладів інтегральних многовидів, за допомогою яких здійснюється розщеплення вихідної системи [115, 116].

Схема апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь уперше запропонована М. М. Красовським [118] при дослідженні задачі про синтез оптимального регулятора в системах із запізненням. Точність апроксимації нелінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням досліджена Ю. М. Рєпіним [119], який уперше розглянув апроксимацію скалярного елемента запізнення у випадку, коли його вхідна функція є диференційованою або задовольняє умову Ліпшиця. Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено у працях І. М. Черевка та Л. А. Піддубної [120,121]. Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого і нейтрального типів розглянуто в роботах І. М. Черевка та О. В. Матвія [122,123]. Побудова та обгрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботах І.М. Черевка та С.А. Іліки [124,125].

Наведені в п. 3.4 результати отримані спільно Черевком І.М., Піддубною Л.А., Матвієм О.В. та Ілікою С.А., опубліковані в працях [132–140] та висвітлені в 12 доповідях на наукових міжнародних та всеукраїнських конференціях.

3.1 Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

3.1.1 Побудова інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи та періодичні коливання в автономних рівняннях з малим запізненням

Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} &= G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що виконуються умови

1) Для всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні за t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені.

2) Функції $f(t,x,y,z)$, $h(t,x,y,z)$, $G(t,x,y,z)$, $P(t,x,y,z)$ та їх частинні похідні за t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $|y - \varphi(t,x)| \leq \rho$, $|z - \varphi(t,x)| \leq \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t,x,y,z)$ в точці $y = \varphi(t,x)$, $z = \varphi(t,x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(t,x,\varphi(t,x)+y,\varphi(t,x)+z) = B_1(t,x)y + B_2(t,x)z + G_1(t,x,y,z),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \leq \rho$, $|z| \leq \rho$ правильна нерівність $|G_1(t,x,y,z)| \leq K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0$.

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння $det(B_1(t,x)+B_2(t,x)\exp(-\lambda\Delta)-\lambda E) = 0$ лежать у півплощині $Re\lambda \leq -2\alpha < 0$.

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [73], а для сингулярно збурених – в [74] та ін. Згідно з [74], при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (3.1), що може бути поданий у вигляді $y_t = \varphi(t,x) + \xi(t,x,\varepsilon)$, де $\xi(t,x,0) = 0$. У праці [75] одержано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. Одержимо наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи більш загального вигляду, ніж в [75, 76].

Теорема 3.1. *Нехай для системи (3.1) виконуються умови 1 – 3. Тоді інтегральний многовид системи (3.1) можна зобразити у вигляді*

$$y_t = \varphi(t,x) + g(t,x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(t,x)+B_2(t,x)]^{-1}[(E+\Delta B_2(t,x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)))-$$

$$-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))] + \theta[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))],$$

$$-\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0.$$

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)), \tag{3.2}$$

де ε – малий додатний параметр, Δ – фіксоване додатне число, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються умови:

1) Для всіх $x \in \mathbb{R}$ рівняння $G(x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(x)$, причому функція $\varphi(x)$ та її похідні за x до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені.

2) Функції $f(x, y, z)$, $h(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ і їх частинні похідні за x, y, z до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені при $x \in \mathbb{R}$, $|y - \varphi(x)| \leq \rho$, $|z - \varphi(x)| \leq \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(x, y, z)$ в точці $y = \varphi(x)$, $z = \varphi(x)$ відносно y, z, одержимо $G(x, y + \varphi(x), z + \varphi(x)) = B_1(x)y + B_2(x)z + G_1(x, y, z)$, де $G_1(x, y, z) = O(|y|^2 + |z|^2)$ при $|y| + |z| \to 0$.

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння $det(B_1(x) + B_2(x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\alpha < 0$.

Тоді згідно з теоремою 3.1 інтегральний многовид системи (3.2) можна зобразити у вигляді $y_t = \varphi(x) + \varepsilon\Psi(x, z) + \theta z\dfrac{d\varphi(x)}{dx} + O(\varepsilon^2)$, $-\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0$, де

$$\Psi(x, z) = (B_1(x) + B_2(x))^{-1}\left[z(E + \Delta B_2(x))\frac{d\varphi}{dx} - P(x, \varphi(x), \varphi(x))\right].$$

Позначимо $\eta(x, z) = \Psi(x, z) - \Delta z\dfrac{d\varphi}{dx}$. Тоді рівняння на многовиді системи (3.2) набудуть вигляду

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x, \varphi(x) + \varepsilon\Psi(x, z), \varphi(x) + \varepsilon\eta(x, z)) + \varepsilon h(x, \varphi(x), \varphi(x)) + O(\varepsilon^2). \tag{3.3}$$

Підставляючи $z = dx/dt$ у друге рівняння системи (3.3), одержимо рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \varphi(x) + \varepsilon\Psi(x, \frac{dx}{dt}), \varphi(x) + \varepsilon\eta(x, \frac{dx}{dt})) + \varepsilon h(x, \varphi(x), \varphi(x)) + O(\varepsilon^2). \tag{3.4}$$

Рівняння (3.4) зведемо до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(x) = \varepsilon Q\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right), \tag{3.5}$$

де

$$q(x) = -f(x, \varphi(x), \varphi(x)),$$

$$Q(x,y,\varepsilon)=\Psi(x,y)\frac{\partial f(x,y,\varphi(x))}{\partial y}\bigg|_{y=\varphi(x)}+$$

$$+\eta(x,y)\frac{\partial f(x,\varphi(x),z)}{\partial z}\bigg|_{z=\varphi(x)}+h(x,\varphi(x),\varphi(x))+O(\varepsilon).$$

Нехай рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+q(x)=0 \tag{3.6}$$

має періодичний розв'язок

$$x=z(\psi,a),\quad z(\psi+2\pi,a)=z(\psi,a),\quad \psi=w(a)t+\varphi, \tag{3.7}$$

де стала a належить деякому інтервалу, φ – довільна стала,

Дослідженню рівняння (3.5) присвячено праці М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського [77], І.Г.Малкіна [78], А.М.Самойленка [79] та ін. У цій статті за допомогою методу усереднення [77] встановлено існування періодичних розв'язків рівняння (3.5). Ці результати застосовано до рівнянь із запізненням. Метод усереднення застосовано також до дослідження стійкості систем із запізненням.

Зробимо в рівнянні (3.5) заміну

$$x=z(\psi,a),\quad \frac{dx}{dt}=w(a)z'_\psi(\psi,a). \tag{3.8}$$

Врахувавши співвідношення $w^2(a)z''_{\psi^2}+q(z)=0$, рівняння (3.5) зведемо до стандартної форми

$$\frac{da}{dt}=\frac{\varepsilon}{D(a)}Q(z,wz'_\psi,\varepsilon)z'_\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt}=w(a)-\frac{\varepsilon}{D(a)}Q(z,wz'_\psi,\varepsilon)z'_a,$$

де $D(a)=-wz'_az''_{\psi^2}+z'_\psi(wz'_\psi)'_a$.

Поділивши в цій системі перше рівняння на друге, одержимо

$$\frac{da}{d\psi}=\frac{\varepsilon}{D(a)w(a)}Q(z,wz'_\psi,\varepsilon)z'_\psi+O(\varepsilon^2). \tag{3.9}$$

Поставимо у відповідність рівнянню (3.9) усереднене рівняння $\dfrac{da_1}{d\psi}=\varepsilon G(a_1)$, де

$$G(a)=\frac{\Phi(a)}{D(a)w(a)},\quad \Phi(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q(z(\psi,a),w(a)z'_\psi(\psi,a),0)z'_\psi(\psi,a)d\psi.$$

Теорема 3.2. *Нехай для системи (3.2) виконуються умови 1 – 3. Припустимо, що рівняння (3.6) має періодичний розв'язок (3.7) для a, що належать деякому околу значення $\bar{a}$. Якщо $\Phi(\bar{a}) = 0$, $D(\bar{a}) \neq 0$, $w(\bar{a}) \neq 0$, $G'(\bar{a}) \neq 0$, то система (3.2) має цикл з періодом, близьким до $2\pi/w(\bar{a})$. Цей цикл буде стійким, якщо $G'(\bar{a}) < 0$ і нестійким, якщо $G'(\bar{a}) > 0$.*

Для доведення досить застосувати до рівняння (3.9) другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [77].

Дослідимо періодичні коливання в рівнянні [80]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + H(x(t), x(t-\varepsilon)) = 0, \tag{3.10}$$

де ε – малий додатний параметр, функція $H(x, y)$ тричі неперервно диференційовна при $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Позначимо

$$q(x) = H(x, x), \quad g(x) = \left.\frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\right|_{y=x}.$$

Тоді

$$H(x(t), x(t-\varepsilon)) = H(x(t), x(t) - \varepsilon\frac{dx(t)}{dt} +$$

$$+O(\varepsilon^2)) = q(x(t)) - \varepsilon g(x(t))\frac{dx(t)}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Підставляючи в рівняння (3.10), одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(x) = \varepsilon g(x)\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Це рівняння з точністю до $O(\varepsilon^2)$ зводиться до вигляду (3.5), причому $Q(x, y, \varepsilon) = g(x)y + O(\varepsilon)$. Нехай рівняння (3.6) має періодичний розв'язок (3.7) для a, що належать деякому околу значення $\bar{a}$. Зробивши в рівнянні (3.10) заміну (3.8), можна одержати рівняння вигляду (3.9). Застосовуючи до цього рівняння другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [77], одержимо, що при $\Phi_1(\bar{a}) = 0$, $D(\bar{a}) \neq 0$, $w(\bar{a}) \neq 0$, $G_1'(\bar{a}) \neq 0$ система (3.2) має цикл з періодом, близьким до $2\pi/w(\bar{a})$. Цей цикл буде стійким, якщо $G_1'(\bar{a}) < 0$ і нестійким, якщо $G_1'(\bar{a}) > 0$. Тут позначено

$$G_1(a) = \frac{\Phi_1(a)}{D(a)}, \quad \Phi_1(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z(\psi, a))(z'_\psi(\psi, a))^2 d\psi.$$

Як приклад розглянемо рівняння (3.10) з функцією $H(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + my^3 + \delta y - \gamma x$, де $a + b + c + m = 1$, $\gamma - \delta = 1$. Тоді рівняння (3.10) зводиться до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - x = \varepsilon\delta\frac{dx}{dt} + \varepsilon\beta x^2\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2), \tag{3.11}$$

де $\beta = b + 2c + 3m$.

Якщо $-\dfrac{5}{4} < \dfrac{\beta}{\delta} < -1$, то при малих значеннях $\varepsilon > 0$ існує періодичний розв'язок рівняння (3.11) та відповідного йому рівняння (3.10). Внаслідок симетрії рівняння (3.11) існує ще один періодичний розв'язок з протилежним знаком.

3.1.2 Дослідження стійкості лінійних систем із запізненням

Розглянемо систему слабко зв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2y + \varepsilon P(t)y(t-h) = 0, \tag{3.12}$$

де ε – малий додатний параметр, $y = (y_1, \dots, y_q)^T$, L – діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами, $L = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_mt} + \bar{b}_{jsm}e^{-ia_mt}), \quad b_{jsm} \in \mathbb{C}, \quad a_m \geq 0.$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалася у багатьох роботах (див., наприклад, [73, 81, 82]). Далі використаємо методику з цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (3.12) в термінах її коефіцієнтів. Друге наближення в методі усереднення застосуємо для дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

Систему (3.12) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2y_j - \varepsilon\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)y_s(t-h), \quad j \in \{1, \dots, q\}.$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_jz_j, \quad z_j' = -\lambda_jy_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j}\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + iz_j$, тоді знаходимо

$$u_j' = -i\lambda_ju_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j}\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)(u_s(t-h) + \bar{u}_s(t-h)).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j \exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t)x(t-h) + \varepsilon G(t)\bar{x}(t-h), \tag{3.13}$$

де $x = (x_1, ..., x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h}, \quad G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h}$$

відповідно.

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 3.3. *[83] Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$ при $|j-s| + |m-1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (3.12) асимптотично стійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) < 0$ при $j \in \{1, \ldots, q\}$, і нестійкий, якщо існує k, для якого $c_k \sin(\lambda_k h) > 0$.*

Стійкість розв'язків системи (3.12) рівносильна стійкості розв'язків системи (3.13). Тому для доведення теореми 3.3 можна застосувати метод усереднення [84].

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість. Отже, потрібно застосувати друге наближення.

Позначимо $d_s = \mathrm{Re}\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm} \exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$
$$+ \frac{\bar{b}_{skm} b_{ksm} \exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)} \Big).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} |b_{skm}|^2 \left(\frac{\sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)} \right).$$

Теорема 3.4. *[83] Нехай $a_m > 0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j-s| + |m-k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок системи (3.12) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s \in \{1, \ldots, q\}$ і нестійкий, якщо існує k, для якого $d_k < 0$.*

Розглянемо систему

$$x' = \varepsilon F(t)x(t-h), \tag{3.14}$$

де ε – малий додатний параметр, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^p$, $F(t) = \sum\limits_{m=1}^{n} (A_m e^{ib_m t} + \overline{A}_m e^{-ib_m t})$, b_m – дійсні додатні різні числа, A_m – матриці з комплексними елементами.

У системі (3.14) зробимо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t)$, де $\tilde{F}(t) = \sum\limits_{m=1}^{n} \Big(\frac{1}{ib_m} \times \times A_m e^{ib_m t} - \frac{1}{ib_m}\overline{A}_m e^{-ib_m t}\Big)$. Тоді $x(t-h) = \xi - h\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$. Підставляючи в систему (3.14), одержуємо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3). \tag{3.15}$$

У системі (3.15) можна ще раз застосувати метод усереднення [79] і одержати усереднену систему $\xi' = \varepsilon^2 B\xi$, де $B = -\sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{b_m}\sin(b_m h)(A_m\overline{A}_m + \overline{A}_m A_m)$.

Теорема 3.5. *[83] Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (3.14) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (3.14) нестійка.*

Доведення теореми випливає з теореми Хейла про усереднення [84]. Якщо існують власні значення матриці B з нульовою та додатною дійсними частинами, то треба використати схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням.

3.2 Існування циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом та біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь та параболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [73, 76, 85, 86, 87]. Дослідимо існування та стійкість зліченного числа циклів для деяких класів гіперболічних систем з перетвореним аргументом. Такі задачі у простіших випадках розглядалися в [88]. Подібні задачі для інших класів диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися у працях [89 – 91] та ін.

3.2.1 Існування зліченного числа циклів гіперболічної системи першого порядку

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Позначимо через u_x – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_x(t, \theta) = u(t, x + \theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$.

Розглянемо гіперболічну систему з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + B(\varepsilon)u + F(u_x, \varepsilon) \tag{3.16}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{3.17}$$

де ε – малий додатний параметр, $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $F : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються умови:

1) $F(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор F п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів;

2) матриця $B(\varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε, має пару власних значень вигляду $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, а інші власні значення λ задовольняють умову $Re\ \lambda < -2\gamma_0 < 0$.

Розв'язок задачі (3.16), (3.17) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \xi(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\xi(y)$ має період 2π. Підставляючи $u = \xi(y)$ в рівняння (3.16), одержимо систему диференціально-функціональних рівнянь

$$(\sigma - a)\frac{d\xi}{dy} = B(\varepsilon)\xi + F(\xi_y, \varepsilon), \tag{3.18}$$

де ξ_y – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $\xi_y(\theta) = \xi(y + \theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$.

Зробивши в системі (3.18) заміну $y = (\sigma - a)z$, одержимо

$$\frac{d\xi}{dz} = B(\varepsilon)\xi + F(\xi_z, \varepsilon), \tag{3.19}$$

де ξ_z – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $\xi_z(\theta) = \xi(z + \theta)$, $-\Delta/(\sigma - a) \leq \theta \leq 0$.

Матрицю $B(\varepsilon)$ можна записати у вигляді $B(\varepsilon) = U(\varepsilon)D(\varepsilon)U^{-1}(\varepsilon)$, де матриця $D(\varepsilon)$ є блочно-діагональною $D(\varepsilon) = diag[B_1(\varepsilon), B_2(\varepsilon)]$, $B_1(\varepsilon)$ – діагональна матриця другого порядку з елементами $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ на діагоналі, власні значення матриці $B_2(\varepsilon)$ задовольняють умову $Re\ \lambda \leq -2\gamma_0 < 0$. Виконавши в системі (3.19) заміну $\xi = U(\varepsilon)v$, де $v = [\eta, \zeta]^T$, $\eta \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, одержимо систему

$$\frac{d\eta}{dz} = B_1(\varepsilon)\eta + F_1(v_z, \varepsilon), \quad \frac{d\zeta}{dz} = B_2(\varepsilon)\zeta + F_2(v_z, \varepsilon). \tag{3.20}$$

Тоді згідно з [85] існує інтегральний многовид системи (3.20), що може бути поданий у вигляді $v_z = S(\eta, \varepsilon)$. Поведінка розв'язків системи (3.20) на многовиді описується рівнянням

$$\frac{d\chi}{dz} = B_1(\varepsilon)\chi + F_1(S(\chi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{3.21}$$

Систему (3.21) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))w + G_1(w, \bar{w}, \varepsilon), \\ \frac{d\bar{w}}{dz} &= (\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon))\bar{w} + \bar{G}_1(w, \bar{w}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.22}$$

де $\chi = [w, \bar{w}]^T$. Для кожного розв'язку системи (3.20) існує розв'язок системи (3.21) такий, що вірна оцінка [85]

$$||v_z(t) - S(\chi(t), \varepsilon)|| \le M \exp(-\gamma_0 t), \quad t \ge 0. \tag{3.23}$$

Перше рівняння системи (3.22) перетворимо за допомогою підстановки

$$w = p + W_2(p, \bar{p}, \varepsilon) + W_3(p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{3.24}$$

де W_2 та W_3 — форми відповідно другого та третього порядку. Перетворення (3.24) можна підібрати так, що рівняння для p набуде вигляду [**??**]

$$\frac{dp}{dz} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))p + (\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon))p^2\bar{p} + P(p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{3.25}$$

де $P(p, \bar{p}, \varepsilon) = O(|p|^4)$ при $|p| \to 0$. В рівнянні (3.25) перейдемо до полярних координат $p = r \exp(i\varphi)$, тоді одержимо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(r, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{dr}{dz} &= \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(r, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.26}$$

де $R(r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$, $\Phi(r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^3)$ при $|r| \to 0$.

Нехай $\gamma(0) < 0$. Аналізуючи систему (3.26), переконуємося, що рівняння (3.25) має періодичний розв'язок $p = \rho(\varphi, \varepsilon)\exp(i\varphi)$, де $\rho(\varphi, \varepsilon) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\alpha'(0)}{-\gamma(0)}} + O(\varepsilon)$,

$\varphi = \varphi_0 + z[\beta(\varepsilon) - \varepsilon\delta(\varepsilon)\dfrac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})]$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Звідси $\varphi = \varphi_0 + z[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\dfrac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})]$. Підставивши періодичний розв'язок p рівняння (3.25) у праву частину рівності (3.24), одержимо періодичний розв'язок $w(t, \varepsilon)$ першого рівняння системи (3.22), звідки знаходимо періодичний розв'язок системи (3.20), а потім періодичний розв'язок $\xi(z, \varepsilon) = \xi\left(\dfrac{y}{\sigma - a}, \varepsilon\right)$ систем (3.19) та (3.18). Функція ξ буде мати період 2π відносно y тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{1}{\sigma - a}[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})] = k, \quad k = \pm1, \pm2, ... \qquad (3.27)$$

Розв'язуючи рівняння (3.27) відносно σ, одержимо зліченне число значень $\sigma = \sigma_k(\varepsilon)$. Отже, система (3.16) має зліченне число граничних циклів. Якщо $k > 0$, то $\sigma > a$ при малих ε і з нерівності (3.23) випливає, що такі цикли будуть експоненціально орбітально стійкими.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови 1, 2 і для коефіцієнта в рівнянні (3.10) виконується нерівність $\gamma(0) < 0$. Тоді існує зліченне число циклів системи (3.1) з параметрами $\sigma = \sigma_k$, що задовольняють рівняння (3.12). Значенням параметрів σ_k, $k > 0$, відповідають стійкі граничні цикли, для яких $\sigma_k > a$.*

Як приклад розглянемо систему (3.1), де $u \in \mathbb{R}^2$, $B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $F(u_x, \varepsilon) = -(u_1^2(x - \Delta) + u_2^2(x - \Delta))\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Тоді для знаходження хвильового розв'язку $u = \xi(y)$, $y = \sigma t + x$ задачі (3.1), (3.2) одержимо систему вигляду (3.3). Перейшовши у цій системі до полярних координат $\xi_1 = r\, sin\varphi$, $\xi_2 = r\, cos\varphi$, одержимо систему

$$(\sigma - a)\frac{d\varphi}{dy} = 1, \quad (\sigma - a)\frac{dr}{dy} = r(\varepsilon - r^2(y - \Delta)).$$

Отже, періодичний розв'язок системи (3.3) у цьому випадку має вигляд $\xi_1 = \sqrt{\varepsilon}\, sin\varphi$, $\xi_2 = \sqrt{\varepsilon}\, cos\varphi$, $\varphi = \varphi_0 + \dfrac{y}{\sigma - a}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Цей розв'язок буде мати період 2π тоді і тільки тоді, коли $\sigma = \sigma_k = a + \dfrac{1}{k}$, $k = \pm1, \pm2, ...$. Періодичні розв'язки будуть експоненціально орбітально стійкими при $k > 0$.

Зауваження 3.1. При виконанні умов теореми 3.6 існує також стійкий граничний цикл, що не залежить від змінної x.

3.2.2 Біжучі хвилі квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом

Дослідимо існування періодичних розв'язків крайової задачі

$$\frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\varepsilon\, f(w,w(t,x-\Delta)), \tag{3.28}$$

$$w(t,x+2\pi)=w(t,x), \tag{3.29}$$

де ε — малий додатний параметр, $a\neq 0$, $f\in\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Розв'язок задачі (3.28), (3.29) будемо шукати у вигляді хвилі $w=\theta(y)$, $y=\sigma t+x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Підставляючи $w=\theta(y)$ в рівняння (3.28), одержимо диференціальне рівняння із запізнюючим аргументом

$$\sigma\frac{d\theta}{dy}+a^2\frac{d^3\theta}{dy^3}=\varepsilon\, f(\theta,\theta(y-\Delta)), \tag{3.30}$$

або

$$\frac{d^3\theta}{dy^3}=-\gamma^2\frac{d\theta}{dy}+\mu\, f(\theta,\theta(y-\Delta)), \tag{3.31}$$

де $\gamma^2=\dfrac{\sigma}{a^2}$, $\mu=\dfrac{\varepsilon}{a^2}$. Рівняння (3.31) запишемо у вигляді системи

$$\frac{d\theta}{dy}=\theta_1,\quad \frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \frac{d\theta_2}{dy}=-\gamma^2\theta_1+\mu\, f(\theta,\theta(y-\Delta)). \tag{3.32}$$

Зведемо систему (3.32) до стандартної форми. Зробивши заміну $\theta=u_1+u_2+\bar u_2$, $\theta_1=i\gamma u_2-i\gamma\bar u_2$, $\theta_2=-\gamma^2u_2-\gamma^2\bar u_2$, де u_2 — комплексна змінна, знаходимо

$$u_1'=2\varepsilon_1 f(u_1+u_2+\bar u_2,u_1(y-\Delta)+u_2(y-\Delta)+\bar u_2(y-\Delta)),$$

$$u_2'=i\gamma u_2-\varepsilon_1 f(u_1+u_2+\bar u_2,u_1(y-\Delta)+u_2(y-\Delta)+\bar u_2(y-\Delta)),\quad \varepsilon_1=\frac{\mu}{2\gamma^2}.$$

Виконавши заміну $u_1=v_1$, $u_2=v_2\exp(i\gamma y)$, $\bar u_2=\bar v_2\exp(-i\gamma y)$, одержимо систему

$$\begin{gathered}v_1'=2\varepsilon_1 f(v_1+e^{i\gamma y}v_2+e^{-i\gamma y}\bar v_2,v_1(y-\Delta)+e^{i\gamma(y-\Delta)}v_2(y-\Delta)+e^{-i\gamma(y-\Delta)}\bar v_2(y-\Delta)),\\ v_2'=-\varepsilon_1e^{-i\gamma y}f(v_1+e^{i\gamma y}v_2+e^{-i\gamma y}\bar v_2,v_1(y-\Delta)+e^{i\gamma(y-\Delta)}v_2(y-\Delta)+\\ +e^{-i\gamma(y-\Delta)}\bar v_2(y-\Delta)).\end{gathered} \tag{3.33}$$

Системі (3.33) поставимо у відповідність усереднену систему [84]

$$v_1'=2\varepsilon_1g_1(v_1,v_2\bar v_2),\quad v_2'=-\varepsilon_1v_2g_2(v_1,v_2\bar v_2), \tag{3.34}$$

де $g_1(v_1, v_2\bar{v}_2) = M[f(v_1 + v_2 \exp(i\gamma y) + \bar{v}_2 \exp(-i\gamma y), v_1 + v_2 \exp(i\gamma(y - \Delta)) + \bar{v}_2 \exp(-i\gamma(y - \Delta)))]$, $g_2(v_1, v_2\bar{v}_2) = \dfrac{1}{v_2} M[\exp(-i\gamma y) f(v_1 + v_2 \exp(i\gamma y) + +\bar{v}_2 \exp(-i\gamma y), v_1 + v_2 \exp(i\gamma(y - \Delta)) + \bar{v}_2 \exp(-i\gamma(y - \Delta)))]$, $M[*]$ — середнє значення відносно y. Перейшовши в (3.34) до полярних координат $v_2 = r\ \exp(i\varphi)$, одержимо систему

$$v_1' = 2\varepsilon_1 g_1(v_1, r^2), \quad r' = -\varepsilon_1 r g_2(v_1, r^2). \tag{3.35}$$

Припустимо, що система $g_1(v_1, s) = 0,\ g_2(v_1, s) = 0$ має розв'язок (v_{10}, s_0), $v_{10} \in \mathbb{R},\ s_0 > 0$. Нехай матриця A з елементами

$$a_{11} = 2\frac{\partial g_1(v_1, r^2)}{\partial v_1},\ a_{12} = 2\frac{\partial g_1(v_1, r^2)}{\partial r},$$

$$a_{21} = -\frac{\partial [r g_2(v_1, r^2)]}{\partial v_1},\ a_{22} = -\frac{\partial [r g_2(v_1, r^2)]}{\partial r}$$

при $v = v_{10},\ r = \sqrt{s_0}$ задовольняє умови

$$\det\, A \neq 0, \quad sp\, A \neq 0. \tag{3.36}$$

Тоді система (3.35) має експоненціально стійкий або експоненціально дихотомічний стан рівноваги $(v_{10}, \sqrt{s_0})$. Стаціонарному розв'язку $(v_{10}, \sqrt{s_0})$ системи (3.35) відповідає періодичний розв'язок $\theta = v_{10} + 2\sqrt{s_0} \cos \gamma_1(\varepsilon) y + O(\varepsilon)$, $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma + O(\varepsilon)$, рівняння (3.30). Цей розв'язок буде мати період 2π відносно y тоді і тільки тоді, коли $\gamma = k + O(\varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, тобто $\sigma = k^2 a^2 + O(\varepsilon)$.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови (3.36). Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.28), (3.29) має зліченне число періодичних розв'язків*

$$w_k = v_{10} + 2\sqrt{s_0} \cos ky + O(\varepsilon), \quad y = (k^2 a^2 + O(\varepsilon))t + x, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Теорема 3.8. *Періодичний розв'язок w_k задачі (3.28), (3.29) буде експоненціально орбітально стійким, якщо виконуються нерівності* $\det\, A > 0$, $sp A < 0$.

Твердження теореми 3.8 випливає з експоненціальної стійкості стаціонарного розв'язку системи (3.35).

Як приклад розглянемо рівняння (3.28) з функцією $f(v, w) = \alpha(v - v^3) + \beta(w - w^3)$. Тоді функції g_1 та g_2 в правій частині системи (3.35) будуть мати вигляд $g_1(v_1, s) = (\alpha + \beta)(v_1 - v_1^3 - 6v_1 s)$, $g_2(v_1, s) = (\alpha + \beta \cos(\gamma\Delta))(1 - 3v_1^2 - 3s)$, отже, система (3.35) має стаціонарні розв'язки $(0, 1/\sqrt{3})$ та $(\pm 1/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{15})$.

Неважко перевірити, що першому з них відповідають стійкі хвилі при $\beta(\cos{(k\Delta)} -1) < 0$, $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\cos{(k\Delta)}) < 0$, а двом іншим — стійкі хвилі при $\beta(\cos{(k\Delta)} -1) < 0$, $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\cos{(k\Delta)}) > 0$.

Зауваження 3.2. Для рівняння вигляду (3.28), у якому немає запізнення в правій частині, аналогічні питання розглядалися в [89].

3.2.3 Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією та стійкість періодичних розв'язків

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon d\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + (d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon d\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + (d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2) \tag{3.37}$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x), \quad u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \tag{3.38}$$

де ε – малий додатний параметр, $d > 0$, $d_0 \in \mathbb{R}$.

Перейшовши до комплексних змінних $u = u_1 + iu_2$, $\bar{u} = u_1 - iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - iu + \varepsilon(\alpha + i\beta)u + (d_0 + ic_0)u^2\bar{u}. \tag{3.39}$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (3.37), (3.38). Розв'язок рівняння (3.39) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = \varepsilon d\frac{d^2\theta}{dy^2} - i\theta + \varepsilon(\alpha + i\beta)\theta + (d_0 + ic_0)\theta^2\bar{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = \varepsilon d\frac{d\theta_1}{dy} - i\theta + \varepsilon(\alpha + i\beta)\theta + (d_0 + ic_0)\theta^2\bar{\theta}. \tag{3.40}$$

Інтегральний многовид системи (3.40) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = -\frac{\varepsilon d}{\sigma^3}\theta - \frac{i}{\sigma}\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}(\alpha + i\beta)\theta + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \dots .$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = -\frac{\varepsilon d}{\sigma^3}\theta - \frac{i}{\sigma}\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}(\alpha + i\beta)\theta + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \dots \tag{3.41}$$

Перейшовши у рівнянні (3.41) до полярних координат, $w = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{d}{\sigma^3}\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \tag{3.42}$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \dfrac{d}{\sigma^2}$. Тоді рівняння (3.42) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{(\alpha - \frac{d}{\sigma^2}))|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (3.41) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(-\dfrac{i}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ повинна мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\dfrac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (3.39) має вигляд

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)), \tag{3.43}$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - dn^2)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = -1 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (3.37), (3.38) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad u_2 = \sqrt{\varepsilon}r_n\sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.44}$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.9. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > dn^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.37), (3.38) має періодичні відносно t розв'язки (3.44).*

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (3.43) рівняння (3.39) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - iv + \varepsilon(\alpha + i\beta)v + \varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 v + w_n^2\bar{v}), \tag{3.45}$$

де $w_n = r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = -1 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2$. Зробивши в рівнянні (3.45) заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$, одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(d\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + d_0 r_n^2)w + (d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))). \tag{3.46}$$

Розв'язок рівняння (3.46) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx), \quad \overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{3.47}$$

Підставляючи (3.47) в (3.46) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + d_0 r_n^2)y_{k+n} - d(k+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \quad (3.48)$$

Аналогічно підставляючи (3.47) у спряжене до (3.46) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + d_0 r_n^2)v_{k-n} - d(k-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (3.49)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (3.37), (3.38) визначається стійкістю системи (3.48), (3.49) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через εA матрицю системи (3.48), (3.49) з елементами εa_{11}, εa_{12}, εa_{21}, εa_{22}. Матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4dknc_0r_n^2$, тобто

$$(dk^2 + \alpha - dn^2)^2(dk^2 + 2\alpha - 6dn^2) > 4dn^2 c_0^2 r_n^4, \quad (3.50)$$

де $r_n^2 = (dn^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 3.10. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (3.37), (3.38) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.50) при всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.*

Як приклад розглянемо рівняння (3.37), в якому $\beta = 0$, $c_0 = 0$, Тоді з теореми 3.9 випливає, що при $d_0 < 0$, $dn^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок $u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - dn^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(-t+nx) \\ \sin(-t+nx) \end{pmatrix}$. Згідно з теоремою 3.10 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6d}(d + 2\alpha)$.

3.2.4 Періодичні режими рівняння спінового горіння

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} \right], \quad (3.51)$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t,x), \quad (3.52)$$

де ε – малий додатний параметр, $\varrho > 0$.

Задача (3.51), (3.52) еквівалентна системі

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \xi = \varepsilon \left[p\left(1 - \frac{4}{3}p^2\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right], \tag{3.53}$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t, x), \quad p(t, x + 2\pi) = p(t, x).$$

Розв'язок системи (3.53) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta_1(y)$, $p = \theta_2(y)$, $y = \sigma t + x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \sigma\frac{d\theta_2}{dy} + \theta_1 = 2\varepsilon\left[\theta_2\left(1 - \frac{4}{3}\theta_2^2\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2\theta_2}{dy^2}\right].$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta_2}{dy} = \theta_3$ зведемо до вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = \theta_3, \quad \sigma\theta_3 + \theta_1 = 2\varepsilon\left[\theta_2\left(1 - \frac{4}{3}\theta_2^2\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d\theta_3}{dy}\right]. \tag{3.54}$$

Інтегральний многовид системи (3.54) можна зобразити у вигляді

$$\theta_3 = -\frac{1}{\sigma}\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2\left(1 - \frac{4}{3}\theta_2^2\right) + \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2\right] + O(\varepsilon^2).$$

Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = -\frac{1}{\sigma}\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2\left(1 - \frac{4}{3}\theta_2^2\right) + \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2\right] + O(\varepsilon^2). \tag{3.55}$$

Перейшовши до комплексних змінних $u = \theta_1 + i\theta_2$, $\bar{u} = \theta_1 - i\theta_2$, одержимо рівняння

$$\frac{du}{dy} = -\frac{i}{\sigma}u + \frac{\varepsilon}{\sigma}[u - \bar{u} + \frac{1}{3}(u - \bar{u})^2 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}(u - \bar{u})] + O(\varepsilon^2). \tag{3.56}$$

Зробивши у рівнянні (3.56) заміну

$$u = w + \varepsilon i\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)\bar{w} + \frac{1}{6}w^3 - \frac{1}{2}w\bar{w}^2 + \frac{1}{12}\bar{w}^3\right],$$

одержимо

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{i}{\sigma}w + \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[w - w^2\bar{w} - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}w\right] + O(\varepsilon^2). \tag{3.57}$$

Перейшовши у рівнянні (3.57) до полярних координат $w = r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[r - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}r - r^3\right] + O(\varepsilon^2). \tag{3.58}$$

Нехай виконується нерівність $\sigma^2\varrho^2 > 1$. Тоді рівняння (3.58) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (3.56) має вигляд $u = R_0 \exp\left(-\frac{i}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta_1 = R_0 \cos\left(\frac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$, $\theta_2 = -R_0 \sin\left(\frac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$ системи (3.55). Враховуючи, що функції θ_1 та θ_2 повинні мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\frac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (3.51) має вигляд

$$\xi_n = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} \cos(-t + nx) + O(\varepsilon), \tag{3.59}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.11. *Нехай для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.51), (3.52) має періодичні відносно t розв'язки (3.59), де $n \in \mathbb{Z}$.*

Система рівнянь у варіаціях в околі періодичного розв'язку $\xi_n = \xi_n(t, x)$, $p_n = \dfrac{\partial \xi_n(t, x)}{\partial t}$ системи (3.53) має вигляд

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 = 2\varepsilon \left[v_2 - 4p_n^2 v_2 + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right].$$

Перейшовши до комплексних змінних $v = v_1 + iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -iv + \varepsilon \left[v - \bar{v} - 4p_n^2 (v - \bar{v}) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 (v - \bar{v})}{\partial x^2} \right].$$

Зробивши заміну $v = w \exp(-it)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon \left[w - 2r_n^2 w - r_n^2 \exp(2inx) \bar{w} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \tag{3.60}$$

де $r_n = \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}}$.

Розв'язок рівняння (3.60) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є (3.47). Підставляючи (3.47) в (3.60) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon \left[y_{k+n} - 2r_n^2 y_{k+n} - r_n^2 v_{k-n} - \frac{(k+n)^2}{\varrho^2} y_{k+n} \right]. \tag{3.61}$$

Аналогічно підставляючи (3.47) у спряжене до (3.60) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon \left[v_{k-n} - 2r_n^2 v_{k-n} - r_n^2 y_{k+n} - \frac{(k-n)^2}{\varrho^2} v_{k-n} \right]. \tag{3.62}$$

Стійкість періодичних розв'язків рівняння спінового горіння визначається стійкістю системи (3.61), (3.62) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через εA матрицю системи (3.61), (3.62) з елементами εa_{11}, εa_{12}, εa_{21}, εa_{22}. Матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості періодичного розв'язку $\xi_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $det(A) > 0$, тобто $k^2 \left(k^2 + 2\varrho^2 - 6n^2\right)/\varrho^4 > 0$. Ця умова рівносильна умові

$$n^2 < \frac{1}{6}(2\varrho^2 + 1). \tag{3.63}$$

Теорема 3.12. *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (3.51), (3.52) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.63).*

3.3 Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами

3.3.1 Схема розщепелення системи лінійних сингулярно збурених рівнянь з двома малими параметрами

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2, \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1 &= A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \dot{x}_2 &= A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{aligned} \tag{3.64}$$

в області $\Omega = \{(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \ t \in \mathbb{R}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\}$, де $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0,2}$ – матриці розмірностей $n_i \times n_j$, ε_1, ε_2 – малі додатні параметри.

Припустимо, що для системи (3.64) справджуються умови:

1) матриці $A_{ij}(t)$, $i,j=\overline{0,2}$, рівномірно обмежені за нормою для $t\in\mathbb{R}$ додатною сталою M;

2) власні значення $\lambda_i=\lambda_i(t)$, $i=0,1,\ldots$, матриці $A_{22}(t)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i\le -2\beta<0,\quad \beta>0.$$

Здійснимо в системі (3.64) заміну змінних

$$x_0=y_0+\varepsilon_1\varepsilon_2H_0w, x_1=y_1+\varepsilon_2H_1w,$$

$$x_2=w+P_0x_0+P_1x_1, \tag{3.65}$$

де H_0, H_1, P_0, P_1 – матричні функції відповідних розмірностей.

В результаті система (3.64) матиме вигляд:

$$\begin{gathered}
\dot y_0=(A_{00}+A_{01}P_0-H_0(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\\
-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0))y_0+(A_{01}+A_{02}P_1-H_0(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1))y_1+(\varepsilon_1\varepsilon_2A_{00}H_0+\varepsilon_2A_{01}H_1+\\
+A_{02}(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+\varepsilon_2P_1H_1)-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_0-H_0(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}+\\
+\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)\times H_0+\\
+\varepsilon_2(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)H_1))w,\\
\varepsilon_1\dot y_1=(A_{10}+A_{12}P_0-H_1(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\\
-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0))y_0+(A_{11}+A_{12}P_1-H_1(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}- \quad (3.66)\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1))y_1+(\varepsilon_1\varepsilon_2A_{10}H_0+\varepsilon_2A_{11}H_1+A_{12}(E+\\
+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+\varepsilon_2P_1H_1)-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot H_1-H_1(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}+\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{20}+A_{22}P_0-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)H_0+\varepsilon_2(A_{21}+A_{22}P_1-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)H_1))w,\\
\varepsilon_1\varepsilon_2\dot w=(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0\times A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)y_0+(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)y_1+(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\varepsilon_2P_1A_{12}+\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{20}+A_{22}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00}-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0-\varepsilon_2P_1A_{10}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_0-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_0)H_0+\varepsilon_2(A_{21}+A_{22}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01}-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1-\varepsilon_2P_1A_{11}-\varepsilon_2P_1A_{12}P_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot P_1)H_1)w.
\end{gathered}$$

Якщо матриці P_0 і P_1 вибрати як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0 = A_{20} + A_{22}P_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{00} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} P_0 - \varepsilon_2 P_1 A_{10} - \varepsilon_2 P_1 A_{12} P_0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_1 = A_{21} + A_{22}P_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{01} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} P_1 - \varepsilon_2 P_1 A_{11} - \varepsilon_2 P_1 A_{12} P_1, \end{cases} \tag{3.67}$$

то система (3.66) набуде вигляду

$$\dot{y}_0 = (A_{00}+A_{02}P_0)y_0+(A_{01}+A_{02}P_1)y_1+(\varepsilon_1\varepsilon_2 A_{00}H_0+\varepsilon_2 A_{01}H_1+A_{02}(E+\varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0+$$
$$+\varepsilon_2 P_1 H_1) - H_0(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}) - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_0)w,$$
$$\varepsilon_1\dot{y}_1 = (A_{10} + A_{12}P_0)y_0 + (A_{11} + A_{12}P_1)y_1 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 A_{10}H_0 + \varepsilon_2 A_{11}H_1 + A_{12}(E+$$
$$+\varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_2 P_1 H_1) - H_1(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}) - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_1)w,$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12})w. \tag{3.68}$$

Вибравши матриці H_0 та H_1 як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{00}H_0 + \varepsilon_2 A_{01}H_1 + A_{02}(E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_2 P_1 H_1) - \\ -H_0(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}), \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{10}H_0 + \varepsilon_2 A_{11}H_1 + A_{12}(E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_2 P_1 H_1) - \\ -H_1(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}), \end{cases} \tag{3.69}$$

система (3.68) матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = B_{00}y_0 + B_{01}y_1, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 = B_{10}y_0 + B_{11}y_1, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = B_{22}w, \end{cases} \tag{3.70}$$

де $B_{ij} = A_{ij} + A_{i2}P_j$, $i, j = 0, 1$, $B_{22} = A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}$.

Позначимо $Q(t, s, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ фундаментальну матрицю рівняння

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_1 = A_{22}x_2.$$

Рівномірна обмеженість матриці A_{22} в області Ω і умова 2) забезпечує оцінку [108, 111]:

$$\|Q(t, s, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\| \le K e^{-\frac{3\beta}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}(t-s)}, \tag{3.71}$$

для деякого $K > 0$, при будь-яких $-\infty < s \le t < \infty$.

Запишемо систему (3.70) в еквівалентній формі системи інтегральних рівнянь

$$P_0(t, s, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{t} Q(t, s, \varepsilon_1, \varepsilon_2)[A_{20}(s, \varepsilon_1, \varepsilon_2) - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0(s, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\times$$

$$\times(A_{00}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+A_{02}(s,\varepsilon_1,ve_2)P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))-\varepsilon_2P_1(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)(A_{10}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+$$
$$+A_{12}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))]ds, \tag{3.72}$$
$$P_1(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{t}Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)[A_{21}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times$$
$$\times(A_{01}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+A_{12}(s,\varepsilon_1,ve_2)P_1(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))-\varepsilon_2P_1(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)(A_{11}(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+$$
$$+A_{12}(s,\varepsilon_1,ve_2)P_0(s,\varepsilon_1,\varepsilon_2))]ds.$$

Застосовуючи оцінку (3.71) за допомогою принципу стискаючих відображень нескладно показати, що системи (3.67) та (3.69) мають єдиний обмежений на всій числовій осі розв'язок.

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови 1) – 2). Тоді існує* ε_2^* *таке, що при* $0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^*$ *система (3.67) має єдиний обмежений розв'язок при* $t\in\mathbb{R}$ *і справедливі оцінки*
$$\begin{aligned}|P_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|&\le\frac{KM}{\beta},\\ |P_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|&\le\frac{KM}{\beta}.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Лема 3.2. *Нехай справджуються умови 1) – 2). Тоді існує* $\varepsilon_2^{**}>0$ *таке, що при* $0<\varepsilon_2<\varepsilon_2^{**}$ *система (3.69) має єдиний обмежений розв'язок* $H_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $H_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ *при* $t\in\mathbb{R}$.

Розглянемо тепер систему із перших двох рівнянь системи (3.70)
$$\begin{cases}\dot y_0=B_{00}y_0+B_{01}y_1,\\ \varepsilon_1\dot y_1=B_{10}y_0+B_{11}y_1.\end{cases}\tag{3.74}$$
Із співвідношень $B_{ij}=A_{ij}+A_{i2}P_j$, $i,j=0,1$, умови 1) та нерівностей (3.73) дістаємо, що матриці B_{ij}, $i,j=0,1$, рівномірно обмежені за нормою сталою $M_1=M\Big(1+\dfrac{KM}{\beta}\Big)$.

Нехай справджується умова

3) власні значення $\lambda_i=\lambda_i(t)$, $i=0,1,\ldots$, матриці $B_{11}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ задовольняють нерівність
$$\operatorname{Re}\lambda_i\le-2\gamma<0,\quad \gamma>0.$$
Тоді існує $\varepsilon_1^{**}>0$ таке, що для $0<\varepsilon_1<\varepsilon_1^{**}$ заміна змінних [112]
$$\begin{cases}y_0=u+\varepsilon_1H(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)v,\\ y_1=v+P(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)y_0,\end{cases}\tag{3.75}$$

розщеплює систему (3.74) на незалежні підсистеми

$$\begin{cases} \dot{u} = (B_{00} + B_{01})u, \\ \varepsilon_1 \dot{v} = (B_{11} - \varepsilon_1 H B_{01})v. \end{cases} \tag{3.76}$$

Матричні функції P і H є рівномірно обмеженими розв'язками таких рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \dot{P} = \varepsilon_1 (B_{00} + B_{01}H)P + B_{01} - P(B_{11} - \varepsilon_1 H B_{01}), \\ \varepsilon_1 \dot{H} = B_{10} + B_{11}H - \varepsilon_1 H(B_{00} + B_{01}H). \end{cases}$$

Виражаючи старі змінні x_0, x_1, x_2 через нові u, v, w одержуємо наступну теорему.

Теорема 3.13. *Нехай виконуються умови 1) – 3). Тоді для достатньо малих ε_1, ε_2 існує невироджена заміна змінних*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \varepsilon_1 H & \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0 \\ P & E + \varepsilon_1 PH & \varepsilon_2 H_1 \\ R & S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

де $R = P_0 + P_1 P$, $S = P_1 + \varepsilon_1(P_0 + P_1 P)H$, $T = E + \varepsilon_1 \varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_1 P_1 H_1$, за допомогою якої система (3.64) зводиться до трьох незалежних підсистем

$$\begin{cases} \dot{u} = (B_{00} + B_{01})u, \\ \varepsilon_1 \dot{v} = (B_{11} - \varepsilon_1 H B_{01} H)v, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{w} = B_{22} w. \end{cases} \tag{3.78}$$

Зауваження 3.3. Умова 3) є складною для перевірки, оскільки матриці P_0 та P_1 вдається знайти в явному вигляді тільки у найпростіших випадках. Легко переконатися, що умова 3) буде справджуватися при малих ε_1, якщо $A_{12} = \varepsilon_1 \bar{A}_{12}$, і власні значення матриці A_{11} задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_{11}) \le -2\gamma, \quad \gamma > 0.$$

3.3.2 Асимптотичні розклади розщеплюючого перетворення

Знайти точний вигляд коефіцієнтів розщеплюючого перетворення (3.77) вдається тільки у найпростіших випадках, тому представляє інтерес виписати відповідні розщеплені системи при наближеному знаходженні асимптотичних розкладів цих коефіцієнтів.

IV) Нехай матриці $A_{ij}(t)$, $i,j = \overline{0,2}$, $A_{22}^{-1}(t)$ рівномірно обмежені для $t \in R$ разом із своїми похідними до $(n+1)$ порядку включно.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T(u) = A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}u - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{d}{dt} u. \tag{3.79}$$

Покажемо, що існує функція $u(t, x_0(t), x_1(t), \varepsilon_2)$, яку можна представити у вигляді

$$u = \overline{P}_0(t, \varepsilon_2)x_0 + \overline{P}_1(t, \varepsilon_2)x_1 = (P_0^0(t) + \varepsilon_2 P_0^1(t) + ... + \varepsilon_2^n P_0^n(t))x_0 + \\ +(P_1^0(t) + \varepsilon_2 P_1^1(t) + ... + \varepsilon_2^n P_1^n(t))x_1, \tag{3.80}$$

де $P_0^i(t)$, $P_1^i(t)$, $i = \overline{0, n}$ – рівномірно обмежені разом із своїми $(n - i + 1)$ похідними, така, що на обмежених розв'язках системи (3.64)

$$T(u) = o(\varepsilon_2^{n+1}).$$

Підставимо співвідношення (3.80) у рівність (3.79) і підберемо функції $P_0^i(t)$, $P_1^i(t)$, $i = \overline{0, n}$ так, щоб у рівності (3.79) перетворилися в нуль всі члени, що містять ε_2 в степені, меншій, ніж $n + 1$. Обгрунтування можливості такого вибору неважко провести за індукцією. При цьому для коефіцієнтів у представленні (3.80) одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$\begin{aligned}
&P_0^0(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{20}(t),\\
&P_1^0(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t),\\
&P_0^k(t) = A_{22}^{-1}(t)\left(\varepsilon_1 \dot{P}_1^{k-1}(t) + \varepsilon_1 P_0^{k-1}(t)A_{00}(t) + + \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k-1} P_0^i(t)A_{02}(t)P_0^{k-i-1}(t) + \right.\\
&\left. + P_1^{k-1}(t)A_{10}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} P_1^i(t)A_{12}(t)P_0^{k-i-1}(t)\right),\\
&P_1^k(t) = A_{22}^{-1}(t)\left(\varepsilon_1 \dot{P}_1^{k-1}(t) + \varepsilon_1 P_0^{k-1}(t)A_{01}(t) + + \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k-1} P_0^i(t)A_{02}(t)P_0^{k-i-1}(t) + \right.\\
&\left. + P_1^{k-1}(t)A_{11}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} P_1^i(t)A_{12}(t)P_1^{k-i-1}(t)\right), \quad k = 1, 2, ..., n.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Обмеженість P_0^i, P_1^i та їх частинних похідних до $(n - i + 1)$ порядку випливає із умови IV). Якщо функції P_0^i, P_1^i вибрані за формулами (3.81), то диференціальне співвідношення (3.79) набуде вигляду

$$T(u) = \varepsilon_2^{n+1}(\eta_0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)x_0 + \eta_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)x_1),$$

де η_0, η_1 – рівномірно обмежені функції.

Якщо у вихідній системі (3.64) зробити заміну

$$x_2 = \overline{P}_0 x_0 + \overline{P}_1 x_1 + \varepsilon_2^{n+2} z,$$

то для змінних x_0, x_1, z одержимо систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0 = (A_{00}(t) + A_{02}(t)\overline{P}_0)x_0 + \left(A_{01}(t) + A_{02}(t)\overline{P}_1\right)x_1 + \varepsilon_2^{n+1}A_{02}(t)z,\\
&\varepsilon_1\dot{x}_1 = (A_{10}(t) + A_{12}(t)\overline{P}_0)x_0 + \left(A_{11}(t) + A_{12}(t)\overline{P}_1\right)x_1 + \varepsilon_2^{n+1}A_{12}(t)z,\\
&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{z} = \eta_0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)x_0 + \eta_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)x_1 + A_{22}(t)z.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Система (3.82) – це система типу (3.64), для якої існує інтегральний многовид [115]

$$z = P_0^*(t,\varepsilon)x_0 + P_1^*(t,\varepsilon)x_1, \tag{3.83}$$

де P_0^*, P_1^* – рівномірно обмежені функції.

Якщо система (3.82) має інтегральний многовид (3.83), то система (3.64) має інтегральний многовид

$$x_2 = (\overline{P}_0 + \varepsilon_2^{n+1}P_0^*)x_0 + (\overline{P}_1 + \varepsilon_2^{n+1}P_1^*)x_1 = P_0x_0 + P_1x_1,$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$\begin{gathered} x_2 = (P_0^0 + \varepsilon_2 P_0^1 + ... + \varepsilon_2^n P_0^n + \varepsilon_2^{n+1}P_0^*)x_0 + \\ +(P_1^0 + \varepsilon_2 P_1^1 + ... + \varepsilon_2^n P_1^n + \varepsilon_2^{n+1}P_1^*)x_1. \end{gathered} \tag{3.84}$$

Здійснимо в системі (3.64) заміну змінних

$$x_2 = P_0x_0 + P_1x_1 + w,$$

одержимо систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = (A_{00} + A_{02}P_0)x_0 + (A_{01} + A_{02}P_1)x_1 + A_{02}w, \\ &\varepsilon_1\dot{x}_1 = (A_{10} + A_{12}P_0)x_0 + (A_{11} + A_{12}P_1)x_2 + A_{12}w, \\ &\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02} - \varepsilon_2P_1A_{12})\,w. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Розглянемо тепер диференціальні вирази

$$\begin{aligned} T_0(u_0,u_1) = \varepsilon_1\varepsilon_2(A_{00} + A_{02}P_0)u_0 + \varepsilon_2(A_{01} + A_{02}P_1)u_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\tfrac{d}{dt}u_0 + A_{02}w, \\ T_1(u_0,u_1) = \varepsilon_1\varepsilon_2(A_{10} + A_{12}P_0)u_0 + \varepsilon_2(A_{11} + A_{12}P_1)u_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\tfrac{d}{dt}u_1 + A_{12}w. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Покажемо, що існують функції $u_0(t,\varepsilon_2,w)$, $u_1(t,\varepsilon_2,w)$, які можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} u_0 = \overline{H}_0 w = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_2^i H_0^i w, \\ u_1 = \overline{H}_1 w = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_2^i H_1^i w, \end{aligned} \tag{3.87}$$

де H_0^i, H_1^i, $i = \overline{0,n}$ – рівномірно обмежені разом із своїми $(n-i+1)$ похідними, такі що

$$T_0(u_0,u_1) = o(\varepsilon_2^{n+1}), \quad T_1(u_0,u_1) = o(\varepsilon_2^{n+1}).$$

Підставимо співвідношення (3.87) у рівності (3.86) і підберемо функції H_0^i, H_1^i, $i = \overline{0,n}$ так, щоб в рівностях (3.86) перетворились в нуль всі члени, що містять ε_2 в степені меншій, ніж $n+1$. Для коефіцієнтів H_0^i, H_1^i одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$
\begin{aligned}
&H_0^0 = A_{01}A_{22}^{-1},\\
&H_1^0 = A_{12}A_{22}^{-1},\\
&H_0^k = (\varepsilon_1 A_{00}H_0^{k-1} + A_{01}H_1^{k-1} + \varepsilon_1 A_{02}\sum_{i=0}^{k-1} P_0^i H_0^{k-1-i} + A_{02}\sum_{i=0}^{k-1} P_1^i H_1^{k-1-i} +\\
&+\varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k-1} H_0^i P_0^{k-1-i} A_{02} + \sum_{i=0}^{k-1} H_0^i P_1^{k-1-i} A_{12} - \varepsilon_1 \dot{H}_0^{k-1})A_{22}^{-1},\\
&H_1^k = (\varepsilon_1 A_{10}H_0^{k-1} + A_{11}H_1^{k-1} + \varepsilon_1 A_{12}\sum_{i=0}^{k-1} P_0^i H_0^{k-1-i} + A_{12}\sum_{i=0}^{k-1} P_1^i H_1^{k-1-i} +\\
&+\varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k-1} H_1^i P_0^{k-1-i} A_{02} + \sum_{i=0}^{k-1} H_1^i P_1^{k-1-i} A_{12} - \varepsilon_1 \dot{H}_1^{k-1})A_{22}^{-1}, \quad k = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Обмеженість H_0^i, H_1^i та їх частинних похідних випливає із умови IV). У цьому випадку диференціальні вирази (3.86) набувають вигляду

$$T_0(u_0, u_1) = \varepsilon_2^{n+1}\mu_0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)w,$$

$$T_1(u_0, u_1) = \varepsilon_2^{n+1}\mu_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)w,$$

де μ_0, μ_1 – рівномірно обмежені функції.

Якщо тепер у системі (3.85) зробити заміну

$$x_0 = \varepsilon_2^{n+1}y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2\overline{H}_0 w,$$

$$x_1 = \varepsilon_2^{n+1}y_1 + \varepsilon_2\overline{H}_1 w,$$

то для змінних y_0, y_1, w одержимо систему

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_0 = (A_{00} + A_{02}P_0)y_0 + (A_{01} + A_{02}P_1)y_1 + \mu_0 w,\\
&\varepsilon_1\dot{y}_1 = (A_{10} + A_{12}P_0)y_0 + (A_{11} + A_{12}P_1)y_1 + \mu_1 w,\\
&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12})w,
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

типу (3.64), для якої існують інтегральні многовиди [115]

$$y_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^* w, \quad y_1 = \varepsilon_2 H_1^* w. \tag{3.90}$$

Якщо система (3.89) має інтегральні многовиди (3.90), тоді система (3.85) має інтегральні многовиди

$$x_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2(\overline{H}_0 + \varepsilon_2^{n+1}H_0^*)w = \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w,$$

$$x_1 = \varepsilon_2(\overline{H}_1 + \varepsilon_2^{n+1}H_1^*)w = \varepsilon_2 H_1 w,$$

для яких справедливі асимптотичні розклади

$$x_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_2^i H_0^i + \varepsilon_2^{n+1} H_0^* \right) w,$$

$$x_1 = \varepsilon_2 \left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_2^i H_1^i + \varepsilon_2^{n+1} H_1^* \right) w.$$

Здійснивши в системі (3.75) заміну змінних

$$x_0 = y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w, \quad x_1 = y_1 + \varepsilon_2 H_1 w,$$

одержимо систему (3.70) і завершуємо перший етап розщеплення системи (3.64).

Теорема 3.14. *Нехай справджуються умови I), II), IV). Тоді для достатньо малих значень ε_2 існує заміна змінних (3.65), за допомогою якої система (3.64) зводиться до вигляду (3.70), і коефіцієнти асимптотичних розкладів перетворення (3.65) можна однозначно знайти із алгебраїчних співвідношень (3.81), (3.88).*

Представлення функцій P, H із рівностей (3.75) у вигляді асимптотичних розкладів

$$\begin{aligned} P(t,\varepsilon_1) &= P_0(t) + \varepsilon_1 P_1(t) + ..., \\ H(t,\varepsilon_1) &= H_0(t) + \varepsilon_1 H_1(t) + ..., \end{aligned} \tag{3.91}$$

встановлено у працях [108, 112, 117].

При цьому коефіцієнти розкладів (3.91) однозначно знаходяться із алгебраїчних співвідношень

$$\begin{aligned} &P_0(t) = -B_{11}^{-1}B_{10}, \quad H_0(t) = B_{01}B_{11}^{-1}, \\ &P_k(t) = B_{11}^{-1}(\dot{P}_{k-1} + P_{k-1}B_{00} + \sum_{i=0}^{k-1} P_i B_{01} P_{k-1-i}), \\ &H_k(t) = (B_{00}H_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} B_{01}P_i H_{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} M_i P_{k-1-i} + B_{01} - \dot{M}_{k-1})B_{11}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Обмежуючись у співвідношеннях (3.65) та (3.75) тільки нульовими коефіцієнтами асимптотичних наближень одержуємо таке нульове наближення розщепленої системи

$$\begin{aligned} &\dot{u} = (A_{00} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{20} + A_{01} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{21})u, \\ &\varepsilon_1\dot{v}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) - \varepsilon_1(A_{01} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{21})\times \\ &\times(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}(A_{01} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{21}))v, \\ &\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (A_{22} + \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{22}^{-1}A_{20}A_{02} + \varepsilon_2 A_{22}^{-1}A_{21}A_{12})w. \end{aligned} \tag{3.93}$$

3.4 Схеми апроксимації початкових задач для ДФР

3.4.1 Схема апроксимації системи диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями

Нехай n, p – деякі натуральні числа, t_0, T – задані дійсні числа, $t_0 < T$. Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_p)), \quad t \in [t_0, T], \ p \geq 1, \tag{3.94}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k, k = \overline{1,p}$, – запізнення, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $f(t, u_0, \dots, u_p)$ – неперервна вектор-функція, визначена для $t \in [t_0, T]$, $u_k \in R^n$, $k = \overline{0,p}$.

Будемо розглядати для $x \in \mathbb{R}^n$ норму $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Припустимо, що функція f задовольняє умову Ліпшица

$$||f(t, u_0', \dots, u_p') - f(t, u_0'', \dots, u_p'')|| \leq \sum_{k=0}^{p} L_i ||u_k' - u_k''||, \tag{3.95}$$

де $L_k > 0$, $u_k', u_k'' \in R^n$, $k = \overline{0,p}$, $||f(t, u_0, ..., u_p)|| = \max\limits_t \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(t, u_0, ..., u_p)|$.

Нехай $\varphi(t)$ – задана на $[t_0 - \tau, t_0]$ неперервна функція. Розв'язком початкової задачі для системи (3.94) будемо називати функцію $x(t)$, яка співпадає з $\varphi(t)$ на $[t_0 - \tau, t_0]$ і задовольняє систему (3.94) на $[t_0, T]$.

Нехай $m \in N$. Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{0,m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{dz_0(t)}{dt} = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \dots, z_{l_p}(t)), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \ j = \overline{1,m}, t \in [t_0, T], \end{gathered} \tag{3.96}$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi(t_0 - \frac{\tau j}{m}), \ j = \overline{0,m}, \tag{3.97}$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \leq \tau_j < \frac{\tau(l_j + 1)}{m}.$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (3.96) апроксимує систему рівнянь із запізненням (3.94), якщо справджуються співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0, \ j = \overline{0,m}, t \in [t_0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

Нехай $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t)),\ z_j(t)=(z_{j1}(t),\dots,z_{jn}(t)),\ j=\overline{1,m}$,

$$N_j(t)=\max_{t_0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(s-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(s)|, j=\overline{0,m},\ t\in[t_0,T]. \tag{3.98}$$

Представимо $z_{ji}(t)$ $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t)+z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\begin{aligned}&\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(1)}(t)}{dt}+z_{1i}^{(1)}(t)=x_i(t),\\ &\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(1)}(t)=z_{j,i-1}^{(1)}(t), j=\overline{2,m},\ i=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$z_{ji}^{(1)}(t_0)=x_i(t_0-\frac{j\tau}{m}),\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}. \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt}+z_{1i}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t),\\ &\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(2)}(t)=z_{j,i-1}^{(2)}(t),\ j=\overline{2,m}, i=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$z_{ji}^{(2)}(t_0)=0,\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}. \tag{3.102}$$

Оцінимо різниці $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(t)|$, враховуючи вигляд систем (3.99)-(3.100) та (3.101)-(3.102). Маємо

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}(t)|=\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-(z_{ji}^{(1)}(t)+z_{ji}^{(2)}(t))|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(t)|. \tag{3.103}$$

Для другого доданка у правій частині (3.103) методом математичної індукції неважко переконатися у справедливості оцінки

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(s)|\le N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T]. \tag{3.104}$$

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі для рівняння із запізненням маємо, що функції $x_i(t) \in C[t_0 - \tau, T]$, $i = \overline{1, n}$ – тому для оцінки величини $|x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t))|$ можна застосувати нерівність [121]

$$|x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t))| \leq \beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),\ t \in [t_0, T],\ j = \overline{1, m},\ i = \overline{1, n},$$

де $\beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) = 4K_i \frac{\tau}{\sqrt{m}} + 2\omega(x_i, \frac{\tau}{\sqrt{m}})$, K_i – стала Ліпшица функції $x_i^{(1)}$, $\omega\Big(x_i, \frac{\tau}{\sqrt{m}}\Big)$ – модуль неперервності функції $x_i(t)$ на $[t_0, T]$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) = \beta_1(\frac{\tau}{m}). \tag{3.105}$$

Із властивостей функцій $\beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}})$ маємо, що $\lim\limits_{\delta \to 0} \beta_1(\delta) = 0$. Нерівність (3.105) справедлива для всіх $t \in [t_0, T]$, тому враховуючи позначення (3.98), маємо

$$N_j(t) \leq \beta_1(\frac{\tau}{m}) + N_0(t),\ j = \overline{1, m}. \tag{3.106}$$

Для оцінки різниці $||x(t) - z_0(t)||$, подамо рівняння (3.94) та (3.96) в еквівалентній інтегральній формі

$$x(t) - x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s - \tau_1), \ldots, x(s - \tau_p))ds, t \in [t_0, T],$$

$$z_0(t) - z_0(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \ldots, z_{l_p}(s))ds, t \in [t_0, T].$$

Оцінимо $|x(s - \tau_j) - z_{l_j}(s)|$:

$$||x(s - \tau_j) - z_{l_j}(s)|| = ||x(s - \tau_j) - x(s - \tau_{l_j}) + x(s - \tau_{l_j}) - z_{l_j}(s)|| \leq$$

$$\leq ||x(s - \tau_j) - x(s - \tau_{l_j})|| + ||x(s - \tau_{l_j}) - z_{l_j}(s)|| \leq N_{l_j}(t) + n\omega(\frac{\tau}{m}) \leq$$

$$\leq \beta_1(\frac{\tau}{m}) + N_0(t) + n\omega(\frac{\tau}{m}) = \beta_2(\frac{\tau}{m}) + N_0(t), \tag{3.107}$$

де

$$\beta_2(\frac{\tau}{m}) = \beta_1(\frac{\tau}{m}) + n\omega(\frac{\tau}{m}),$$

$$\omega(\frac{\tau}{m}) = \max_{i=\overline{1,n}} \omega\Big(x_i, \frac{\tau}{\sqrt{m}}\Big).$$

Неважко переконатися, що $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_2(\delta)=0$.

Використовуючи нерівності (3.95), (3.106) та (3.107), для $t\in[t_0,T]$ маємо оцінку

$$||x(t)-z_0(t)||\le$$

$$\le\int\limits_{t_0}^{t}||f(s,x(s),x(s-\tau_1),\ldots,x(s-\tau_p))-f(s,z_0(s),z_{l_1}(s),\ldots,z_{l_p}(s))||ds\le$$

$$\le\int\limits_{t_0}^{t}\Big[L_0||x(s)-z_0(s)||+\sum_{k=0}^{p}(L_k||x(s-\tau_k)-z_{l_k}(s)||)\Big]ds\le$$

$$\le\int\limits_{t_0}^{t}\Big[L_0N_0(s)+\sum_{i=k}^{p}L_k(N_0(s)+\beta_2(\frac{\tau}{m}))\Big]ds\le$$

$$\le p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{i=k}^{p}L_k+\sum_{k=0}^{p}L_k\int\limits_{t_0}^{t}N_0(s)ds.$$

Враховуючи позначення (3.98), дістаємо

$$N_0(t)\le p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{k=1}^{p}L_k+\sum_{k=0}^{p}L_k\int\limits_{t_0}^{t}N_0(s)ds\ t\in[t_0,T].$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, дістаємо

$$N_0(t)\le p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{k=1}^{p}L_ke^{(T-t_0)\sum\limits_{k=0}^{p}L_k},t\in[t_0,T].$$

Тепер із нерівності (3.106) маємо

$$N_j(t)\le p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{k=1}^{p}L_ke^{(T-t_0)\sum\limits_{k=0}^{p}L_k}+\beta_1(\frac{\tau}{m})=\beta_3(\frac{\tau}{m}),\tag{3.108}$$

$j=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T]$. Крім того, $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_3(\delta)=0$.

Звідси дістаємо наступне твердження.

Теорема 3.15. *[132] Нехай для системи (3.94) справджується нерівність (3.95). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (3.96)-(3.97) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь (3.94) при* $m\to\infty$ *і* $t\in[t_0,T]$.

3.4.2 Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь

Розглянемо початкову задачу для ДФР вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = L(t, x_t) + f(t, x_t), \quad t \in [0, T], \\ &x_0 = \varphi, \end{aligned} \tag{3.109}$$

де T додатна стала, $\varphi \in C$; $L(t, \varphi) = \sum\limits_{k=0}^{p} A_k(t)\varphi(-\tau_k) + \int\limits_{-\tau}^{0} D(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta$ – лінійний функціонал, що найчастіше зустрічається в застосуваннях, $A_k(t)$, $k = \overline{0, p}$ – $n \times n$-матричні функції компоненти яких неперервні функції при $t \in [0, T]$, $D(t, \theta)$ – $n \times n$-матрична функція, компоненти якої $d_{ij}(t, \theta)$ – неперервні за сукупністю змінних функції на $[0, T] \times [-\tau, 0]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_p = \tau$; $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ неперервна функція, яка задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq L\, |\varphi_1 - \varphi_2|\,, \;\; L > 0.$$

Означення 3.1. *[126]. Функцію $x(t)$ називатимемо розв'язком рівняння (3.109) з початковою функцією $\phi \in C$ в точці $t = \sigma$ якщо:*

1) $x \in C([\sigma - \tau, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$,

2) $x_\sigma = \phi$,

3) x_t задовольняє рівняння (3.109) при $t \in [\sigma, \sigma + A]$.

Нехай $m,\ p \in N$. Поставимо у відповідність рівнянню (3.109) систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{p} A_i(t) z_{l_i}(t) + \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} D(t, -\frac{\tau(m-k)}{m}) z_{m-i}(t) + f(t, \sum_{i=1}^{m} z_i \chi_i), \\ &\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{1, m},\ t \in [0, T], \end{aligned} \tag{3.110}$$

з початковими умовами

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{0, m}, \tag{3.111}$$

де індекси l_i визначаються рівностями $l_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau}\right]$,

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \theta \in \left[-\frac{i\tau}{m}, -\frac{(i-1)\tau}{m}\right], \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Другий доданок у першому рівнянні системи (3.110) одержаний в результаті заміни інтегрального доданка за квадратурною формулою лівих прямокутників із кроком $h = \frac{\tau}{m}$.

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (3.110) апроксимує систему нелінійних ДФР (3.109), якщо справджуються співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0, \ \ j = \overline{0, m}, \quad t \in [0, T] \text{при } m \to \infty.$$

Дослідимо питання про близькість розв'язків початкової задачі для рівняння (3.109) та розв'язків задачі Коші (3.110)–(3.111).

Розглянемо зображення $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ – розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_1^{(1)}(t)}{dt} + z_1^{(1)}(t) = x(t),\\
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_j^{(1)}(t)}{dt} + z_j^{(1)}(t) = z_{j-1}^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, m}, \quad t \in [0, T],\\
&z_j^{(1)}(0) = x(-\frac{j\tau}{m}), \quad j = \overline{1, m};
\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_1^{(2)}(t)}{dt} + z_1^{(2)}(t) = z_0(t) - x(t),\\
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_j^{(2)}(t)}{dt} + z_j^{(2)}(t) = z_{j-1}^{(2)}(t), \ j = \overline{2, m}, \ t \in [0, T],\\
&z_j^{(2)}(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Оцінимо різниці $z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})$, $j = \overline{1, m}$ враховуючи структуру систем (3.112)–(3.113), зображення для $z_j(t)$ та нерівність

$$||z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})|| \leq ||z_j^{(1)}(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})|| + ||z_j^{(2)}(t)||.$$

Враховуючи позначення $z_j(t) = (z_{j1}(t), ..., z_{jn}(t))$, $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, представимо $z_{ji}(t)$ $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)(t)}$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{j1}^{(1)}(t)}{dt}+z_{j1}^{(1)}(t)=x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(1)}(t)=z_{j-1,i}^{(1)}(t),\quad j=\overline{2,m},\quad i=\overline{1,n}, \tag{3.114}$$
$$z_{ji}^{(1)}(0)=x_i(-\frac{j\tau}{m}),\quad j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}; \tag{3.115}$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{j1}^{(2)}(t)}{dt}+z_{j1}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(2)}(t)=z_{j-1,i}^{(2)}(t),\quad j=\overline{2,m},\quad i=\overline{1,n}, \tag{3.116}$$
$$z_{ji}^{(2)}(0)=0,\quad j=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,n}. \tag{3.117}$$

Нехай

$$N_j(t)=\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(s-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(s)|,\quad j=\overline{0,m},\quad t\in[0,T]. \tag{3.118}$$

Враховуючи вигляд систем (3.114) та (3.116) для різниці $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(t)|$ маємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}(t)|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(t)|. \tag{3.119}$$

Методом математичної індукції легко показати, що для другого доданку в правій частині (3.119) справедлива оцінка

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(s)|\le N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T]. \tag{3.120}$$

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі ДФР (3.109) [127; 128; 129] маємо, що функції $x_i(t)\in C[-\tau,T]$, $i=\overline{1,n}$ – тому, застосовуючи теорему, що визначає точність апроксимації елемента запізнення [124], для різниці $|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|$ дістаємо оцінку

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|\le\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),\ \lim_{\delta\to0}\gamma_2(\delta)=0. \tag{3.121}$$

Нерівність (3.121) справедлива для всіх $t \in [0,T]$, тому враховуючи позначення (3.118), нерівності (3.119),(3.120),(3.121), маємо

$$N_j(t) \leq \gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + N_0(t), \ \ j = \overline{1,m}. \tag{3.122}$$

Для оцінки різниці $||x(t) - z_0(t)||$, представимо рівняння (3.109) та (3.110) в еквівалентній інтегральній формі

$$x(t) = \int\limits_0^t \sum_{k=0}^{p} A_k(t)x(t-\tau_k)dt + \int\limits_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} D(t,\theta)x(t+\theta)d\theta dt +$$

$$+ \int\limits_0^t f(t, x(t+\theta))dt + \varphi(0), \tag{3.123}$$

$$z_0(t) = \int\limits_0^t \sum_{i=0}^{p} A_i(t)z_{l_i}(t)dt + \int\limits_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} D(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)d\theta dt +$$

$$+ \int\limits_0^t f(t, \sum_{i=1}^{m} z_i\chi_i)dt + \varphi(0). \tag{3.124}$$

Позначимо

$$K_A = \max_{k=\overline{0,p}} \max_t ||A_k(t)||, \ \ \ K_D = \max_{t,\theta} ||D(t,\theta)||,$$

$$K_f = \max_{i=\overline{1,n}} \max_t |f_i(t,0)|, \ \ \ \omega_1(\frac{\tau}{m}) = n \max_{i,j} \omega(d_{ij}, \frac{\tau}{m}),$$

де $\omega(d_{ij}, \frac{\tau}{m})$ – модуль неперервності функцій $d_{ij}(t,\theta)$, $i,j = \overline{1,n}$, $t \in [0,T]$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Встановимо деякі властивості розв'язків задачі Коші (3.110)–(3.111). Нехай початкові умови для системи (3.110)–(3.111) задовольняють нерівності

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ji}(0)| < \delta, \ \ j = \overline{0,m}.$$

Позначимо

$$M(t) = \max_{s\in[0,t]} [\delta, \sum_{i=1}^{n} |z_{0i}(s)|]. \tag{3.125}$$

Із векторного рівняння

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_0(t) - z_1(t))$$

одержимо

$$z_{1i}(t) = z_{1i}(0)exp(\frac{-mt}{\tau}) + \frac{m}{\tau}\int\limits_0^t z_{0i}(s)exp(\frac{m(s-t)}{\tau})ds.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^n |z_{1i}(t)| \leq M(t)(exp(\frac{-mt}{\tau}) + \frac{m}{\tau}\int\limits_0^t exp(\frac{m(s-t)}{\tau})ds) = M(t).$$

Аналогічно, одержуємо

$$\sum_{i=1}^n |z_{ji}(t)| \leq M(t), \;\; j = \overline{1,m}. \tag{3.126}$$

Враховуючи рівність (3.124), маємо

$$|z_{0i}(t)| \leq |z_{0i}(0)| + K_A\int\limits_0^t \sum_{k=0}^p \sum_{l=1}^n |z_{l_k,l}(s)|ds + \frac{\tau}{m}K_D\int\limits_0^t \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=1}^n |z_{m-j,l}(s)|ds+$$

$$+\int\limits_0^t \left(\left|f_i(s,\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^m z_{jl}\chi_j) - f_i\left(s,0\right)\right| + \left|f_i\left(s,0\right)\right|\right)ds \leq |z_{0i}(0)| + ((p+1)K_A +$$

$$+\tau K_D)\int\limits_0^t M(s)ds + L\int\limits_0^t M(s)ds + TK_f \tag{3.127}$$

Сумуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\sum_{l=1}^n |z_{0l}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |z_{0i}(0)| + nTK_f + n((p+1)K_A + \tau K_D + L)\int\limits_0^t M(s)ds.$$

Отже,

$$M(t) \leq \delta + nTK_f + n((p+1)K_A + \tau K_D + L)\int\limits_0^t M(s)ds.$$

Використовуючи лему Гронуолла–Беллмана [130] та позначення (3.125), маємо

$$M(t) \leq (\delta + nTK_f)e^{n((p+1)K_A+\tau K_D+L)T} = K_z. \qquad (3.128)$$

Із рівностей (3.123),(3.124), враховуючи властивості матриць $A_k(t)$, $k = \overline{0,p}$, $D(t,\theta)$, функції f та нерівність (3.128), дістаємо

$$||x(t) - z_0(t)|| \leq \sum_{k=0}^{p} ||A_k(t)|| \int_0^t ||x(s-\tau_k) - z_{l_k}(s)||ds+$$

$$+\int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} ||D(s,\theta)x(s+\theta) - D(s,-\frac{\tau(m-j)}{m})z_{m-j}(s))||d\theta dt+$$

$$+\int_0^t ||f(s,x(s+\theta)) - f(s,\sum_{j=1}^{m} z_j(s)\chi_j)||ds \leq \sum_{k=0}^{p} K_A \int_{t_0}^t (\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + N_0(s)+$$

$$+n\omega(\frac{\tau}{m}))ds + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} ||D(s,\theta)(x(s+\theta) - z_{m-j}(s))+$$

$$+(D(s,\theta) - D(s,-\frac{\tau(m-j)}{m}))z_{m-j}(s)||d\theta ds + \int_0^t L|x(s+\theta) - \sum_{j=1}^{m} z_j(s)\chi_j|ds \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} K_A \int_0^t (\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + N_0(s) + n\omega(\frac{\tau}{m}))ds + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} (||D(s,\theta)||\times$$

$$\times(||x(s+\theta) - x(s-\tau+j\frac{\tau}{m})|| + ||x(s-\tau+j\frac{\tau}{m}) - z_{m-j}(s)||) + ||D(s,\theta)-$$

$$-D(s,-\frac{\tau(m-j)}{m})||||z_{m-j}(s)||)d\theta ds + \int_0^t L\sum_{j=1}^{m} |x(s+\theta) - z_j(s)|\chi_j ds \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} K_A \int_0^t (\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + N_0(s) + n\omega(\frac{\tau}{m}))ds + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} (K_D(n\omega(\frac{\tau}{m})+$$

$$+\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + N_0(s)) + K_z\omega_1(\frac{\tau}{m}))d\theta ds + \int_0^t L(\sum_{j=1}^{m} |x(s+\theta) - x(s-\frac{j\tau}{m})|\chi_j+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}|x(s-\frac{j\tau}{m})-z_j(s)|\chi_j)ds\leq T[(p+1)K_A(\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}})+n\omega(\frac{\tau}{m}))+$$

$$+\tau(K_D(n\omega(\frac{\tau}{m})+\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}))+K_z\omega_1(\frac{\tau}{m}))+L(n\omega(\frac{\tau}{m})+\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}}))]+$$

$$+\int_0^T[(p+1)K_A+\tau K_D+L]N_0(s)ds.$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла–Беллмана [130], одержуємо

$$N_0(t)\leq T\left(((p+1)K_A+\tau K_D)\left(\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}})+n\omega(\frac{\tau}{m})\right)+K_z\omega_1(\frac{\tau}{m})+L\right)\times$$

$\times e^{T((p+1)K_A+\tau K_D+L)}$.

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}\omega(\frac{\tau}{m})=0$, $\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_2(\frac{\tau}{\sqrt{m}})=0$ та $\lim\limits_{m\to\infty}\omega_1(\frac{\tau}{m})=0$, тоді із останнього співвідношення випливає, що розв'язки задачі Коші (3.110)–(3.111) апроксимують розв'язки початкової задачі (3.109) при $m\to\infty$. Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 3.16. *[133] Якщо $A_k(t)$, $k=\overline{0,p}$, $D(t,\theta)$ – неперервні матричні функції при $t\in[0,T]$,$\theta\in[-\tau,0]$, функція $f(t,\varphi)$ неперервна і Ліпшицева за φ, тоді для розв'язків початкової задачі (3.109) та розв'язків задачі Коші (3.110)–(3.111) справджуються співвідношення*

$||x(t-\frac{\tau j}{m})-z_j(t)||\to 0,\ j=\overline{0,m},\ \ t\in[0,T]$ *при* $m\to\infty$.

Для ілюстрації дослідженої у даному пункті схеми апроксимації наведемо модельний приклад.

Приклад.

Розглянемо початкову задачу

$$\frac{dx(t)}{dt}=-1.5x(t)-1.25x(t-1)+x(t)\sin x(t),\ t\in[0,3],$$
$$x(t)=10t+1,\ \ t\in[-1,0].$$

Відповідна їй апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dz_0(t)}{dt}=-1.5z_0(t)-1.25z_m(t)+z_0(t)\sin z_0(t),$$
$$\frac{dz_j(t)}{dt}=m(z_{m-j}(t)-z_j(t)),\ \ j=\overline{1,m},$$
$$z_j(0)=\frac{-10j}{m}+1,\ \ j=\overline{0,m}.$$

На рис. 3.1 наведені результати числових експериментів обчислення значень $z_0(t)$ для $m = 8, 16, 32$ з використанням різницевої схеми Гіра першого порядку. Для порівняння одержаних наближень наведено значення розв'язку $x(t)$ вихідної задачі, знайдені в праці [131] за допомогою блочних методів четвертого порядку.

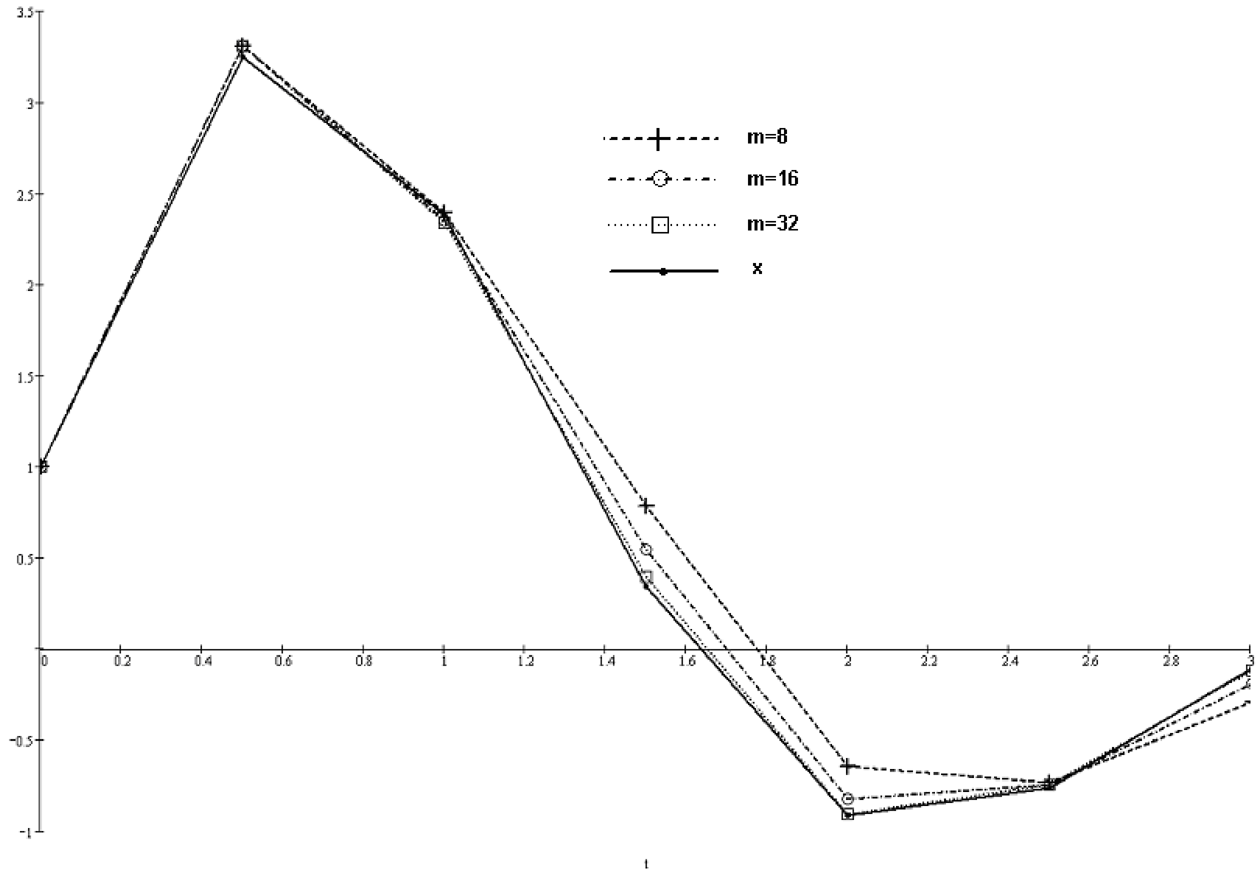

Рис.3.1

Бачимо, що із ростом розмірності m апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь похибка наближень $z_0(t)$ (по відношенню до $x(t)$) зменшується, що підтверджує теоретичні висновки з теореми 3.16.

4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СТОХАСТИЧНИХ ТА ДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРИКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ

При дослідженні задач стійкості, осциляції, біфуркації, керування та стабілізації розв'язків лінійних ДФР важливу роль відіграє розміщення коренів відповідних характеристичних рівнянь, які у випадку ДРР називають квазіполіномами.

Для дослідження найпростіших квазіполіномів можна використовувати метод D-розбиття простору коефіцієнтів квазіполінома, частотні критерії Михайлова і Найквіста [146; 147].

Аналіз розміщення нулів квазіполіномів досліджувався в роботах [130; 148; 149]. Основні методи, що тут розвиваються, стосуються побудови спеціальних многочленів, нулі яких наближають нулі квазіполіномів. Відзначимо, що ефективних алгоритмів знаходження нулів квазіполіномів на даний час немає.

При дослідженні апроксимації системи лінійних ДРР виявилось, що наближення неасимптотичних коренів їх квазіполіномів можна знаходити за допомогою характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Для скалярних ДРР це досліджувалося в працях [121; 150; 151], для систем із багатьма запізненнями ці результати одержані в працях [122; 123].

Результати п. 4.1 одержані сумісно Черевком І.М., Клевчуком І.І., Піддубною Л.А., Матвієм О.В., Ілікою С.А. і опубліковані в працях [141 – 145].

Наближений метод розв'язування крайових задач із запізненням за допомогою кубічних сплайнів дефекту два розглянуто у п. 4.2. Ці результати одержані сумісно Дорошем А.Б. та Черевком І.М. і опубліковані в [156 – 159].

У п.п. 4.3, 4.4 досліджено поведінку процесу ризику з перестрахуванням, що характеризується додатковим доданком в стохастичній частині. Знайдено граничні умови поведінки розв'язку процесу ризику з перестрахуванням, за умови коли перестрахування невід'ємне. Розглянуто деякі практичні підходи до оцінки ймовірності банкрутства та порівняно результати цих підходів із статистичними оцінками, отриманими за допомогою методу Монте-Карло для обраних розподілів розмірів страхових виплат і додаткових коштів. Результати п.п. 4.3, 4.4 одержані Строєвим О.М. і опубліковані в працях [185 – 188].

Мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язків крайових задач з граничними умовами типу Неймана досліджені Перцовим А.С. в [190 – 191] і наведені в п. 4.5.

4.1 Апроксимація систем із запізненням та їх числове моделювання

4.1.1 Апроксимація коренів квазіполіномів схемою підвищеної точності

Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t - \tau_i), \tag{4.1}$$

де $x \in R^n$, $A_i, i = \overline{0,k}$ – $n \times n$-сталі матриці, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = \tau$.

Квазіполіном для системи (4.1) має вигляд :

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\lambda \tau_i}). \tag{4.2}$$

Системі (4.1) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь за схемою Красовського – Рєпіна [122]

$$\begin{aligned} &\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i z_{l_i}(t),\ l_i = [\frac{\tau_i m}{\tau}], \\ &\frac{dz_i(t)}{dt} = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)),\ i = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (4.3) має місце співвідношення [122]

$$\Psi_m(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i (\frac{\mu}{\mu + \lambda})^{l_i})(\mu + \lambda)^{mn}. \tag{4.4}$$

У роботі [122] показано, що послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}},\ m \in N \tag{4.5}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (4.2). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (4.2). Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно рівності (4.5), збігаються, то корені характеристичного многочлена (4.4) можна брати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (4.2).

Аналогічний результат для випадку ДРР нейтрального типу одержаний в роботі [123].

На практиці застосування цих результатів виявилось затрудненим, оскільки задовільна точність наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів досягалась при розмірності апроксимуючої системи ≈ 100, а це означає, що необхідно вміти знаходити корені многочлена 100 степеня.

В поширених ППП Mathcad, Maple та інших стандартні процедури для обчислення коренів многочленів дають задовільну точність якщо розмірність многочлена не перевищує 25.

Розглянемо схему апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів підвищеної точності, яка дозволяє досягнути аналогічну точність, як в схемі Красовського–Рєпіна, апроксимуючими системами значно меншої розмірності.

Наведемо її побудову для рівняння із двома запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + A_1x(t-\tau_1) + A_2x(t-\tau_2), \tag{4.6}$$

де $A_0, A_1, A_2 \in R,\ 0 < \tau_1 < \tau_2 = \tau$.

Характеристичний квазіполіном рівняння (4.6) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = A_0 - \lambda + A_1e^{-\lambda\tau_1} + A_2e^{-\lambda\tau_2}. \tag{4.7}$$

Введемо аналогічно, як в схемі Красовського–Рєпіна [122; 119], функції

$$y_i(t) = x(t - \frac{i\tau}{m}),\ i = \overline{0, m}$$

і розкладемо $y_{i-1}(t) = x(t - \frac{(i-1)\tau}{m})$ у ряд в околі точки $t - \frac{i\tau}{m}$ до третього члена включно

$$y_{i-1}(t) = y_i(t) + \frac{dy_i(t)}{dt}\frac{\tau}{m} + \frac{d^2y_i(t)}{dt^2}\frac{\tau^2}{m^2}\frac{1}{2} + \dots.$$

Тоді, відповідна рівнянню (4.6), апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{dz_0(t)}{dt} = A_0z_0(t) + A_1z_k(t) + A_2z_m(t),\\ &\frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2\frac{d^2z_j(t)}{dt^2} + \frac{\tau}{m}\frac{dz_j(t)}{dt} + z_j(t) = z_{j-1}(t),\\ &j = \overline{1, m},\ m \in \mathbb{N},\ k = [\frac{m\tau_1}{\tau_2}]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ввівши позначення

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = z_{m+j}(t),\ j = \overline{1, m},\ \mu = \frac{m}{\tau},$$

запишемо систему (4.8) у вигляді

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_0(t)}{dt} = A_0 z_0(t) + A_1 z_k(t) + A_2 z_m(t),\\
&\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{m+j}(t),\\
&\frac{dz_{m+j}(t)}{dt} = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t),\\
&j = \overline{1,m},\ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Лема 4.1. *Для характеристичного рівняння системи (4.9) справджується рівність*

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m + A_1(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{m-k} + A_2 = 0. \tag{4.10}$$

У загальному випадку для рівняння (4.1) схема апроксимації підвищеної точності має вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} A_i z_{l_i}(t),\\
&\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{m+j}(t),\\
&\frac{dz_{m+j}(t)}{dt} = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t),\\
&j = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau},\ l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}],\ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Неважко показати, аналогічно як для системи (4.9), що для характеристичного рівняння системи (4.11) справджується рівність

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m + \sum_{i=1}^{n} A_i(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{m-l_i} = 0. \tag{4.12}$$

Лема 4.2. *Для фіксованих $\lambda \in \mathbb{Z}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m \in \mathbb{N}, \tag{4.13}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (4.2).

Зауваження 4.1. Функція $H_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (4.13), апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (4.2). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (4.2).

Оскільки нулі функцій $D_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (4.13), збігаються, то корені характеристичного многочлена (4.12) можна брати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (4.2).

Отже, неасимптотичні корені квазіполінома лінійного рівняння із запізненням можна наближати нулями характеристичного многочлена відповідної апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. Для обчислення коренів многочленів розроблено ряд стандартних процедур у різних пакетах прикладних програм.

Зокрема в пакеті Mathcad можна виділити функцію polyroots(v), яка повертає вектор, що містить всі корені многочлена, коефіцієнти якого є елементами вектора v. При цьому не потрібно задавати початкові наближення шуканих коренів.

4.1.2 Порівняння схем апроксимації

Розглянемо випадок диференціального рівняння з двома запізненнями (4.6) квазіполіном якого (4.7).

Характеристичне рівняння апроксимуючої системи для рівняння (4.6) за схемою Красовського–Рєпіна згідно (4.4) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = (A_0 - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau_2}{m})^m + A_1(1 + \frac{\lambda\tau_2}{m})^{m-k} + A_2 = 0, \text{де } k = [\frac{m\tau_1}{\tau_2}].$$

Здійснивши заміну $\lambda = \frac{m}{\tau_2}(s-1)$, дістанемо рівняння

$$s^{m+1} - \frac{\tau_2}{m}(\frac{m}{\tau_2} + A_0)s^m - A_1\frac{\tau_2}{m}s^{m-k} - A_2\frac{\tau_2}{m} = 0,$$

яке має зручний вигляд для чисельного знаходження його коренів на ЕОМ.

У випадку схеми апроксимації підвищеної точності (4.8) для рівняння (4.6) характеристичне рівняння має вигляд

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m+A_1(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{m-k}+A_2 = 0. \quad (4.14)$$

Перепишемо рівняння (4.14) у вигляді

$$(A_0 - \lambda)((\frac{\lambda\tau}{m} + 1)^2 + 1)^m + 2^k A_1((\frac{\lambda\tau}{m} + 1)^2 + 1)^{m-k} + 2^m A_2 = 0. \qquad (4.15)$$

Приведемо рівняння (4.15) до вигляду, зручного для реалізації на ЕОМ. Здійснимо в (4.15) заміну $\lambda = \frac{m}{\tau}(s-1)$, одержимо

$$(A_0 + \frac{m}{\tau} - \frac{m}{\tau}s)(s^2 + 1)^m + 2^k A_1(s^2 + 1)^{m-k} + 2^m A_2 = 0.$$

Розкладаючи $(s^2+1)^m$ за степенями s, дістанемо рівняння

$$(A+\frac{m}{\tau}-\frac{m}{\tau}s)\sum_{i=0}^{m}C_m^i s^{2(m-i)}+2^kA_1\sum_{j=0}^{m-k}C_{m-k}^j s^{2(m-k-j)}+2^mA_2=0,$$

яке можна записати у стандартному вигляді

$$\alpha_0 s^{2m+1}+\alpha_1 s^{2m}+\alpha_2 s^{2m-1}+\ldots+\alpha_{2m}s+\alpha_{2m+1}=0,$$

де

$$\begin{aligned}
&\alpha_0=-\frac{m}{\tau},\quad \alpha_1=A_0+\frac{m}{\tau},\\
&\alpha_{2m}=-\frac{m}{\tau},\quad \alpha_{2m+1}=A_0+\frac{m}{\tau}+2^kA_1+2^mA_2,\\
&\alpha_{2i}=-\frac{m}{\tau}C_m^i,\ i=\overline{0,m-1},\\
&\alpha_{2i+1}=(A_0+\frac{m}{\tau})C_m^i,\ i=\overline{1,k-1},\\
&\alpha_{2i+1}=(A_0+\frac{m}{\tau})C_m^i+2^kA_1C_{m-k}^{i-k},\ i=\overline{k,m-1}.
\end{aligned}$$

Приклад.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)+x(t-0.5)+x(t-1), \tag{4.16}$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda=1+e^{-0.5\lambda}+e^{-\lambda}. \tag{4.17}$$

Дійсний корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda=1,6361$.

Здійснимо апроксимацію рівняння (4.16) за схемою Красовського–Рєпіна і за схемою підвищеної точності. Для кореня квазіполінома (4.17) з найбільшою дійсною частиною обчислимо його наближення відповідними коренями характеристичних многочленів апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь. Результати обчислень при різних $m(m>3)$, наведені в Таблиці 2, де $\lambda_i^{\text{К.Р.}}$ – одержане наближення за схемою Красовського–Рєпіна, а $\lambda_i^{\text{П.Т.}}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Таблиця 2

m	λ_1^T	$\lambda_1^{\text{К.Р.}}$	$\triangle_{\text{К.Р.}}$	$\lambda_1^{\text{П.Т.}}$	$\triangle_{\text{П.Т.}}$
4	1,6361	1,7263	0,0902	1,6464	0,0103
10	1,6361	1,6741	0,0380	1,6382	0,0021
18	1,6361	1,6575	0,0214	1,6378	0,0017

Із Таблиці 2 видно, що наближення за схемою підвищеної точності є значно ефективнішими, ніж наближення за схемою Красовського–Рєпіна.

4.1.3 Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь

Дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь є важливою задачею [146; 152]. У зв'язку з багаточисельними прикладними застосуваннями значна увага приділяється одержанню областей стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням [150; 125].

Розглянемо лінійне диференціально-різницеве рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n} b_k x(t - \tau_k) = 0, \tag{4.18}$$

де $b_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = \tau.$

Відомо [152], що необхідною і достатньою умовою стійкості розв'язків рівняння (4.18) є розміщення нулів його характеристичного рівняння

$$P(\lambda) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{-\lambda \tau_k} = 0 \tag{4.19}$$

в лівій півплощині $Re\lambda < 0$.

Для лінійних диференціальних рівнянь без запізнення характеристичне рівняння є многочленом. У цьому випадку відомо ряд критеріїв, що дозволяють описати розміщення коренів характеристичного рівняння: критерій Рауса–Гурвіца, частотні критерії Михайлова і Найквіста, метод D-розбиття простору параметрів рівняння.

Аналіз розміщення коренів рівняня (4.19) є досить складною задачею, однак при дослідженні стійкості часто необхідно знати не фактичне розміщення коренів квазіполіномів, а тільки те чи всі корені мають від'ємні дійсні частини.

Теорема 4.1. *[153]. Нехай* $\{b_k, \tau_k\} \subset (0, \infty), \ (1 \le k \le n)$. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \tau_k < \frac{\pi}{2}, \tag{4.20}$$

тоді усі корені квазіполінома (4.19) мають від'ємні дійсні частини.

Наведена теорема визначає достатні умови стійкості рівняння (4.18), однак вона не дозволяє ефективно побудувати коефіцієнтні області стійкості, оскільки нульовий розв'язок рівняння (4.18) може бути стійким при як завгодно великому значенні $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \tau_k$ [153].

Нехай у рівнянні (4.18) запізнення τ_k – додатні раціональні числа. Якщо зробити лінійну заміну незалежної змінної, то можна одержати інше лінійне ДРР, якому відповідає характеристичне рівняння вигляду

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \ldots + a_n e^{-n\lambda}. \tag{4.21}$$

Отже, без втрати загальності, можна вважати в цьому випадку, що запізнення у рівнянні (4.18) – цілі додатні попарно різні числа.

Означення 4.1. *[154]. Областю стійкості рівняння (4.21) називаєтьcя множина точок $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких усі корені рівняння (4.21) задовольняють умову $Re\lambda < 0$.*

Для побудови алгоритмів знаходження області стійкості рівняння (4.21) важливою є наступна теорема.

Теорема 4.2. *[154]. Область стійкості рівняння (4.21) обмежена.*

Наслідок. Область стійкості рівняння (4.18), де τ_k – додатні, раціональні числа, є обмеженою.

Лема 4.3. *[154]. Якщо вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ належить області стійкості рівняння (4.21), то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 0$.*

Доведення. Нехай $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq 0$. Тоді квазіполіном
$P(\lambda) = \lambda - a_1 e^{-\lambda} - \ldots - a_n e^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P(0) \leq 0, \ \lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = +\infty.$$

Значить, існує число λ_0, $0 \leq \lambda_0 < \infty$, таке, що $P(\lambda_0) = 0$.

Рівняння (4.21) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не належить області стійкості.

Лема 4.3 доведена.

Розглянемо методику дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із запізненням, що базується на їх апроксимації послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [122; 125]. Поставимо у відповідність рівнянню (4.18) послідовність апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь [122]

$$\begin{aligned} &\frac{dz_0(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n} b_k z_{l_k}(t) = 0, \\ &\frac{dz_k(t)}{dt} + \mu(z_k(t) - z_{k-1}(t)) = 0, \\ &k = \overline{1, m},\ \mu = \frac{m}{\tau},\ l_k = [\frac{m\tau_k}{\tau}],\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи, враховуючи її структуру, можна одержати співвідношення [122]

$$\Psi_m(\lambda) = \lambda(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^m + \sum_{k=1}^{n} b_k(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^{m-l_k} = 0. \tag{4.23}$$

Дослідимо зв'язок між квазіполіномом $P(\lambda)$ і характеристичним многочленом (4.23).

Лема 4.4. *Для фіксованих* $\lambda \in \mathbb{C}$ *послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \Psi_m(\lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^{-m}, m \in \mathbb{N}, \tag{4.24}$$

збігається при $m \to \infty$ *до квазіполінома* $P(\lambda)$.

Доведення. Розглянемо деяке $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки $\lambda \neq -\frac{m}{\tau}$ (за можливим винятком одного значення m), то функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in \mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m \in \mathbb{N}$. Враховуючи вигляд функції

$$H_m(\lambda) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^{-l_k}, \tag{4.25}$$

на підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^{\frac{-\tau_k m}{\tau}} = e^{-\lambda\tau_k}$$

та означення числа l_k одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}(\lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^{-l_k}) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{-\lambda\tau_k}.$$

Отже, переходячи в рівності (4.25) до границі при $m \to \infty$, для фіксованого $\lambda \in \mathbb{C}$ одержимо

$$\lim_{m\to\infty} H_m(\lambda) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{-\lambda\tau_k}.$$

Лема 4.4 доведена.

Зауваження 4.2. Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (4.24), збігаються, то корені характеристичного многочлена (4.23) можна брати за наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома $P(\lambda)$.

Конструктивні алгоритми дослідження стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням на основі аналізу властивостей нульового розв'язку апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь наведено в [122].

Теорема 4.3. *[122]. Якщо нульовий розв'язок рівняння (4.18) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $m_0 > 0$, таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (4.22) експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи (4.22) експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (4.18) експоненціально стійкий (нестійкий).*

Застосовуючи теорему 4.3 та лему 4.4 можна одержати ефективний алгоритм побудови області стійкості лінійного ДРР із запізненням.

Як приклад розглянемо лінійне диференціальне рівняння із двома запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1(t-m) + a_2(t-n), \tag{4.26}$$

де $\{a_1, a_2\} \subset \mathbb{R},\ m, n-$ натуральні взаємно прості числа.

Із теореми 4.2 і леми 4.3 одержимо, що область стійкості рівняння (4.26) на площині параметрів a_1, a_2 міститься в обмеженому многокутнику

$$||a_1| - |a_2|| < \pi, \quad ||a_1|e^{-m} - |a_2|e^{-n}| < \sqrt{\pi^2+1}, \quad a_1 + a_2 < 0.$$

Покриваємо цю область сіткою вузлів (a_{0i}, a_{1j}), $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $\{n, k\} \subset \mathbb{N}$. Для кожного вузла (a_{0i}, a_{1j}) маємо лінійне рівняння із запізненням вигляду (4.26). Досліджуємо його на стійкість згідно з теоремою 4.3, використовуючи відповідну (4.22) апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження стійкості стаціонарних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь використовується процедура polyroots пакету Mathcad, яка дозволяє обчислити корені відповідних цим системам характеристичних многочленів.

Провівши такі дослідження у кожному вузлі сітки, можна побудувати область стійкості рівняння (4.26).

Результати числових експериментів для $m = 1, n = 2$, зображені на рис.2, де область стійкості – це заштрихована частина площини.

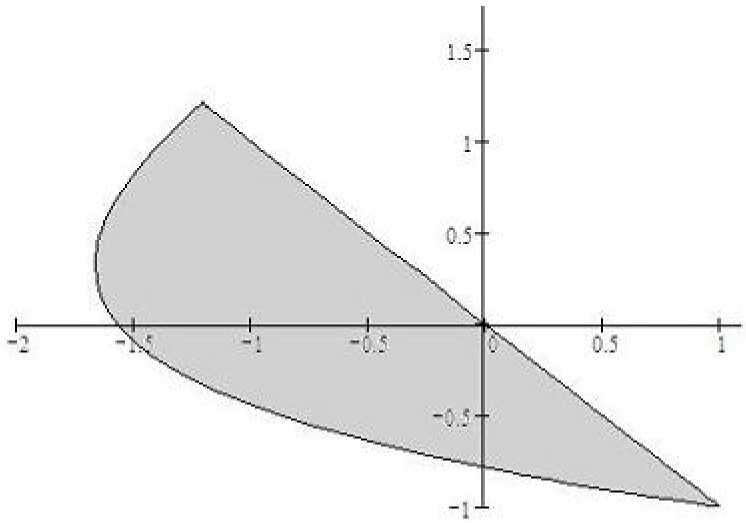

Рис.2

Застосування теореми 4.3 і схеми апроксимації ДРР дозволяє також знайти область значень запізнення τ для яких система

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \tag{4.27}$$

$x \in \mathbb{R}^n,\ A, B - n \times n$-сталі матриці, $\tau > 0$, є експоненціально стійкою.

Обчислюючи корені характеристичного многочлена апроксимуючої для (4.27) системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + Bz_m(t), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)),\ i = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$z_i \in \mathbb{R}^n,\ \mu = \frac{m}{\tau}$, при різних значеннях запізнення τ, для яких зберігається стійкість нульового розв'язку апроксимуючої системи (4.28), можна знайти область значень запізнення τ для якої апроксимуюча система (4.28), а значить і система із запізненням (4.27) є експоненціально стійкою.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням другого порядку, де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичне рівняння апроксимуючої системи (4.28) матиме вигляд

$$D_m(\lambda)=s^{2\cdot m+2}\cdot\left(\frac{m}{\tau}\right)^2+s^{2\cdot m+1}(-a_{11}\frac{m}{\tau}-a_{22}\frac{m}{\tau}-2\cdot\left(\frac{m}{\tau}\right)^2)+$$
$$+s^{2\cdot m}(a_{11}a_{22}+a_{11}\frac{m}{\tau}+a_{22}\frac{m}{\tau}+\left(\frac{m}{\tau}\right)^2-a_{21}a_{12})+s^{m+1}(-b_{22}\frac{m}{\tau}-b_{11}\frac{m}{\tau})+$$
$$+s^m(a_{11}b_{22}+b_{22}\frac{m}{\tau}+b_{11}a_{22}+b_{11}\frac{m}{\tau}-a_{21}b_{12}-a_{12}b_{21})+b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}. \quad (4.29)$$

Корені многочлена (4.29) можна знаходити за допомогою вбудованої функції Polyroots(v) із пакету Mathcad, де v – $(n+1)$-вимірний вектор коефіцієнтів многочлена.

Результати наведеної схеми розглянемо на прикладі системи із запізненням, де

$$A=\begin{pmatrix} -0,9 & -6,5 \\ 4,8 & -0,9 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} -1,39 & -0,65 \\ 0,48 & -1,39 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

У цьому випадку система (4.28) із матрицями (4.30) буде асимптотично стійкою тоді, коли $\tau\in(0,\tau_1)\bigcup(\tau_2,\tau_3)$, де $\tau_1=0,2862,\ \tau_2=0,714,\ \tau_3=1,2142$.

Одержані результати добре узгоджуються із дослідженням стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням в праці [155].

4.2 Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків крайових задач із запізненням

4.2.1 Лінійні крайові задачі із запізненням

Диференціальні рівняння із запізненням виникають у багатьох областях математичного моделювання. Врахування запізнення дозволяє описати багато нових ефектів і явищ у біології, екології, імунології та інших науках. У зв'язку з відсутністю ефективних алгоритмів інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням у явному вигляді важливого значення набувають дослідження наближених методів їх інтегрування.

У даному пункті досліджується наближений метод розв'язання крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь зі змінним запізненням, що базується на апроксимації розв'язку кубічними сплайнами дефекту два. У випадку лінійних крайових задач із запізненням застосування апарату кубічних сплайнів дозволяє побудувати ефективні та прості в реалізації алгоритми.

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = p_1(x)\,y'(x) + q_1(x)\,y(x) + p_2(x)\,y'(x - \tau(x)) + \tag{4.31}$$
$$+q_2(x)\,y(x - \tau(x)) + f(x)\,,\ x \in [a;b]\,,$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x)\,,\ j = 0, 1,\ x \in [a^*; a]\,,\ y(b) = \gamma, \tag{4.32}$$

де $p_i(x)\,,\ q_i(x)\,,\ i = \overline{1,2}$ – неперервні на відрізку $[a;b]$ функції, $\varphi(x)$ — задана на $[a^*; a]$ неперервно-диференційовна функція, $\gamma \in R$. Нехай запізнення $\tau(x) \geq 0$ — така неперервна на $[a;b]$ функція, що існує скінченна множина точок $E = \left\{x_i \in [a;b]\,, i = \overline{1,l}\right\}$, таких що $x_i - \tau(x_i) = a, a^* = \min\limits_{x \in [a;b]} (x - \tau(x))$.

Введемо позначення $\delta_1 = [a, x_1]\,, \delta_2 = [x_1, x_2]\,,\ \ldots, \delta_{l+1} = [x_{l+1}, b]$ та визначимо множину функцій

$$V = \left\{ y(x) : y(x) \in (C[a^*, b]) \cap \left(C^1[a^*, a] \cup C^1[a, b]\right) \left(\bigcup_{j=1}^{l+1} C^2[\delta_j]\right) \right\}. \tag{4.33}$$

Розв'язком крайової задачі (4.31)-(4.32) будемо вважати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння (4.31) (за можливим винятком точок $x_i, i = \overline{1,l}$) та крайові умови (4.32).

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач із запізненням у різних функціональних просторах вивчались у [160-162] та інших. Зведення лінійної крайової задачі із запізненням до інтегрального рівняння і застосування до його розв'язання проекційно-ітераційних методів розглянуто в [163]. Застосування методу сплайн-апроксимацій до диференціально-різницевих рівнянь досліджувалось у працях [164-166]. В подальшому будемо припускати, що існує розв'язок задачі (4.31)-(4.32), який належить множині V.

Розглянемо обчислювальну схему знаходження розв'язків задачі 4.31-4.32. Задамо на $[a, b]$ сітку $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ так, щоб $E \subset \Delta$. Будемо шукати наближений розв'язок задачі (4.31)-(4.32) у вигляді інтерполяційного кубічного сплайну $S(y, x)$ дефекту 2 на сітці Δ, що належить простору функцій V.

Введемо позначення

$$h_j = x_j - x_{j-1}, j = 1, \ldots, n,$$

$$M_j^+ = S''(y, x_j + 0)\,, j = 0, \ldots, n-1,$$
$$M_j^- = S''(y, x_j - 0)\,, j = 1, \ldots, n.$$

Для сплайна $S(x,y)$ нескладно одержати зображення

$$S(x,y) = M_j^- \frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \left(\frac{y_{j-1}}{h_j} - M_{j-1}^+ \frac{h_j}{6} \right)(x_j - x) +$$
$$+ \left(\frac{y_j}{h_j} - M_j^- \frac{h_j}{6} \right)(x - x_{j-1}), x \in [x_{j-1}, x_j], j = \overline{1,n}. \tag{4.34}$$

Враховуючи неперервність похідної сплайна $S(x,y)$ у внутрішніх вузлах сітки Δ та крайові умови (4.32), одержуємо систему лінійних рівнянь, яку задовольняють величини M_j^+ і M_j^-.

$$\begin{gathered} h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})\, y_j + h_j y_{j+1} = \\ = \frac{h_j - h_{j+1}}{6} \left(h_j M_{j-1}^+ + 2h_j M_j^- + 2h_{j+1} M_j^+ + h_{j+1} M_j^- \right), \\ j = \overline{1,n-1}, y_0 = \varphi(a), y_n = \gamma. \end{gathered} \tag{4.35}$$

Із означення множини функцій V дістаємо, що $M_j^+ = M_j^-$ для $x_j \notin E$.

Наведемо властивості матриці A, що визначається коефіцієнтами в лівій частині системи (4.35).

Лема 4.5. *Справджуються співвідношення:*

$$1)\ \det(A) = (-1)^{n-1} h_2 h_3 \ldots h_{n-1}(b-a), \tag{4.36}$$

$$2)\ \left\|A^{-1}\right\| \max_i \sum_{j=1}^{n-1} \left|a_{ij}^{-1}\right| \le \frac{K^2}{8h^3}(b-a)^2, \tag{4.37}$$

$$3)\ \sum_{j=1}^{n-1} \left|a_{ij}^{-1}\right| \le \frac{K^2(b-a)}{2h^2}, i = \overline{1,n-1}, \tag{4.38}$$

$$4)\ \max_{1\le i\le n-2} \sum_{j=1}^{n-1} \left|a_{i+1,j}^{-1} - a_{ij}^{-1}\right| \le \frac{K^2(b-a)}{2h^2}, \tag{4.39}$$

де a_{ij}^{-1} *- елементи матриці* $A^{-1}, K = \frac{H}{h}, h = \min\limits_j h_j, H = \max\limits_j H_j$.

Розглянемо тепер ітераційну схему знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (4.31)-(4.32) у вигляді кубічних сплайнів дефекту два (4.34).

1. Вибираємо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right)$ довільним чином, щоб задовольнялись крайові умови (4.32) (наприклад, $S\left(y^{(0)}, x\right) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$).

2. Використовуючи вихідне рівняння (4.31) та сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right)$, знаходимо

множини для $k = 0, 1, \ldots$

$$M_j^{+(k+1)} = p_1(x_j) S'\left(y^{(k)}, x_j + 0\right) + q_1(x_j) S\left(y^{(k)}, x_j + 0\right) +$$
$$+t_j\left(p_2(x_j) S'\left(y^{(k)}, x_j + 0 - \tau(x_j)\right) + q_2(x_j) S\left(y^{(k)}, x_j + 0 - \tau(x_j)\right)\right) +$$
$$+f(x_j) + (1 - t_j)\left(p_2(x_j)\varphi'(x_j - \tau(x_j)) + q_2(x_j)\varphi(x_j - \tau(x_j))\right),$$
$$j = \overline{0, n-1},$$

$$M_j^{-(k+1)} = p_1(x_j) S'\left(y^{(k)}, x_j - 0\right) + q_1(x_j) S\left(y^{(k)}, x_j - 0\right) +$$
$$+t_j\left(p_2(x_j) S'\left(y^{(k)}, x_j - 0 - \tau(x_j)\right) + q_2(x_j) S\left(y^{(k)}, x_j - 0 - \tau(x_j)\right)\right) +$$
$$+f(x_j) + (1 - t_j)\left(p_2(x_j)\varphi'(x_j - \tau(x_j)) + q_2(x_j)\varphi(x_j - \tau(x_j))\right),$$
$$j = \overline{1, n},$$

де

$$t_j = \begin{cases} 0, x_j - \tau(x_j) < a, \\ 1, x_j - \tau(x_j) \geq a. \end{cases}$$

3. Розв'язуючи систему рівнянь (4.35), знаходимо $y_j^{(k+1)}, j = \overline{0, n}$.

4. За множинами $\left\{y_j^{(k+1)}\right\}$, $\left\{M_j^+\right\}$, $\left\{M_j^-\right\}$ будуємо сплайн $S\left(y^{(k+1)}, x\right)$, який виступає в якості наступного наближення.

5. Продовжуючи ітераційний процес, одержуємо послідовність сплайнів $S\left(y^{(k)}, x\right), k = 0, 1, \ldots$. Якщо ця послідовність збігається до розв'язку задачі (4.31)-(4.32), то при достатньо великому k сплайн $S\left(y^{(k)}, x\right)$ буде апроксимацією шуканого розв'язку.

Введемо позначення

$$L_1 = \max_{x \in [a,b]}\left(|q_1(x)| + |q_2(x)|\right), \quad L_2 = \max_{x \in [a,b]}\left(|p_1(x)| + |p_2(x)|\right),$$
$$u = \frac{h^2}{8} + \frac{K^5}{8}(b-a)^2, v = \frac{2H}{3} + \frac{K^5(b-a)}{2}, \quad \mu = 5\left(1 + L_2 H + \frac{1}{2} L_1 H\right).$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 4.4. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.31)-(4.32) *існує і належить простору* $V([a^*, b])$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = uL_1 + vL_2 < 1 \tag{4.40}$$

існує таке $H^* > 0$, *що для всіх* $H < H^*$ *послідовність* $S\left(y^{(k)}, x\right), k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a, b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k \to \infty} S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) - y^{(p)}(x)\right\| \leq R_p \omega\left(y''(x), H\right), p = 0, 1,$$

де $y(x)$ *- розв'язок задачі* (4.31)-(4.32), $R_0 = \frac{\mu u}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}$, $R_1 = \frac{\mu u}{1-\theta} + 5H$, $\omega(y''(x), H) = \max\limits_{1 \le r \le l} \omega_r(y''(x), H)$, $\omega_r(y''(x), H)$ *- модуль неперервності* $y''(x)$ *на* δ_r.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$y'' - 4y'(x) + 4y(x) + xy\left(x - \frac{x}{2}\right) - x^2 + 8 = 0, x \in [1;2],$$

$$y(x) = 2x, x \in [0.5;1], y(2) = 5e^2 - 2.$$

Результати обчислень наведено в таблиці 1, де y – точний розв'язок, z – наближений розв'язок, знайдений при $h = 0.025$ на 9-й ітерації, Δ – похибка.

Таблиця 3

x	y	z	Δ
1.0	2.0	2.0	0.0
1.2	4.2693	4.2657	0.0036
1.4	7.8	7.7924	0.0076
1.6	13.2827	13.273	0.0097
1.8	21.7811	21.7746	0.0065
2.0	34.9453	34.9453	0.0

Порівнюючи точний розв'язок, знайдений методом кроків

$$y = e^{2x-2}(3 + x) - 2$$

і наближений розв'язок, обчислений за ітераційною схемою, одержуємо, що на 9-й ітерації відносна похибка не перевищує 0.1%, а абсолютна – 0.01.

4.2.2 Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу

Нехай $\tau(x)$ – скалярна неперервна невід'ємна функція, визначена на проміжку $[a;b]$. Позначимо

$$a^* = \min_{x \in [a;b]} (x - \tau(x)),$$

$$[y(x)] = (y(x), y(x - \tau(x)), y'(x), y'(x - \tau(x)), y''(x - \tau(x))).$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f(x, [y(x)]) + \int_a^b g(x, t, [y(x)])\, \mathrm{d}t,\ x \in [a;b], \tag{4.41}$$

$$y^{(p)} = \varphi^{(p)},\ p = 0, 1, 2,\ x \in [a^*; a],\ y(b) = \gamma, \tag{4.42}$$

де функції $f(x, u, u_1, v, v_1, w)$, $g(x, t, u, u_1, v, v_1, w)$ – неперервні за сукупністю змінних та задовольняють умову Ліпшица за змінними u, u_1, v, v_1, w зі сталими $L_1, L_2, \ldots, L_5$ та $R_1, R_2, \ldots, R_5$ відповідно, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервнодиференційовна на $[a^*; a]$ функція, $\gamma \in R$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненням $\tau(x)$:

$$E_1 = \{x_i \in [a; b] : x_i - \tau(x_i) = a, \ i = 1, 2, \ldots\},$$
$$E_2 = \{x_j \in [a; b] : x_0 = a, x_{j+1} - \tau(x_{j+1}) = x_j, \ j = 1, 2, \ldots\},$$
$$E = E_1 \cup E2.$$

Нехай $\tau(x)$ – така функція, що множини E_1, E_2 – скінченні. Точки множини E занумеруємо в порядку їх зростання

$$a = x^{(0)} < x^{(1)} < \ldots < x^{(l)} < b$$

і введемо відрізки

$$\delta_1 = \left[a; x^{(1)}\right], \delta_2 = \left[x^{(1)}; x^{(2)}\right], \ldots, \delta_{l+1} = \left[x^{(l)}; b\right].$$

Визначимо множину функцій

$$B([a^*; b]) = \left\{y(x) : y \in C[a^*; b], y \in C^1[a; b], y \in C^2[\delta_r], r = \overline{1, l+1}\right\},$$

яка утворює лінійний простір.

Розв'язком задачі (4.41)-(4.42) будемо вважати таку функцію $y = y(x)$ із простору $B([a^*; b])$, яка задовольняє рівняння (4.41) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (4.42).

Введемо в просторі функцій $B([a^*; b])$ норму

$$\|y\|_B = \max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in[a^*;b]}|y(x)|, \frac{2}{b-a}\max\left(\max_{x\in[a^*;a]}|y'(x)|, \max_{x\in[a;b]}|y'(x)|\right),\right.$$
$$\left.\max\left(\max_{x\in[a^*;a]}|y''(x)|, \max_{x\in\delta_1}|y''(x)|, \ldots, \max_{x\in\delta_{l+1}}|y''(x)|\right)\right\}.$$

Простір $B([a^*; b])$ із введеною таким чином нормою є банаховим простором.

Не зменшуючи загальності, відзначимо, що можна вважати крайові умови (4.42) нульовими. У протилежному випадку, лінійна заміна $z(x) = y(x) - \psi(x)$, де

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a^*; a] \\ \dfrac{\varphi(a)(b-x) + \gamma(x-a)}{b-a}, & x \in [a; b] \end{cases}$$

приводить до крайової задачі типу (4.41)-(4.42) з нульовими крайовими умовами

$$y^{(p)}(x) = 0,\ x \in [a^*; a],\ p = 0, 1, 2,\ y(b) = 0. \tag{4.43}$$

Нехай $G(x, s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x) = 0,\ x \in [a; b],\ y(a) = y(b) = 0.$$

Крайова задача (4.41),(4.43) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$y(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[f(s, [y(s)]) + \int\limits_{a}^{b} g(s, t, [y(t)])\, \mathrm{d}t \right] \overline{G}(x, s)\, \mathrm{d}s, \tag{4.44}$$

де

$$\overline{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x \in [a; b], s \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b], s \notin [a; b]. \end{cases}$$

Визначимо оператор T, який діє з простору $B([a^*; b])$ у той же простір $B([a^*; b])$ і задається формулою

$$(Ty)(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[f(s, [y(s)]) + \int\limits_{a}^{b} g(s, t, [y(t)])\, \mathrm{d}t \right] \overline{G}(x, s)\, \mathrm{d}s,\ x \in [a; b].$$

Введемо позначення

$$\lambda_1 = L_1 + L_2 + (b - a)(R_1 + R_2),$$
$$\lambda_2 = L_3 + L_4 + (b - a)(R_3 + R_4),$$
$$\lambda_3 = L_5 + (b - a) R_5,$$
$$M = \max_{x \in [a; b]} \left| f(x, [0]) + \int\limits_{a}^{b} g(x, t, [0])\, \mathrm{d}t \right|.$$

Теорема 4.5. *Нехай виконуються умови:*

[1]$\Lambda = \frac{(b-a)^2}{8}\lambda_1 + \frac{b-a}{2}\lambda_2 + \lambda_3 < 1,\ M \leq \rho(1 - \Lambda),\ \rho > 0.$

Тоді в кулі $\|y\|_B \leq \rho$ *існує єдиний розв'язок крайової задачі* (4.41),(4.43). *Крім того, цей розв'язок є границею за нормою простору* $B([a^*; b])$ *послідовності функцій* $y_k(x),\ k = 0, 1, \ldots,\ x \in [a^*; b]$, *які визначаються співвідношеннями*

$$y_0(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[f(s, [0]) + \int\limits_{a}^{b} g(s, t, [0])\, \mathrm{d}t \right] \overline{G}(x, s)\, \mathrm{d}s,$$
$$y_k(x) = (Ty_{k-1})(x),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Розглянемо обчислювальну схему знаходження наближеного розв'язку задачі (4.41)-(4.42) та достатні умови її збіжності. Задамо на проміжку $[a; b]$ сітку

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$$

так, щоб $E \subset \Delta$. Будемо шукати наближений розв'язок крайової задачі (4.41)-(4.42) у вигляді інтерполяційного кубічного сплайна $S\left(y, x\right)$ дефекту 2 на сітці Δ, що належить простору функцій $B\left([a^*; b]\right)$. Для таких сплайнів маємо зображення у вигляді (4.34), де величини M_j^+, M_j^- задовольняють рівняння неперервності (4.35).

1. Вибираємо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right)$ довільним чином так, щоб виконувались крайові умови (4.42), наприклад,

$$S\left(y^{(0)}, x\right) = \frac{\gamma - \varphi\left(a\right)}{b - a}\left(x - a\right) + \varphi\left(a\right).$$

2. Використовуючи вихідне рівняння (4.41) і сплайн $S\left(y^{(k)}, x\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$

$$\left(M_j^+\right)^{k+1} = f\left(x_j, \left[S\left(y^{(k)}, x_j + 0\right)\right]\right) + \tag{4.45}$$

$$+\int_a^b g\left(x_j, t, \left[S\left(y^{(k)}, t\right)\right]\right) \mathrm{d}t,\ j = \overline{0, n-1},$$

$$\left(M_j^-\right)^{k+1} = f\left(x_j, \left[S\left(y^{(k)}, x_j - 0\right)\right]\right) + \tag{4.46}$$

$$+\int_a^b g\left(x_j, t, \left[S\left(y^{(k)}, t\right)\right]\right) \mathrm{d}t,\ j = \overline{1, n}.$$

У формулах (4.45)-(4.46) покладаємо $S^{(p)}\left(y^{(k)}, t\right) = \varphi^{(p)}\left(t\right),\ p = 0, 1, 2,$ якщо $t < a$.

3. Із рівнянь неперервності (4.35) та крайових умов (4.42) знаходимо множину точок $\left\{y_j^{(k+1)}\right\},\ j = \overline{0, n},\ k = 0, 1, \ldots.$

4. За множиною точок $\left\{y_j^{(k+1)}\right\},\ j = \overline{0, n}$ знаходимо кубічний сплайн $S\left(y^{(k+1)}, x\right)$, який виступає як наступне наближення.

Якщо послідовність сплайнів $\left\{S\left(y^{(k)}, x\right)\right\},\ k = 0, 1, \ldots$ збігається до розв'язку задачі (4.41)-(4.42), то при достатньо великому k сплайн $S\left(y^{(k)}, x\right)$ буде апроксимацією шуканого розв'язку.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови теореми 4.5. Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1$$

існує таке $H^* > 0$*, що для всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)}, x\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і здійснюється нерівність*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) - y^{(p)}(x)\right\| \le K_p\omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, 2,$$

де $y(x)$ *– розв'язок крайової задачі* (4.41)-(4.42)*,* $\omega\left(y''(x), H\right) = \max\limits_r\{\omega_r\left(y''(x), H\right),$ $r = \overline{1, l+1}\}$*,* $\omega_r\left(y''(x), H\right)$ *– модуль неперервності функції* $y''(x)$ *на* δ_r*,*

$$K_0 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right),\quad K_1 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$

$$K_2 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{\omega\mu}{1-\theta} + 5\right),\quad \mu = 5\left[1 + \frac{H^2}{2}\left(\lambda_1 - L_1\right) + H\lambda_2 + \lambda_3\right],$$

$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\quad v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3}.$$

При використанні описаного алгоритму розв'язання крайових задач (4.41)-(4.42) за наближений розв'язок вибирається $S\left(y^{(k)}, x\right)$ при деякому $k > 0$. Має місце оцінка

$$\left\|S^{(p)}\left(y^{(k+i)}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le \theta^{k-1}\max(u, v, 1)\frac{1-\theta^i}{1-\theta},\ p = 0, 1, 2. \quad (4.47)$$

Нехай $H < H^*$, тоді з нерівностей (4.47) одержуємо при $i \to \infty$

$$\left\|S^{(p)}(\overline{y}, x) - S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le \theta^{k-1}\max(u, v, 1)\frac{d}{1-\theta},\ p = 0, 1, 2.$$

Отже, для довільного $\epsilon > 0$ існує така кількість ітерацій $k_0 > 0$, що при $k > k_0$ справедлива оцінка

$$\left\|S^{(p)}(\overline{y}, x) - S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le \varepsilon.$$

Тоді при $k > k_0$ і виконанні умов теореми 2 одержуємо оцінку похибки наближеного розв'язку

$$\left\|S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) - y^{(p)}(x)\right\| \le \varepsilon + K_p\omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, 2.$$

4.3 Модель ризику з додатковим надходженням коштів

4.3.1 Основні позначення та припущення моделі

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ імовірнісний простір, що задовольняє звичайним умовам, і всі об'єкти будуть визначені на ньому. Ми маємо справу з моделлю ризику, що узагальнює класичний випадок, який був розглянутий в [170].

У класичній моделі ризику припускається ([171 – 174]), що страхова компанія має початковий капітал $x \geq 0$ та отримує премії від клієнтів зі сталою інтенсивністю $c > 0$. Розміри страхових вимог, що надходять до компанії, утворюють послідовність $(\xi_i)_{i\geq 1}$ невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F_1(y) = \mathbb{P}[\xi_i \leq y]$ і скінченним математичним сподіванням $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_1$. Момент надходження i-ї вимоги позначимо через τ_i. Покладемо $\tau_0 = 0$. Кількість вимог, що надійшли на інтервалі часу $[0, t]$, описується однорідним пуассонівським процесом $(N_t)_{t\geq 0}$ з інтенсивністю $\lambda > 0$.

На відміну від класичної моделі ризику, ми припускаємо, що в момент τ_i надходження i-ї вимоги страхова компанія залучає додаткові кошти в розмірі η_i, які можна інтерпретувати, наприклад, як кошти від інвестування неосновного капіталу або як додатковий прибуток. Вважаємо, що $(\eta_i)_{i\geq 1}$ є послідовністю невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу і скінченним математичним сподіванням $\mathbb{E}[\eta_i] = \mu_2$. Окрім того, припускаємо, що послідовності $(\xi_i)_{i\geq 1}$, $(\eta_i)_{i\geq 1}$ і процес $(N_t)_{t\geq 0}$ є взаємно незалежними. Нехай $\zeta_i = \eta_i - \xi_i$, $i \geq 1$. Фільтрацію, породжену $(\xi_i)_{i\geq 1}$, $(\eta_i)_{i\geq 1}$ і $(N_t)_{t\geq 0}$, позначимо $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$.

Нехай $X_t(x)$ – капітал страхової компанії в момент часу t за умови, що її початковий капітал дорівнює x. Тоді надлишок процесу $(X_t(x))_{t\geq 0}$ буде визначатися наступним чином:

$$X_t(x) = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} (\xi_i - \eta_i), \qquad t \geq 0. \tag{4.48}$$

Зауважимо, що тут і далі всі суми, в яких верхній індекс підсумовування менший за нижній, дорівнюють нулеві. Зокрема, в (4.48) маємо $\sum_{i=1}^{0} (\xi_i - \eta_i) = 0$, якщо $N_t = 0$.

Моменти банкрутства визначаються як

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : \ X_t(x) < 0\}.$$

Вважаємо, що $\tau(x) = \infty$, якщо $x_t(x) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$.

Імовірність банкрутства страхової компанії на нескінченному інтервалі часу як функція початкового капіталу визначається для всіх $x \geq 0$ рівністю

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\inf_{t\geq 0} X_t(x) < 0],$$

що еквівалентно

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\tau(x) < \infty].$$

Відповідна ймовірність небанкрутства на нескінченному інтервалі часу дорівнює

$$\varphi(x) = 1 - \psi(x). \tag{4.49}$$

Легко бачити, що функція $\psi(x)$ є незростаючою, а функція $\varphi(x)$ є неспадною. Проте такі властивості $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ як диференційовність або навіть неперервність не є очевидними і не випливають із означення цих функцій. Виявляється, що ці функції не завжди є диференційовними для всіх $x \geq 0$. Більш того, як свідчать результати роботи [175], у деяких моделях за певних умов $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ можуть бути розривними.

Дослідження властивостей неперервності й диференційовності ймовірностей банкрутства (небанкрутства) необхідне, перш за все, для виведення інтегро-диференціальних рівнянь для цих функцій, які в свою чергу використовуються при дослідженні асимптотичної поведінки, побудові оцінок, розв'язанні оптимізаційних задач тощо. Зазначимо, що детальному дослідженню властивостей неперервності й диференційовності ймовірностей небанкрутства в різних моделях ризику присвячені роботи [176 – 179]. Окрім того, це питання розглядалося в [174] для класичної моделі ризику, але при цьому використовувалися інші методи. Відзначимо також, що взагалі однорідні процеси з незалежними приростами та від'ємними стрибками досліджувалися, наприклад, у [180, 181].

Зауважимо, що банкрутство ніколи не відбувається, якщо $\mathbb{P}\left[\xi_i - \eta_i \leq 0\right] = 1$. Якщо $\mathbb{P}\left[\xi_i - \eta_i \geq 0\right] = 1$, то ми маємо справу з класичною моделлю ризику. Тому надалі ми припускаємо, що $\mathbb{P}\left[\xi_i - \eta_i > 0\right] > 0$ і $\mathbb{P}\left[\xi_i - \eta_i < 0\right] > 0$. У цьому випадку, якщо $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 \leq 0$, то $\varphi(x) = 0$ для всіх $x \geq 0$; якщо $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$ [170].

Припускаємо, що виконуються умови $\mathbb{P}[\xi_i - \eta_i > 0] > 0$ і $\mathbb{P}[\xi_i - \eta_i < 0] > 0$. Дійсно, випадки $\mathbb{P}[\xi_i - \eta_i \leq 0] = 1$ і $\mathbb{P}[\xi_i - \eta_i \geq 0] = 1$ є тривіальними: у першому з них банкрутство не відбудеться ніколи, а другий зводиться до класичної моделі ризику.

4.3.2 Аналітичні властивості ймовірності небанкрутства в моделі ризику з додатковими надходженнями коштів

Наведемо допоміжні твердження, що будуть використовуватися в подальшому.

Лема 4.6. *Нехай еволюція капіталу страхової компанії визначається рівністю (4.48) 1) Якщо* $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 \leq 0$, *то* $\varphi(x) = 0$ *для всіх* $x \geq 0$. *2) Якщо* $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$, *то* $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$.

Доведення цієї леми істотно базується на наступній теоремі для випадкових блукань.

Теорема 4.7 [174] *Нехай* $(\tilde{\zeta}_i)_{i\geq 1}$ *– послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, таких що* $\mathbb{P}[\tilde{\zeta}_i > 0] > 0$, $\mathbb{P}[\tilde{\zeta}_i < 0] > 0$ *і* $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] < \infty$. *Визначимо послідовність* $(S_n)_{n\geq 1}$ *таким чином:* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\zeta}_i$.

1) Якщо $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] > 0$, *то* $\mathbb{P}[\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty] = 1$.

2) Якщо $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] < 0$, *то* $\mathbb{P}[\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty] = 1$.

3) Якщо $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] = 0$, *то* $\mathbb{P}[\limsup\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty] = 1$ *і* $\mathbb{P}[\liminf\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty] = 1$.

Зауважимо, що твердження 1) і 2) теореми 4.7 є досить очевидними. Дійсно, з огляду на посилений закон великих чисел $\mathbb{P}[\lim\limits_{n\to\infty} S_n/n = \mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i]] = 1$. Звідси маємо $\mathbb{P}[\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty] = 1$ при $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] > 0$ і $\mathbb{P}[\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty] = 1$ при $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] < 0$. Випадок $\mathbb{E}[\tilde{\zeta}_i] = 0$ є набагато складнішим і розглядається в [174].

Зауваження 4.3. Умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$ є аналогом умови додатності прибутку в класичній моделі ризику. Вона означає, що в середньому компанія збирає більше премій, ніж виплачує за вимогами.

Очевидно, що $\zeta_i = \eta_i - \xi_i$, $i \geq 1$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Позначимо їхню функцію розподілу через $F(y)$. Введемо також функції розподілів $G_1(y)$ і $G_2(y)$ таким чином: $G_1(y)$ – функція розподілу випадкової величини ζ_i за умови, що $\zeta_i \geq 0$; $G_2(y)$ – функція розподілу випадкової величини $-\zeta_i$ за умови, що $-\zeta_i > 0$.

Лема 4.7. *Якщо справджуються наведені вище припущення, тоді правильними є рівності*

$$F(y) = \int_{(-y\vee 0)_-}^{+\infty} F_2(y+u)dF_1(u), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.50}$$

$$G_1(y) = \begin{cases} \dfrac{F(y) - F(0_-)}{1 - F(0_-)}, & y \geq 0, \\ 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{4.51}$$

$$G_2(y) = \begin{cases} \dfrac{F(0_-) - F((-y)_-)}{F(0_-)}, & y \geq 0, \\ 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{4.52}$$

Зауважимо, що тут і далі запис $F(y_-)$ означає границю зліва функції розподілу в точці y, а запис y_- на нижній межі інтегрування означає інтегрування по інтервалу, який містить лівий окіл точки y, а радіус цього околу прямує до нуля.

Лема 4.8. *Процес $(X_t(x))_{t\geq 0}$, заданий рівністю (4.48), може бути зображений у вигляді*

$$X_t(x) = x + ct + \sum_{i=1}^{N_t^+} \zeta_i^+ - \sum_{i=1}^{N_t^-} \zeta_i^-, \; t \geq 0. \tag{4.53}$$

Тут $(N_t^+)_{t\geq 0}$ і $(N_t^-)_{t\geq 0}$ – однорідні пуассонівські процеси з інтенсивностями $\lambda(1 - F(0_-))$ і $\lambda F(0_-)$ відповідно, $(\zeta_i^+)_{i\geq 1}$ і $(\zeta_i^-)_{i\geq 1}$ – послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин з функціями розподілів $G_1(y)$ і $G_2(y)$, які задані рівностями (4.51) і (4.52), відповідно; усі випадкові величини і процеси у правій частині рівності (4.53) незалежні.

Позначимо $\lambda_1 = \lambda(1 - F(0_-))$ і $\lambda_2 = \lambda F(0_-)$. Зауважимо, що $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$.

Теорема 4.8. *Нехай еволюція капіталу страхової компанії визначається рівністю (4.48).*

1) Тоді функція $\varphi(x)$ неперервна на інтервалі $[0, +\infty)$.

2) Нехай, окрім того, виконується умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$. Тоді

i. функція $\varphi(x)$ є неперервно диференційовною в усіх точках інтервалу $[0, +\infty)$, окрім точок розриву функції $G_2(y)$;

ii. якщо $x > 0$ – точка розриву функції $G_2(y)$ і $G_2(x) - G_2(x_-) = p$, то $\varphi(x)$ має в цій точці похідні $\varphi'_-(x)$ і $\varphi'_+(x)$, причому

$$\varphi'_-(x) - \varphi'_+(x) = \frac{\lambda_2 p \varphi(0)}{c} > 0; \tag{4.54}$$

iii. $\varphi(x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння

$$c\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) - \lambda_1 \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)dG_1(y) - \lambda_2 \int_0^x \varphi(x-y)dG_2(y) \tag{4.55}$$

на інтервалі $[0, +\infty)$ з граничною умовою $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$ (у точках розриву $G_2(y)$ ми маємо на увазі похідну $\varphi(x)'_+$).

До моменту часу τ_1 банкрутство не настане, а після цього моменту воно не відбудеться тоді й тільки тоді, коли виконується одна з двох умов:

– у момент часу τ_1 відбувається перший стрибок процесу $(N_t^+)_{t\geq 0}$ (імовірність цієї події дорівнює λ_1/λ) і банкрутство не настане на інтервалі часу $[s, +\infty)$ при початковому капіталі $x + cs + y$;

– у момент часу τ_1 відбувається перший стрибок процесу $(N_t^-)_{t\geq 0}$ (імовірність цієї події дорівнює λ_2/λ) і банкрутство не настане на інтервалі часу $[s, +\infty)$ при початковому капіталі $x + cs - y$.

Зауваження 4.4. Визначити точки розриву функції $G_2(y)$ на основі точок розриву функцій $F_1(y)$ і $F_2(y)$ можна таким чином. Нехай $(y_{1,i})_{i\geq 1}$ і $(y_{2,j})_{j\geq 1}$ – послідовності точок розриву функцій $F_1(y)$ і $F_2(y)$ відповідно, причому $F_1(y_{1,i}) - F_1((y_{1,i})_-) = p_{1,i}$, $i \geq 1$, і $F_2(y_{2,j}) - F_2((y_{2,j})_-) = p_{2,j}$, $j \geq 1$. Розглядаємо всі можливі значення величини $y_{1,i} - y_{2,j}$ та залишаємо тільки додатні. Кожна додатна точка $y_{1,i} - y_{2,j}$ є точкою розриву функції $G_2(y)$, а розмір стрибка в цій точці дорівнює $p_{1,i}p_{2,j}$, якщо значення $y_{1,i} - y_{2,j}$ повторюється один раз. Якщо ж значення $y_{1,i} - y_{2,j}$ повторюється декілька разів, то відповідні значення $p_{1,i}p_{2,j}$ у цій точці підсумовуються.

У випадку експоненціально розподілених розмірів вимог і додаткових коштів справедливі такі твердження

Лема 4.9. *Якщо випадкові величини ξ_i і η_i, $i \geq 1$, експоненціально розподілені із середніми μ_2 і μ_1 відповідно, то випадкові величини ζ_i^+ і ζ_i^-, $i \geq 1$, також експоненціально розподілені із середніми μ_2 і μ_1 відповідно. Окрім того, $\lambda_1 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ і $\lambda_2 = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$.*

Теорема 4.9. *Нехай еволюція капіталу страхової компанії визначається рівністю (4.48), випадкові величини ξ_i і η_i, $i \geq 1$, експоненціально розподілені із середніми μ_1 і μ_2 відповідно та виконується умова $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$. Тоді*

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\lambda\mu_1(1-\alpha\mu_2)}{(c\alpha - \lambda)(1-\alpha\mu_2)(\mu_1+\mu_2) + \lambda\mu_2} e^{\alpha x} \tag{4.56}$$

для всіх $x \geq 0$, де

$$\alpha = \frac{\lambda\mu_1\mu_2 + c\mu_1 - c\mu_2 - \sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2) + \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2 + 2c\mu_1\mu_2(c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2)}}{2c\mu_1\mu_2}.$$

Зауваження 4.5. При доведенні теореми 4.9 показано, що $\alpha < 0$ і

$$-1 < \frac{\lambda\mu_1(1-\alpha\mu_2)}{(c\alpha - \lambda)(1-\alpha\mu_2)(\mu_1+\mu_2) + \lambda\mu_2} < 0.$$

Тому функція $\varphi(x)$, визначена рівністю (4.56), має всі природні властивості ймовірності небанкрутства. Зокрема, вона є неспадною та обмеженою нулем знизу й одиницею зверху.

Зауваження 4.6. Якщо в класичній моделі ризику без додаткових надходжень коштів виконується умова додатності прибутку $c-\lambda\mu_1>0$, а розміри страхових вимог мають експоненціальний розподіл із середнім μ_1, то

$$\varphi(x)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}\exp\left\{\frac{(\lambda\mu_1-c)\,x}{c\mu_1}\right\}$$

для всіх $x\geq 0$ ([171 – 174]).

У моделі ризику, що розглядається, маємо

$$\lim_{\mu_2\downarrow 0}\alpha=\lim_{\mu_2\downarrow 0}\frac{\lambda\mu_1\mu_2+c\mu_1-c\mu_2-\sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2)+\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2+2c\mu_1\mu_2\,(c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2)}}{2c\mu_1\mu_2}=$$

$$=\lim_{\mu_2\downarrow 0}\frac{(\lambda\mu_1\mu_2+c\mu_1-c\mu_2)^2-(c^2(\mu_1^2+\mu_2^2)+\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2+2c\mu_1\mu_2\,(c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2))}{2c\mu_1\mu_2\left(\lambda\mu_1\mu_2+c\mu_1-c\mu_2+\sqrt{c^2(\mu_1^2+\mu_2^2)+\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2+2c\mu_1\mu_2\,(c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2)}\right)}=$$

$$=\lim_{\mu_2\downarrow 0}\frac{-4c\mu_1\mu_2\,(c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2)}{2c\mu_1\mu_2\cdot 2c\mu_1}=\frac{\lambda\mu_1-c}{c\mu_1}$$

і

$$\lim_{\mu_2\downarrow 0}\frac{\lambda\mu_1(1-\alpha\mu_2)}{(c\alpha-\lambda)(1-\alpha\mu_2)(\mu_1+\mu_2)+\lambda\mu_2}=\lim_{\mu_2\downarrow 0}\frac{\lambda\mu_1}{(c\alpha-\lambda)\mu_1}=\frac{\lambda}{(\lambda\mu_1-c)/\mu_1-\lambda}=-\frac{\lambda\mu}{c}.$$

Отже, при досить малих μ_2 (при незначних надходженнях додаткових коштів) ймовірність небанкрутства в моделі ризику, що розглядається, близька до відповідної ймовірності небанкрутства в класичній моделі ризику.

4.4 Практичні підходи до оцінки ймовірності банкрутства в моделі ризику з додатковими надходженнями

4.4.1 Експоненційна оцінка зверху та аналог апроксимації де Вільдера

Для побудови експоненційної оцінки зверху для ймовірності банкрутства, ми використовуємо мартингальний підхід, запроваджений Гербером [182].

Нехай

$$U_t=ct-\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i-\eta_i),\qquad t\geq 0.$$

Для всіх $R\geq 0$ визначимо експоненційний процес $(V_t\,(R))_{t\geq 0}$ таким чином:

$$V_t\,(R)=e^{-RU_t}.$$

Лема 4.10. *Якщо існує $\hat{R}>0$, що*

$$\lambda\left(\int_0^{+\infty}e^{\hat{R}y}dF_1\,(y)\cdot\int_0^{+\infty}e^{-\hat{R}y}dF_2\,(y)-1\right)=c\hat{R},\tag{4.57}$$

то процес $(V_t(\hat{R}))_{t\geq 0}$ *є* $(\mathfrak{F}_t)$ *– мартингалом.*

Теорема 4.10. *Якщо існує* $\hat{R} > 0$*, для якого виконується (4.57), то для всіх* $x \geq 0$ *маємо*

$$\psi(x) \leq e^{-\hat{R}x}. \tag{4.58}$$

Щоб побудувати аналог апроксимації де Вільдера, замінимо процес $(U_t)_{t\geq 0}$ процесом $\left(\tilde{U}_t\right)_{t\geq 0}$ з експоненціальним розподілом розмірів страхових вимог так, щоб:

$$\mathbb{E}\left[U_t^k\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{U}_t^k\right], \qquad k = 1, 2, 3. \tag{4.59}$$

Оскільки процес $\left(\tilde{U}_t\right)_{t\geq 0}$ в цій моделі ризику визначається чотирма параметрами $\left(\tilde{c}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\right)$, на відміну від класичної моделі ризику, де вона визначається трьома параметрами, ми використовуємо додаткову умову

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2}. \tag{4.60}$$

Зауважимо, що можна було б використовувати умову $\mathbb{E}\left[U_t^4\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{U}_t^4\right]$ замість (4.60), але це б призвело до громіздких обчислень і розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих ступенів.

Нехай $\left(\tilde{\xi}_i\right)_{i\geq 1}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають експоненціальний розподіл із середнім $\tilde{\mu}_1$. Аналогічно, нехай $(\tilde{\eta}_i)_{i\geq 1}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають експоненціальний розподіл із середнім $\tilde{\mu}_2$. Нескладно отримати рівність

$$\mathbb{E}\left[\tilde{\xi}_i^k\right] = k!\tilde{\mu}_1^k \ \text{ та } \ \mathbb{E}\left[\tilde{\eta}_i^k\right] = k!\tilde{\mu}_2^k. \tag{4.61}$$

Нехай $\mathbb{E}\left[\xi_i^3\right] < \infty$ і $\mathbb{E}\left[\eta_i^3\right] < \infty$. Тоді

$$\mathbb{E}\left[U_t\right] = ct - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i - \eta_i)\right] = ct - \lambda t\mathbb{E}\left[\xi_i - \eta_i\right],$$

$$\mathbb{E}\left[U_t^2\right] = \lambda t\mathbb{E}[(\xi_i - \eta_i)^2] + (ct - \lambda t\mathbb{E}[\xi_i - \eta_i])^2 = \lambda t\mathbb{E}\left[(\xi_i - \eta_i)^2\right] + (\mathbb{E}\left[U_t\right])^2,$$

$$\mathbb{E}\left[U_t^3\right] = -\lambda t\mathbb{E}\left[(\xi_i - \eta_i)^3\right] + (\mathbb{E}\left[U_t\right])^3 + 3\left(\mathbb{E}\left[U_t^2\right] - (\mathbb{E}\left[U_t\right])^2\right)\mathbb{E}\left[U_t\right].$$

Застосовуючи аналогічні міркування до процесу $\left(\tilde{U}_t\right)_{t\geq 0}$, отримаємо, що (4.59) еквівалентно системі

$$\begin{cases} ct - \lambda t\mathbb{E}\left[\xi_i - \eta_i\right] = \tilde{c}t - \tilde{\lambda}t\mathbb{E}\left[\tilde{\xi}_i - \tilde{\eta}_i\right], \\ \lambda t\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right] = \tilde{\lambda}t\mathbb{E}\left[\left(\tilde{\xi}_i - \tilde{\eta}_i\right)^2\right], \\ -\lambda t\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right] = -\tilde{\lambda}t\mathbb{E}\left[\left(\tilde{\xi}_i - \tilde{\eta}_i\right)^3\right]. \end{cases} \tag{4.62}$$

Враховуючи (4.61), систему (4.62) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} c - \lambda\left(\mu_1 - \mu_2\right) = \tilde{c} - \tilde{\lambda}\left(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2\right), \\ \lambda\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right] = 2\tilde{\lambda}\left(\tilde{\mu}_1^2 - \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2^2\right), \\ \lambda\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right] = 6\tilde{\lambda}\left(\tilde{\mu}_1^3 - \tilde{\mu}_1^2\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2^2 - \tilde{\mu}_2^3\right). \end{cases} \tag{4.63}$$

Підставляючи $\tilde{\mu}_2 = \dfrac{\mu_2\tilde{\mu}_1}{\mu_1}$ у друге і третє рівняння системи (4.63), отримаємо

$$\lambda\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right] = 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1^2\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right), \tag{4.64}$$

$$\lambda\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right] = 6\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1^3\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2^3}{\mu_1^3}\right). \tag{4.65}$$

В результаті ділення (4.65) на (4.64) маємо

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1\left(\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2\right)\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right]}{3\left(\mu_1^3 - \mu_1^2\mu_2 + \mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3\right)\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right]}. \tag{4.66}$$

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_2\left(\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2\right)\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right]}{3\left(\mu_1^3 - \mu_1^2\mu_2 + \mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3\right)\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right]}. \tag{4.67}$$

Підставляючи (4.66) у (4.64), отримаємо

$$\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda\left(\mu_1^3 - \mu_1^2\mu_2 + \mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3\right)^2\left(\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right]\right)^3}{2(\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^3\left(\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right]\right)^2}. \tag{4.68}$$

Підставляючи (4.66) – (4.68) в перше рівняння системи (4.63), маємо

$$\tilde{c} = c - \lambda\left(\mu_1 - \mu_2\right)\left(1 - \frac{3\left(\mu_1^3 - \mu_1^2\mu_2 + \mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3\right)\left(\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^2\right]\right)^2}{2(\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2\mathbb{E}\left[\left(\xi_i - \eta_i\right)^3\right]}\right). \tag{4.69}$$

Зауважимо, оскільки $F_1(y)$ і $F_2(y)$ відомі, то неважко знайти $\mathbb{E}\left[(\xi_i-\eta_i)^2\right]$ і $\mathbb{E}\left[(\xi_i-\eta_i)^3\right]$, якщо $\mathbb{E}\left[\xi_i^3\right]<\infty$ і $\mathbb{E}\left[\eta_i^3\right]<\infty$.

З огляду на (4.66) і (4.67) зрозуміло, що $\tilde{\mu}_1$ і $\tilde{\mu}_2$ додатні тоді й тільки тоді, коли

$$\left(\mu_1^3-\mu_1^2\mu_2+\mu_1\mu_2^2-\mu_2^3\right)\mathbb{E}\left[(\xi_i-\eta_i)^3\right]>0. \tag{4.70}$$

Якщо виконується (4.70), то $\mu_1\neq\mu_2$. Тому $\tilde{\lambda}$ є також додатним. Крім того, $\tilde{c}$ є додатним за умови, що

$$c-\lambda(\mu_1-\mu_2)\left(1-\frac{3\left(\mu_1^3-\mu_1^2\mu_2+\mu_1\mu_2^2-\mu_2^3\right)\left(\mathbb{E}\left[(\xi_i-\eta_i)^2\right]\right)^2}{2(\mu_1^2-\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2\mathbb{E}\left[(\xi_i-\eta_i)^3\right]}\right)>0. \tag{4.71}$$

Таким чином, ми отримуємо наступний результат.

Твердження 4.1. (аналог апроксимації де Вільдера) *Нехай еволюція капіталу страхової компанії $(X_t(x))_{t\geq 0}$ визначається рівністю (4.48) за зроблених вище припущень, $c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2>0$, $\mathbb{E}\left[\xi_i^3\right]<\infty$, $\mathbb{E}\left[\eta_i^3\right]<\infty$, і виконуються умови (4.70) і (4.71). Тоді ймовірність банкрутства приблизно дорівнює*

$$\psi_{DV}(x)=\frac{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1(\tilde{\alpha}\tilde{\mu}_2-1)}{\left(\tilde{c}\tilde{\alpha}-\tilde{\lambda}\right)(1-\tilde{\alpha}\tilde{\mu}_2)(\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2)+\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_2}e^{\tilde{\alpha}x}$$

для всіх $x\geq 0$, де

$$\tilde{\alpha}=\frac{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{c}\tilde{\mu}_1-\tilde{c}\tilde{\mu}_2-\sqrt{\tilde{c}^2\left(\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\right)+\tilde{\lambda}^2\tilde{\mu}_1^2\tilde{\mu}_2^2+2\tilde{c}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left(\tilde{c}-\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1+\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_2\right)}}{2\tilde{c}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2},$$

а параметри $\left(\tilde{c},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2\right)$ визначаються формулами (4.66) – (4.69).

Зауваження 4.7. Зазначимо, що в твердженні 4.1 $\tilde{\alpha}<0$ і

$$\frac{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1(\tilde{\alpha}\tilde{\mu}_2-1)}{\left(\tilde{c}\tilde{\alpha}-\tilde{\lambda}\right)(1-\tilde{\alpha}\tilde{\mu}_2)(\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2)+\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_2}>0.$$

Дійсно, параметри $\left(\tilde{c},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2\right)$ є додатними. Крім того, оскільки $c-\lambda\mu_1+\lambda\mu_2>0$, то $\tilde{c}-\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1+\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_2>0$ внаслідок першого рівняння системи (4.63). Таким чином, теорема 4.9 і зауваження 4.5 дає нам потрібний висновок.

Зауваження 4.8. Якщо розміри страхових вимог і додаткових коштів розподілені експоненціально, то легко бачити з (4.66) – (4.69), що $\psi(x)=\psi_{DV}(x)$.

Нехай N – загальна кількість реалізацій процесу $(X_t(x))_{t\geq 0}$, а $\hat{\psi}(x)$ – відповідна статистична оцінка, отримана методом Монте-Карло, яка визначається діленням кількості реалізацій, які призводять до банкрутства до загальної кількості реалізацій.

Твердження 4.2. *Нехай еволюція капіталу страхової кампанії* $(X_t(x))_{t\geq 0}$ *визначається рівністю (4.48) за зроблених вище припущень. Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *маємо*

$$\mathbb{P}\left[\left|\psi(x) - \hat{\psi}(x)\right| > \varepsilon\right] \leq 2e^{-2\varepsilon^2 N}. \tag{4.72}$$

Доведення твердження 4.2 випливає безпосередньо з нерівності Хефдінга [183].

Зауваження 4.9. Формула (4.72) пов'язує точність і надійність наближення ймовірності банкрутства її статистичною оцінкою, отриманою методом Монте-Карло. Це дає можливість визначити кількість реалізацій N, необхідних для знаходження ймовірності банкрутства із заданими точністю і надійністю. Очевидним недоліком методу Монте-Карло є велика кількість реалізацій N.

4.4.2 Порівняння результатів

Нехай щільності розподілів випадкових величин ξ_i і η_i дорівнюють:

$$f_1(y) = \frac{k_1^{k_1} y^{k_1-1} e^{-\frac{k_1 y}{\mu_1}}}{\mu_1^{k_1}(k_1-1)!} \quad \text{і} \quad f_2(y) = \frac{k_2^{k_2} y^{k_2-1} e^{-\frac{k_2 y}{\mu_2}}}{\mu_2^{k_2}(k_2-1)!}$$

для $y \geq 0$ відповідно, де k_1 і k_2 – додатні цілі числа.

Нехай $h_1(R)$ і $h_2(R)$, де $R \geq 0$, – це твірні функцій моментів випадкових величин ξ_i і η_i відповідно, тобто

$$h_1(R) = \mathbb{E}\left[e^{R\xi_i}\right] \quad \text{і} \quad h_2(R) = \mathbb{E}\left[e^{R\eta_i}\right].$$

Нескладно показати, що

$$h_1(R) = \int_0^{+\infty} e^{Ry} dF_1(y) = \left(\frac{k_1}{k_1 - \mu_1 R}\right)^{k_1}, \quad 0 \leq R < \frac{k_1}{\mu_1},$$

$$h_2(R) = \int_0^{+\infty} e^{Ry} dF_2(y) = \left(\frac{k_2}{k_2 - \mu_2 R}\right)^{k_2}, \quad 0 \leq R < \frac{k_2}{\mu_2}.$$

Крім того, для всіх $R \geq 0$ маємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-Ry} dF_2(y) = \left(\frac{k_2}{k_2 + \mu_2 R}\right)^{k_2}.$$

Таким чином, умову (4.57) можна переписати у вигляді:

$$\lambda\left(\frac{k_1}{k_1-\mu_1\hat{R}}\right)^{k_1}\left(\frac{k_2}{k_2+\mu_2\hat{R}}\right)^{k_2}=\lambda+c\hat{R}, \qquad (4.73)$$

де $0<\hat{R}<\frac{k_1}{\mu_1}$. Крім того маємо

$$\mathbb{E}\left[\xi_i\right]=h'_1\left(0\right)=\mu_1,\quad \mathbb{E}\left[\eta_i\right]=h'_2\left(0\right)=\mu_2,$$

$$\mathbb{E}\left[\xi_i^2\right]=h''_1\left(0\right)=\frac{\left(k_1+1\right)\mu_1^2}{k_1},\quad \mathbb{E}\left[\eta_i^2\right]=h''_2\left(0\right)=\frac{\left(k_2+1\right)\mu_2^2}{k_2},$$

$$\mathbb{E}\left[\xi_i^3\right]=h'''_1\left(0\right)=\frac{\left(k_1+1\right)\left(k_1+2\right)\mu_1^3}{k_1^2},\quad \mathbb{E}\left[\eta_i^3\right]=h'''_2\left(0\right)=\frac{\left(k_2+1\right)\left(k_2+2\right)\mu_2^3}{k_2^2}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\mathbb{E}\left[\left(\xi_i-\eta_i\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\xi_i^2\right]-2\mathbb{E}\left[\xi_i\right]\mathbb{E}\left[\eta_i\right]+\mathbb{E}\left[\eta_i^2\right]=\frac{\left(k_1+1\right)\mu_1^2}{k_1}-2\mu_1\mu_2+\frac{\left(k_2+1\right)\mu_2^2}{k_2},$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\xi_i-\eta_i\right)^3\right]=\mathbb{E}\left[\xi_i^3\right]-3\mathbb{E}\left[\xi_i^2\right]\mathbb{E}\left[\eta_i\right]+3\mathbb{E}\left[\xi_i\right]\mathbb{E}\left[\eta_i^2\right]-\mathbb{E}\left[\eta_i^3\right]=$$

$$=\frac{\left(k_1+1\right)\left(k_1+2\right)\mu_1^3}{k_1^2}-\frac{3\left(k_1+1\right)\mu_1^2\mu_2}{k_1}+\frac{3\left(k_2+1\right)\mu_2^2\mu_1}{k_2}-\frac{\left(k_2+1\right)\left(k_2+2\right)\mu_2^3}{k_2^2}.$$

Підставляючи $\mathbb{E}\left[\left(\xi_i-\eta_i\right)^2\right]$ і $\mathbb{E}\left[\left(\xi_i-\eta_i\right)^3\right]$ в (4.66) – (4.69), знаходимо параметри $\left(\tilde{c},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2\right)$.

Припустимо, що має місце гіперекспоненціальний розподіл розмірів страхових вимог і додаткових коштів. Нехай

$$F_1\left(y\right)=p_{1,1}F_{1,1}\left(y\right)+p_{1,2}F_{1,2}\left(y\right)+\ldots+p_{1,k_1}F_{1,k_1}\left(y\right),\quad y\geq 0,$$

де $k_1\geq 1$, $p_{1,j}>0$, $\sum\limits_{j=1}^{k_1}p_{1,j}=1$, $\sum\limits_{j=1}^{k_1}p_{1,j}\mu_{1,j}=\mu_1$, $F_{1,j}$ є функцією розподілу випадкової величини, яка має експоненціальний розподіл із середнім $\mu_{1,j}$;

$$F_2\left(y\right)=p_{2,1}F_{2,1}\left(y\right)+p_{2,2}F_{2,2}\left(y\right)+\ldots+p_{2,k_2}F_{2,k_2}\left(y\right),\quad y\geq 0,$$

де $k_2\geq 1$, $p_{2,j}>0$, $\sum\limits_{j=1}^{k_2}p_{2,j}=1$, $\sum\limits_{j=1}^{k_2}p_{2,j}\mu_{2,j}=\mu_2$, $F_{2,j}$ є функцією розподілу випадкової величини, яка має експоненціальний розподіл із середнім $\mu_{2,j}$.

Нескладно переконатися, що

$$h_1\left(R\right)=\sum_{j=1}^{k_1}\frac{p_{1,j}}{1-\mu_{1,j}R},\quad 0\leq R<\min\left\{\frac{1}{\mu_{1,1}},\frac{1}{\mu_{1,2}},\ldots,\frac{1}{\mu_{1,k_1}}\right\},$$

$$h_2(R) = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{p_{2,j}}{1-\mu_{2,j}R}, \quad 0 \le R < \min\left\{\frac{1}{\mu_{2,1}}, \frac{1}{\mu_{2,2}}, \dots, \frac{1}{\mu_{2,k_2}}\right\}.$$

Крім того, для всіх $R \ge 0$ маємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-Ry} dF_2(y) = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{p_{2,j}}{1+\mu_{2,j}R}.$$

Тому, умову (4.57) можна переписати у вигляді

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{k_1} \frac{p_{1,j}}{1-\mu_{1,j}\hat{R}} \cdot \sum_{j=1}^{k_2} \frac{p_{2,j}}{1+\mu_{2,j}\hat{R}}\right) = \lambda + c\hat{R}, \tag{4.74}$$

де $0 < \hat{R} < \min\left\{\frac{1}{\mu_{1,1}}, \frac{1}{\mu_{1,2}}, \dots, \frac{1}{\mu_{1,k_1}}\right\}$. Крім того, маємо

$$\mathbb{E}[\xi_i] = h'_1(0) = \sum_{j=1}^{k_1} p_{1,j}\mu_{1,j} = \mu_1, \quad \mathbb{E}[\eta_i] = h'_2(0) = \sum_{j=1}^{k_2} p_{2,j}\mu_{2,j} = \mu_2,$$

$$\mathbb{E}\left[\xi_i^2\right] = h''_1(0) = \sum_{j=1}^{k_1} 2p_{1,j}\mu_{1,j}^2, \quad \mathbb{E}\left[\eta_i^2\right] = h''_2(0) = \sum_{j=1}^{k_2} 2p_{2,j}\mu_{2,j}^2,$$

$$\mathbb{E}\left[\xi_i^3\right] = h'''_1(0) = \sum_{j=1}^{k_1} 6p_{1,j}\mu_{1,j}^3, \quad \mathbb{E}\left[\eta_i^3\right] = h'''_2(0) = \sum_{j=1}^{k_2} 6p_{2,j}\mu_{2,j}^3.$$

Отже, ми отримуємо

$$\mathbb{E}\left[(\xi_i - \eta_i)^2\right] = 2\left(\sum_{j=1}^{k_1} p_{1,j}\mu_{1,j}^2 - \mu_1\mu_2 + \sum_{j=1}^{k_2} p_{2,j}\mu_{2,j}^2\right),$$

$$\mathbb{E}\left[(\xi_i - \eta_i)^3\right] = 6\left(\sum_{j=1}^{k_1} p_{1,j}\mu_{1,j}^3 - \mu_2\sum_{j=1}^{k_1} p_{1,j}\mu_{1,j}^2 + \mu_1\sum_{j=1}^{k_2} p_{2,j}\mu_{2,j}^2 - \sum_{j=1}^{k_2} p_{2,j}\mu_{2,j}^3\right).$$

Нехай ξ_i експоненціально розподілені із середнім μ_1 і $\mathbb{E}[\eta_i = \mu_2] = 1$. Тоді умову (4.57) можна переписати у вигляді

$$\frac{\lambda e^{-\mu_2\hat{R}}}{1-\mu_1\hat{R}} = \lambda + c\hat{R},$$

де $\hat{R} \in (0, 1/\mu_1\ )$, що еквівалентно

$$\lambda e^{-\mu_2\hat{R}} = -c\mu_1\hat{R}^2 + (c - \lambda\mu_1)\hat{R} + \lambda. \tag{4.75}$$

Якщо $c - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 > 0$, то нескладно переконатися, що (4.75) має єдиний розв'язок $\hat{R} \in (0, 1/\mu_1\ )$.

Оскільки

$$\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_1, \quad \mathbb{E}[\xi_i^2] = 2\mu_1^2, \quad \mathbb{E}[\xi_i^3] = 6\mu_1^3,$$
$$\mathbb{E}[\eta_i] = \mu_2, \quad \mathbb{E}[\eta_i^2] = \mu_2^2, \quad \mathbb{E}[\eta_i^3] = \mu_2^3,$$

то

$$\mathbb{E}[(\xi_i - \eta_i)^2] = 2\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2,$$
$$\mathbb{E}[(\xi_i - \eta_i)^3] = 6\mu_1^3 - 6\mu_1^2\mu_2 + 3\mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3.$$

4.5 Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі та функціоналів від правих частин для рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана

Задачам мінімаксного оцінювання станів систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями з частинними похідними при умові їх однозначної розв'язності присвячено значну кількість робіт (див., наприклад, [193] тощо).

Проте, в ситуації, коли розв'язки крайових задач не визначені однозначно та існують лише тоді, коли дані цих крайових задач задовольняють деяким умовам сумісності, питання їх мінімаксного оцінювання розроблені недостатньо повно. Тут відомі роботи [194, 195]. Досліджувана нижче задача мінімаксного оцінювання відноситься до описаного кола проблем. Тут за зашумленими спостереженнями розв'язків та при спеціальних обмеженнях на праві частини рівнянь та крайові умови, а також на шуми в спостереженнях, знайдені мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач для рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана.

Знаходження мінімаксних оцінок зведене до розв'язання деяких систем інтегро-диференціальних рівнянь та доведена їх однозначна розв'язність.

Позначимо через H – гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$ та нормою $\|\cdot\|_H$. Через $J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ будемо позначати оператор, якій називається ізометричним изоморфізмом, та діє з H на його спряжений простір H', та визначається рівністю $(u, v)_H = < J_H u, v >_{H' \times H}\ \forall u, v \in H$, де $< f, x >_{H' \times H} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Цей оператор існує в силу теореми Ріса. Через $L^2(\Omega, H)$ простір Бохнера, який складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H такими, що $\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int_\Omega \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty$. В цьому випадку існує інтеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, який називається математичним сподіванням або середнім випадкового елементу $\xi(\omega)$. В $L^2(\Omega, H)$ можна ввести скалярний добуток:

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int_\Omega (\xi(\omega), \eta(\omega))_H \, dP(\omega) \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \tag{4.76}$$

Простір $L^2(\Omega, H)$, зі скалярним добутком (4.76), є гільбертовим.

Введемо також наступні позначення: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – просторова змінна, яка належить обмеженій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^n$ з ліпшицевою межею Γ; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ - міра Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(D)$ – простір функцій, сумованих з квадратом в області D; для цілого числа m позначимо через $H^m(D)$ – стандартні простори Соболева з природніми нормами; знак " : " означає згортку тензора та вектора або тензора та тензора.

Нехай D – обмежена багатозв'язна область с ліпшицевою межею в просторі $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ вектор переміщення (компоненти якого є функціями $x \in D$) і через ϵ_{ij} компоненти тензора деформації

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right].$$

Зауважимо, що $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \epsilon_{ii}(\mathbf{u})$ і ϵ симетричний: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Крім того, $\epsilon(\mathbf{u}) = 0$ тоді і тільки тоді коли $\mathbf{u} \in \mathcal{RB}$. Тут

$$\mathcal{RB} := \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + b[x_2, -x_1]^T, & n = 2, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times [x_1, x_2, x_3]^T, & n = 3 \end{array} \right\}, \tag{4.77}$$

де $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}$ при $n = 2$ і $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ при $n = 3$ відповідно.

Прямі обчислення показуають, що вектор $\mathbf{r}$ в (4.77), наприклад при $n = 3$, визначається формулою $\mathbf{r} = R(x)\alpha$, де $\alpha = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, а 3×6-матриця $R(x)$ має вигляд

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стовпці цієї матриці

$$\begin{gathered} \mathbf{r}_1 = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{r}_2 = [0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{r}_3 = [0, 0, 1]^T, \\ \mathbf{r}_4 = [0, -x_3, x_2]^T, \quad \mathbf{r}_5 = [x_3, 0, -x_1]^T, \quad \mathbf{r}_6 = [-x_2, x_1, 0]^T \end{gathered} \tag{4.78}$$

утворюють базис підпростору $\mathcal{RB}$, так що $\dim \mathcal{RB} = 6$ при $n = 3$ і $\dim \mathcal{RB} = 3$ при $n = 2$.

Тензор напруження визначається за формулою $\tau = \tau(\mathbf{u}) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \mathrm{div}\, \mathbf{u}\mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ – одинична матриця в $\mathbb{R}^n$, $\lambda = \lambda(x)$ ($\lambda(x) \geq 0$) і $\mu = \mu(x)$ ($\mu(x) > 0$) – узагальнені коефіцієнти Ламе, які характеризують пружність тіла, які передбачаються кусково-неперервними функціями в області $\bar{D}$. Тензор напруження τ також є симетричним.

Введемо диференціальний оператор другого порядку

$$L\mathbf{u} = -\mathrm{div}\, \tau(\mathbf{u}) = \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda \mathrm{div}\, \mathbf{u}\delta_{ij}) \right].$$

Задача Неймана в математичній теорії пружності формулюється наступним чином: знайти вектор переміщення $\mathbf{u}$, який задовольняє рівняннм

$$L\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \text{в} \quad D, \quad \tau(\mathbf{u}) : \mathbf{n} = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}\mathbf{n}_j = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4.79}$$

де $\mathbf{F}$ – вектор об'ємних сил в тілі D, $\mathbf{g}$ – векторна функція, задана на Γ, $\mathbf{n}_j$ – направляючі косинуси зовнішньої по відношенню до області D нормалі $\mathbf{n}$ до її межі Γ.

Припустимо, що $\mathbf{F} \in L^2(D)^n$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma)^n$. Тоді під розв'язком задачи (4.79) розуміють знахождення функції $\mathbf{u} \in H^1(D)^n$, яка задовольняє інтегральній тотожності

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) :=< \mathbf{F}, \mathbf{v} > \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{4.80}$$

де $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D (2\mu\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda \mathrm{div}\, \mathbf{u}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v})\, dx$, $< \mathbf{F}, \mathbf{v} >= \int_D (\mathbf{F}, \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma$, $\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{ij}(\mathbf{u})\epsilon_{ij}(\mathbf{v})$. Розв'язок задачи (4.80) не є єдиним та визначений з точністю до довільної функції з $\mathcal{RB}$. Він існує тоді і тільки тоді, коли функції $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$ задовольняють наступним умовам сумісності (см. 192):

$$\int_D (\mathbf{F}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB}. \tag{4.81}$$

Задача мінімаксного оцінювання полягає в тому, щоб за спостереженнями вигляду

$$y = C\mathbf{u} + \eta \tag{4.82}$$

знайти оптимальну, в певному сенсі, оцінку значення функціонала $l(\mathbf{u}) =$ $= \int_D (\mathbf{l}_0(x), \mathbf{u}(x))_{\mathbb{R}^3} dx$ в класі лінійних оцінок $\widehat{l(\mathbf{u})} = (y(\mathbf{u}; \eta), w)_{H_0} + c$, де $\mathbf{u}(x)$ – розв'язок крайової задачі (4.79), елемент w належить гільбертову простору H_0, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l}_0 \in L^2(D)^n$ – задана функція, в припущенні, що праві частини $\mathbf{F}(x)$, $\mathbf{g}$ рівнянь (4.79) і похибки $\eta = \eta(\omega)$ в спостереженнях (4.82), які є випадковими елементами, визначеними на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$

зі значеннями в H_0, невідомі, а відомо лише, що елемент $F := (\mathbf{F}, \mathbf{g}) \in G_0$ і $\eta \in G_1$. Тут $C \in \mathcal{L}(L^2(D)^n, H_0)$ – лінійний неперервний оператор, такий що його обмеження на підпростір $\mathcal{RB}$ ін'єктивне; через G_0 позначено множину функцій $\tilde{F} := (\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{g}}) \in L^2(D)^n \times L^2(\Gamma)^n$, які задовольняють умовам

$$\int_D (Q_1(\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x), (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x))^2_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2(\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0), \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0)^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma \leq 1,$$

$$\int_D (\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB},$$

а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta} \in L^2(\Omega, H_0)$, з нульовими середніми, які задовольняють нерівності $\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} \leq 1$, де Q_0, Q_1, Q_2 – обмежені самоспряжені додатньо-визначені оператори в H_0, $L^2(D)^n$ $L^2(\Gamma)^n$ відповідно, для яких існують обмежені обернені оператори $Q_0^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}$, $\tilde{\mathbf{F}}_0 \in L^2(D)^n$ і $\tilde{\mathbf{g}}_0 \in L^2(\Gamma)^n$, задані функції, які задовольняють умовам (4.81).

Означення 4.2. *Оцінку вигляду*

$$\widehat{l(\mathbf{u})} = (y(\mathbf{u};\eta), \hat{w})_{H_0} + \hat{c} \tag{4.83}$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(\mathbf{u})$, *якщо елемент* $\hat{w}$ *і число* $\hat{c}$ *визначаються з умови*

$$\sigma(w,c) := \sup_{(\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{g}}) \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{\mathbf{u}}) - \widehat{l(\tilde{\mathbf{u}})}|^2 \to \inf_{w \in H_0, c \in \mathbb{R}} := \sigma^2,$$

де $\widehat{l(\tilde{\mathbf{u}})} = (\tilde{y}, w)_{H_0} + c$, $\tilde{y} = C\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\eta}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ *– будь-який розв'язок крайової задачи* (4.79) *при* $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$. *Величину* σ *будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу* $l(\mathbf{u})$.

Наведемо основні результати про представлення мінімаксних оцінок. З цією метою встановимо

$$U := \{\tilde{w} \in H_0 : \int_D \big(\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0}\tilde{w})(x), \mathbf{r}(x)\big)_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB}\},$$

де $C^* : H_0' \to L_2(D)^n$ – оператор, спряжений до C, який визначається співвідношенням

$$< C\boldsymbol{\varphi}, \phi >_{H_0 \times H_0'} = \int_D (\boldsymbol{\varphi}(x), C^*\phi(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx$$

для всіх $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(D)^n$, $\phi \in H_0'$, і при кожному фіксованому $w \in U$ введемо функцію $\mathbf{z}(\cdot; w) \in H^1(D)^n$ як єдиний розв'язок наступної варіаційної задачи:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}(\cdot; w)) = \int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} w)(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{4.84}$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\mathbf{z}(x;w), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\mathbf{z}(\cdot;w)), \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1,6}. \tag{4.85}$$

Однозначна розв'язність цієї задачи виходить з того, що праві частини рівнянь (4.84), (4.85) задовольняють умові сумісності оскільки $w \in U$.

Лема 4.11. *Задача знаходження мінімаксної оцінки значення функціонала* $l(\mathbf{u})$ *еквівалентна задачі оптимального керування системою, яка описується варіаційною крайовою задачею* (4.84), (4.85) *з функцією вартості вигляду*

$$I(w) = \int_D (Q_1^{-1}\mathbf{z}(x;w), \mathbf{z}(x;w))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}\mathbf{z}(\cdot;w), \mathbf{z}(\cdot;w))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma + (Q_0^{-1}w, w)_{H_0} \to \inf_{w \in U}. \tag{4.86}$$

Теорема 4.11. *Існує єдина мінімаксна оцінка виразу* $l(\mathbf{u})$, *котра може бути представленау вигляді* $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} = (y(\mathbf{u},\eta), \hat{w})_{H_0} + \hat{c}$, *де*

$$\hat{w} = Q_0 C\mathbf{p}, \quad \hat{c} = \int_D (\hat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\, d\Gamma, \tag{4.87}$$

а функції $\mathbf{p} \in H^1(D)^n$ *і* $\hat{\mathbf{z}} \in H^1(D)^n$ *визначаються з системи інтегро-диференціальних рівнянь*

$$a(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{z}}) = \int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} Q_0 C\mathbf{p})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{4.88}$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1,6}, \tag{4.89}$$

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(D)^n, \tag{4.90}$$

$$\int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} Q_0 C\mathbf{p})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, \quad i = \overline{1,6}. \tag{4.91}$$

Задача (4.88)–(4.91) *однозначно розв'язна. Похибка оцінювання* σ *визначається формулою* $\sigma = l(\mathbf{p})^{1/2}$.

Зауважимо, що функція $\hat{\mathbf{z}}(x) = \mathbf{z}(x;\hat{w})$, де $\mathbf{z}(x;w)$ є розв'язком задачи (4.84), (4.85), а $w = \hat{w} \in U$ – оптимальне керування системою, яка описується цими рівняннями з критерієм якості (4.86) (див. лему 1).

Альтернативне представлення для мінімаксної оцінки через розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь спеціального вигляду, яке не залежить від конкретного виду функціонала l, отримано в наступній теоремі.

Теорема 4.12. *Мінімаксна оцінка виразу* $l(\mathbf{u})$ *має вигляд* $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} = l(\hat{\mathbf{u}})$, *де функція* $\hat{\mathbf{u}}(x) = \hat{\mathbf{u}}(x, \omega)$ *визначається з розв'язку наступної системи інтегро-диференціальних рівнянь:*

$$a(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{p}}) = \int_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{4.92}$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \tag{4.93}$$

$$a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = \int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^3} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(D)^n, \tag{4.94}$$

$$\int_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, \quad i = \overline{1, 6}. \tag{4.95}$$

в якій рівності (4.92)–(4.95) *виконуються з ймовірністю 1.*

Випадкові поля, реалізації $\hat{\mathbf{p}}$ *і* $\hat{\mathbf{u}}$ *яких задовольняють задачі* (4.92)–(4.95), *належать простору* $L^2(\Omega, H^1(D)^n)$.

Задача (4.92)–(4.95) *однозначно розв'язна.*

Введемо також поняття наближеної мінімаксної оцінки величини $l(\mathbf{u})$, знаходження якої зводиться до розв'язку певної системи лінійних алгебраїчних рівнянь і сформулюємо теорему про збіжність послідовності таких оцінок до точної мінімаксної оцінке $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}}$ в середньому квадратичному.

Враховуючи, що простір $V = H^1(D)^n$ сепарабельний і розкладається в пряму суму

$$V = V^\perp \oplus \operatorname{Ker} L, \quad V^\perp = (\operatorname{Ker} L)^\perp,$$

де $\operatorname{Ker} L = \mathcal{RB}$, базис $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, \ldots$ в ньому можна вибрати таким чином, щоб вектори $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_6$ визначалися співвідношеннями (4.78).

Задамо $\hat{\mathbf{z}}_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_m = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{r}_i$, де $m > 6$, а α_i і β_i визначаються з системи рівнянь

$$a(\mathbf{r}_i, \hat{\mathbf{z}}_m) = \int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} Q_0 C \mathbf{p}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.96}$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{z}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{z}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \tag{4.97}$$

$$a(\mathbf{p}_m, \mathbf{r}_i) = \int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{z}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{z}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.98}$$

$$\int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} Q_0 C \mathbf{p}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, \quad i = \overline{1, 6}. \tag{4.99}$$

Зазначимо, що задача (4.96)–(4.99) однозначно розв'язна та являє собою систему лінійних алгебраічних рівнянь відносно невідомих α_i і β_i.

В якості наближеної мінімаксної оцінки величини $l(\mathbf{u})$ візьмемо вираз $\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} = (y, \hat{w}_m)_{H_0} + \hat{c}_m$, де $\hat{w}_m := Q_0 C \mathbf{p}_m$, $\quad \hat{c}_m := \int_D (\hat{\mathbf{z}}_m(x), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\hat{\mathbf{z}}_m, \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\, d\Gamma$.

Можна також показати, що $\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} = l(\hat{\mathbf{u}}_m(\cdot, \omega))$, де функція $\hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{u}}_m(\cdot, \omega)$ визначається з системи рівнянь

$$a(\mathbf{r}_i, \hat{\mathbf{p}}_m) = \int_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\mathbf{u}}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.100}$$

$$\int_D (Q_1^{-1} \hat{\mathbf{p}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1} \hat{\mathbf{p}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \tag{4.101}$$

$$a(\hat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{r}_i) = \int_D (Q_1^{-1} \hat{\mathbf{p}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^3} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1} \hat{\mathbf{p}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.102}$$

$$\int_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\mathbf{u}}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, \quad i = \overline{1, 6}. \tag{4.103}$$

Тут функції $\hat{\mathbf{u}}_m$ і $\hat{\mathbf{p}}_m$ належать підпростору, порожденому векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, а система (4.100)–(4.103) має єдиний розв'язок $\hat{\mathbf{u}}_m(\cdot, \omega)$ і $\hat{\mathbf{p}}_m(\cdot, \omega)$ при $m > 6$. Має місце наступний результат.

Теорема 4.13. *Наближена мінімаксна оцінка* $\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}}$ *виразу* $l(\mathbf{u})$ *збігається до мінімаксної оцінки* $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}}$ *цього виразу в тому сенсі, що* $\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}|\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} - \widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}}|^2 = 0$, *при цьому*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}|\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} - l(\mathbf{u})|^2 = \mathbb{E}|\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} - l(\mathbf{u})|^2.$$

ВИСНОВКИ

Основними результатами, наведеними в звіті, є такі:

– для одного параболічного рівняння з коефіцієнтами зростаючими при $|x| \to \infty$ у спеціальних вагових просторах досліджено розв'язність задачі Коші;

– для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів у спеціальних вагових просторах досліджено фундаментальних розв'язок задачі Коші, а з його допомогою доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язку;

– досліджено властивості розв'язків ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку на необмежених часових інтервалах;

– означено новий клас параболічних систем типу Г. Є. Шилова з невід'ємним родом і коефіцієнтами, залежними від часової та просторової змінних;

– встановлено коректну розв'язність задачі Коші для систем рівнянь із означеного класу у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова;

– одержано форму зображення розв'язку через початкову вектор-функцію та фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші;

– побудована ФМРЗК для вироджених систем рівнянь типу Колмогорова, досліджено її якісні властивості гладкості та поведінки в околі нескінченно віддалених просторових точок;

– одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи диференціально-функціональних рівнянь;

– застосовано друге наближення в методі усереднення для дослідження стійкості розв'язків лінійної системи із запізненням;

– досліджено існування та стійкість зліченного числа циклів для деяких класів гіперболічних систем з перетвореним аргументом;

– одержано зображення інтегрального многовиду системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь;

– одержано достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь;

– доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою;

– вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом;

– досліджена схема декомпозиції лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами, що базується на ідеях теорії інтегральних многовидів повільних та швидких змінних;

– досліджено схему апроксимації початкової задачі для нелінійного диференціально-функціонального рівняння запізнюючого типу;

– обґрунтовано алгоритми підвищеної точності наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів для лінійних автономних диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями;

– запропоновано алгоритм знаходження коефіцієнтних областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями;

– здійснено моделювання на ЕОМ лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням та знайдено верхню межу запізнення для якого зберігається властивість стійкості розвязків;

– досліджено наближений метод розв'язання крайової задачі для диференціально-різницевих рівнянь зі змінним запізненням, що базується на апроксимації розв'язку кубічними сплайнами дефекту два;

– досліджено поведінку процесу ризику з перестрахуванням, що характеризується додатковим доданком в стохастичній частині;

– отримано та досліджено інтегро-диференціальне рівняння для ймовірності небанкрутства;

– знайдено граничні умови поведінки розв'язку процесу ризику з перестрахуванням, за умови невід'ємного перестрахування;

– отримано представлення для мінімаксних оцінок функціоналів від розв'язків крайових задач для рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана.

Розробка питань, яким присвячений звіт, є важливою і актуальною в зв'язку із необхідністю розвитку загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та диференціально-функціональних рівнянь і необхідності математичного моделювання об'єктів із розподіленими параметрами, базові математичні моделі яких виражаються переважно диференціальними рівняннями із частинними похідними та диференціально-функціональними рівняннями. Разом з тим, точний розв'язок таких моделей аналітичними методами вдається отримати у виключних ситуаціях. У зв'язку з цим, проблема створення ефективних наближених методів розв'язку таких задач і розробка їх програмної реалізації сучасними обчислювальними засобами є особливо актуальною.

Усі наведені в звіті результати є новими і мають наукову цінність. Вони можуть застосовуватись у теорії диференціальних, диференціально-функціональних, псевдодиференціальних рівнянь, теорії випадкових процесів, при математичному моделювання фізичних, технічних, економічних і виробничих процесів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Бабич О. О.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / О. О. Бабич, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. математика: зб. наук. пр. – **1**, № 1–2. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т, 2011. – С. 13–24.

2. *Ivasychen S. D.* Cauchy problem for the Fokker–Plank–Kolmogorov equation of a multidimensional normal Markovian process / S. D. Ivasychen, H. S. Pasichnyk // Journal of Mathematscal Sciences – 2011. – **176**, № 4. – P. 505-514.

3. *Івасишен С. Д.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами / С. Д. Івасишен, О. О. Бабич, Г. С. Пасічник // Диф. р-ня та їх застосування: Матеріали міжнар. наук. конф., присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 8–10. 06. 2011, Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні рівняння та їх застосування. – К., 2011. – С. 85.

4. *Пасічник Г.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / Г. Пасічник // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 19–23. 09. 2011., Дрогобич: тези доп. – Львів, 2011. – С. 151.

5. *Заболотько Т. О.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування / Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т. – 2012. – **2**, № 2–3. – С. 81–89.

6. *Заболотько Т. О.* Про задачу Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами / Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // XIV Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука, 19–21. 04. 2012, Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ "КПІ", 2012. – С. 182.

7. *Заболотько Т. О.* Фундаментальний розв'язок рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова нормального марковського процесу та деякі його застосування / Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", 11–13. 06. 2012, Чернівці: Матеріали конф. – Чернівці, 2012. – С. 76.

8. *Івасишен С. Д.* Про задачу Коші для квазілінійного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Г. С. Па-

січник // Диференціальні рівняння та їх застосування : Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 70-річчю проф. В.В. Маринця, 26–29. 09. 2012, Ужгород. – Ужгород, 2012. – С. 36.

9. *Івасишен С. Д.* Про задачу Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Нелінійні проблеми аналізу: V Всеукр. наук. конф.: тези доп., 19–21. 09. 2013., Івано-Франківськ. – Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. – С. 29.

10. *Івасишен С. Д.* Дослідження та деякі застосування фундаментального розв'язку виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / Степан Івасишен, Галина Пасічник // Сучасні проблеми механіки та математики: в 3-х т. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – **3**. – С. 128–129.

11. *Пасічник Г. С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Соніна зі зростаючими коефіцієнтами / Г. С. Пасічник, С. Д. Івасишен // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доп. VI Міжнар. наук, конф., 4–5.04.2014, Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т. ім. Івана Огієнка, 2014. – С. 117.

12. *Івасишен С. Д.* Властивості інтегралів Пуассона ультрапараболічного рівняння типу Соніна зі зростаючими коефіцієнтами / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30.06–5.07.2014, Чернівці: тези доп. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т. ім. Юрія Федьковича, 2014. – С. 62–63.

13. *Івасишен С. Д.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С 126–153.

14. *Івасишен С.* Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів / Степан Івасишен, Галина Пасічник // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. – 2014. – **11**. – С. 73–87.

15. *Івасишен С. Д.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С 205–229.

16. *Івасишен С. Д.* Про задачу Коші для ультрапараболічного рівняння Соніна зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів / С. Д. Іваси-

шен, Г. С. Пасічник // XVI Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука, 14–15. 05. 2015, Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – С. 108–109.

17. *Івасишен С. Д.* Про характеризацію розв'язків параболічних рівнянь / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, 1–4.07.2015, Чернівці: тези доп. – Чернівці: ЧНУ, 2015. – С. 48–49.

18. *Pasichnyk H.* On realization of approach by Eidelman–Ivasyshen to characterize some classes of solutions for parabolic equations / Halyna Pasichnyk // Intern. V. Skorobohatko math. conf., August 25–28, 2015, Drohobych: Abstracts. – Lviv, 2015. – P. 120.

19. *Івасишен С. Д.* Про характеризацію розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Буковинський мат. журн. – 2015.

20. *Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова на необмежених часових інтервалах / С. Д. Івасишен, Т. М. Фратавчан, Г. П. Івасюк // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. математика: Зб. наук. пр. – **1**, № 1–2. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т, 2011. – С. 47–56.

21. *Івасишен С. Д.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівнянь Фоккера–Планка–Колмогорова деяких вироджених дифузійних процесів / С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: фіз.-мат. науки: Зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський, 2011. – Вип. 5. – С. 116–126.

22. *Івасишен С. Д.* Параболічні початкові задачі Солонникова - Ейдельмана / С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 74. – 2011. – С. 98–108.

23. *Івасишен С. Д.* Властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь на необмежених часових інтервалах / С. Д. Івасишен, Т. М. Фратавчан, Г. П. Івасюк // Диф. р-ня та їх застосування: Матеріали міжнар. наук. конф., присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 8–10. 06. 2011, Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні рівняння та їх застосування. – К., 2011. – С. 86.

24. *Івасишен С. Д.* Коректна розв'язність на необмежених часових інтервалах деяких задач для ультра параболічного рівняння типу Колмогорова / С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк, Т. М. Фратавчан // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", 11–13. 06. 2012, Чернівці: Матеріали конф. – Чернівці, 2012. – С. 79.

25. *Івасишен С. Д.* Про задачу без початкових умов для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова / С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк, Т. М. Фратавчан // Диференціальні рівняння та їх застосування : Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 70-річчю проф. В. В. Маринця, 26–29. 09. 2012, Ужгород. – Ужгород, 2012. – С. 35.

26. *Івасишен С. Д.* Деякі властивості розв'язків ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова на необмежених часових інтервалах / Степан Івасишен, Галина Івасюк, Тоня Фратавчан // Сучасні проблеми механіки та математики: в 3-х т. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – **3**. – С. 125–127.

27. *Фратавчан Т. М.* Коректна розв'язність на необмежених часових інтервалах деяких задач для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова вищого порядку / Т. М. Фратавчан, Г. П. Івасюк, С. Д. Івасишен // IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30.06-5.07.2014, Чернівці: тези доп. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т. ім. Юрія Федьковича, 2014. – С. 207–208.

28. *Фратавчан Т. М.* Про властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова / Т. М. Фратавчан, Г. П. Івасюк, С. Д. Івасишен // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доп. VI Міжнар. наук, конф., 4–5.04.2014, Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т. ім. Івана Огієнка, 2014. – С. 181–182.

29. *Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язку задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем / С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк, Т. М. Фратавчан // Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, 1–4.07.2015, Чернівці: тези доп. – Чернівці: ЧНУ, 2015. – С. 45–46.

30. *Fratavchan T.* Professor S.D. Eidelman investigation of properties of solutions for parabolic equations on unbounded with respect to time variable intervals and their development / Tonia Fratavchan // Intern. V. Skorobohatko math. conf., August 25–28, 2015, Drohobych: Abstracts. – Lviv, 2015. – P. 45.

31. *Ivasyuk H.* On parabolic initial problems of Solonnikov-Eidelman / Halyna Ivasyuk // Intern. V. Skorobohatko math. conf., August 25–28, 2015, Drohobych: Abstracts. – Lviv, 2015. – P. 66.

32. *Eidelman S. D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

33. *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownishen Bewegungen) / A. N. Kolmogoroff // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116–117.

34. *Івасишен С. Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових

просторів, залежних від часу / С. Д. Івасишен // Мат. студії. – 2013. – **40**, №2. – С. 172-181.

35. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / Г. Е. Шилов // Успехи мат. наук. – 1955. – Т. 10, № 4. – С. 89-100.

36. *Гельфанд И. М.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, № 6. – С. 3-54.

37. *Гельфанд И. М.* О новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 102, № 6. – С. 1065-1068.

38. *Бабенко К. И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций / К. И. Бабенко // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 523-542.

39. *Гуревич Б. Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем дифференциально-разностных уравнений / Б. Л. Гуревич // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 108, № 6. – С. 1001-1003.

40. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. – Чернівці : Рута, 1998. – 225 с.

41. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с. – (Обобщенные функции ; вып. 3).

42. *Городецкий В. В.* О локализации и стабилизации решений задачи Коши для параболических систем в классах обобщенных функций / В. В. Городецкий // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 6. – С. 37-46.

43. *Городецкий В. В.* Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций / В. В. Городецкий // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 1. – С. 43-48.

44. *Эйдельман С. Д.* Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем / С. Д. Эйдельман, С. Д. Ивасишен, Ф. О. Порпер // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 169-179.

45. *У Хоу–синь* Об определении параболичности систем уравнений в частных производных / У Хоу–синь // Успехи матем. наук. – 1960. – Т. 15, в. 6. – С. 157-161.

46. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами / Я. И. Житомирский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – Т. 23. – С. 925-932.

47. *Літовченко В. А.* Задача Коші для одного параболічного рівняння типу Шилова / В. А. Літовченко, І. М. Довжицька // Тридцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня, 2010. Матеріали конференції. Т. 1. – К.: НТУУ, 2010. – С. 254.

48. *Літовченко В. А.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами / В. А. Літовченко, І. М. Довжицька // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, № 4. – С. 516-552.

49. *Довжицька І. М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами / І. М. Довжицька, В. А. Літовченко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 528. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 43-50.

50. *Vladyslav A. Litovchenko* Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients / Vladyslav A. Litovchenko, Iryna M. Dovzhytska // Central European Journal of Mathematics. – 2012. – V. 10, №3. – P. 1084-1102.

51. *Довжицька І. М.* Задача Коші для параболічних рівнянь типу Шилова із змінними коефіцієнтами / І. М. Довжицька, В. А. Літовченко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Т. 2, №1. – Чернівці: Рута, 2012. – С. 24-31.

52. *Літовченко В.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для параболічних систем типу Шилова / В. Літовченко, І. Довжицька // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики 21–25 травня 2013 р. Матеріали конференції. Т. 3. – Л.: ІППММ, 2013. – С. 138–140.

53. *Літовченко В. А.* Деякі властивості розв'язків параболічних систем типу Шилова з невід'ємним родом / В. А. Літовченко, І. М. Довжицька // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. Вип. 8. – Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2013. – С. 113–118.

54. *Литовченко В. А.* Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом / В. А. Литовченко, И. М. Довжицкая // Сиб. мат. журнал. – Март-апрель 2014. – Т. 55, № 2. – С. 341–349.

55. *Довжицька І. М.* Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних систем типу Шилова / І. М. Довжицька // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування 23–30 червня 2013 р. Тези доповідей. Київ, 2013. – С. 94–95.

56. *Довжицька І. М.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами / І. М. Довжи-

цька // Третя міжнародна конференція молодих математиків з диф. рівнянь та їх застосув., присвячена Я. Лопатинському, 3–6 листопада, 2010. Тези конференції. – Львів, 2010. – С. 52–53.

57. *Довжицька І. М.* Про задачу Коші для параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами / І. М. Довжицька // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування 8–10 червня, 2011. Матеріали конференції. – Київ, 2011. – С. 77.

58. *Довжицька І. М.* Про деякі властивості розв'язків параболічних систем типу Шилова з невід'ємним родом / І. М. Довжицька // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки 23–24 квітня, 2014. Матеріали конференції. – Київ: Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2014. – С. 59.

59. *Litovchenko V. A.* The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic systems of the Shilov type with variable coefficients / V. A. Litovchenko, I. M. Dovzhytska // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – V. 175, № 4. – Pp. 450–476.

60. *Гельфанд И. М.* Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

61. *Малицька Г. П.* Системи рівнянь типу Колмогорова / Г. П. Малицька // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 12. – С. 1650–1663.

62. *Литовченко В. А.* Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка / В. А. Литовченко, Е. Б. Настасий // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 148–164.

63. *Васько О. Б.* Коректна розв'язність задачі Коші для простішого класу вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова / О. Б. Васько // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. Вип. 7. – Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2012. – С. 103–114.

64. *Літовченко В. А.* Задача Коші для вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова із сталими коефіцієнтами / В. А. Літовченко, О. Б. Васько // Буковинський математичний журнал. – Т.1, № 1-2. – Чернівці: ЧНУ, 2013. – С. 90–95.

65. *Литовченко В. А.* Задача Коши для вырожденных параболических систем уравнений типа Колмогорова векторного порядка с обобщенными начальными данными / В. А. Литовченко, Е. Б. Васько // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т.50, № 12. – С. 1598-1606.

66. *Літовченко В. А.* Задача Коші для вироджених параболічних систем типу Колмогорова у вагових просторах Lp / В. А. Літовченко, О. Б. Васько //

Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т.11, № 2. – К.: Ін-т математики НАН України, 2014. – С. 233-248.

67. *Літовченко В. А.* Локалізація гладких розв'язків вироджених параболічних систем / В. А. Літовченко, О. Б. Васько // Буковинський математичний журнал. – Т. 2, № 4. – Чернівці: ЧНУ, 2014. – С. 87–91.

68. *Літовченко В. А.* Про вироджені параболічні системи рівнянь типу Колмогорова / В. А. Літовченко, О. Б. Настасій // Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування», присв. 65-річчю каф. Інтегральних та диференціальних р-нь КНУ, 8-10 червня, 2011. Тези конференції. – Київ, 2011. — С. 108.

69. *Васько О. Б.* Простіші вироджені параболічні системи. Задача Коші / О. Б. Васько // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики"21-25 травня, 2013. Матеріали конференції. – Л.: ІППММ, 2013. – С. 14–15.

70. *Літовченко В. А.* Принцип локалізації розв'язків задачі Коші для простіших вироджених параболічних систем / В. А. Літовченко, О. Б. Васько // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування 23-30 червня, 2013. Тези доповідей. Київ, 2013. – С. 132-133.

71. *Васько О. Б.* Вироджені параболічні системи векторного порядку. Задача Коші / О. Б. Васько // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки 23-24 квітня, 2014. Матеріали конференції. – К.: Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2014.– С. 44.

72. *Літовченко В. А.* Про граничні значення розв'язків вироджених параболічних систем векторного порядку у вагових просторах Лебега / В. А. Літовченко, О. Б. Васько // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014. Матеріали конференції. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 198.

73. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

74. *Митропольский Ю. А.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений / Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, И. И. Клевчук // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 335-340.

75. *Клевчук І. І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням / І. І. Клевчук // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1022-1028.

76. *Клевчук І. І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням / І. І. Клевчук // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563-567.

77. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.

78. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М.: ГТТИ, 1956. – 491 с.

79. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний / А. М. Самойленко. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

80. *Долгий Ю. Ф.* Периодические колебания в консервативных системах с малым запаздыванием / Ю. Ф. Долгий, А. В. Захаров // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 10. – С. 1299-1309.

81. *Фодчук В. І.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь / В. І. Фодчук, І. І. Клевчук // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 23-25.

82. *Клевчук И. И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа / И. И. Клевчук // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 4. – С. 464-472.

83. *Клевчук І. І.* Застосування методу усереднення до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь / І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 3. – С. 318-324.

84. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter / J. K. Hale // J. Different. Equat. – 1966. – **2**, N 1. – P. 57-73.

85. *Фодчук В. И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений / В. И. Фодчук, И. И. Клевчук // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 334-340.

86. *Клевчук И. И.* Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений / И. И. Клевчук, В. И. Фодчук // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 324-330.

87. *Клевчук И. И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом / И. И. Клевчук // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1342-1351.

88. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа періодичних розв'язків у системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І. І. Клевчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. Вип. 5. – Київ, 2001. – С.67-72.

89. *Колесов А. Ю.* Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией / А. Ю. Колесов // Изв. РАН. Сер. матем. – 1995. – **59**,

№ 3. – С. 141-158.

90. *Белан Е. П.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения / Е. П. Белан, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 21-43.

91. *Мищенко Е. Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.

92. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 71-78.

93. *Клевчук І. І.* Дослідження біфуркацій та еквівалентності одновимірних відображень / І. І. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modeling and stability investigation". Abstracts of conference reports. – Kyiv, 2011. – С. 85.

94. *Клевчук І. І.* Дослідження одного класу різницевих рівнянь / І. І. Клевчук // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"(8-10 червня 2011 р., Київ): Матеріали конф. – С. 97.

95. *Клевчук І. І.* Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь / І. І. Клевчук // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці"(11-13 червня 2012 р., Чернівці): Матеріали конф. – С. 88.

96. *Klevchuk I. I.* Application of the averaging method to the investigation of stability of difference-differential equations / I. I. Klevchuk // Nonlinear Oscillations. – 2012. – **14**, N 3. – P. 334-341.

97. *Клевчук І. І.* Дослідження стійкості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку / І. І. Клевчук // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"(27-29 вересня 2012 р., Ужгород): Матеріали конф. – С. 43.

98. *Перестюк М. О.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / М. О. Перестюк, І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 94-104.

99. *Klevchuk I. I.* Application of asymptotic methods to regularly and singularly perturbed differential difference equations / I. I. Klevchuk // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". Abstracts of conference reports. – Kiev, 2013. – P. 34.

100. *Клевчук І. І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / І. І. Клевчук // Міжнар. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диф. рівняння, теорія функцій та їх застосування". Тези доповідей. – Севастополь, 2013. – С. 114.

101. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними / І. І. Клевчук // Всеукраїнська наук.конф. "Нелінійні проблеми аналізу". Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 35.

102. *Клевчук И. И.* Применение асимптотических методов к регулярно и сингулярно возмущенным дифференциально-разностным уравнениям / И. И. Клевчук // Междунар. конф. "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация". Тезисы докладов. – Минск, 2013. – С. 153-156.

103. *Perestyuk M. O.* Application of asymptotic methods to regularly and singularly perturbed differential-difference equations / M. O. Perestyuk, I. I. Klevchuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – **197**, N 1. – P. 96-107.

104. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа циклів гіперболічних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними / І. І. Клевчук // Міжнар. мат. конф. "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"(23-24 квітня 2014 р., Київ): Матеріали конф. – С. 69.

105. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І. І. Клевчук // IV міжнар. ганська конференція (30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці). Тези доповідей. – С. 75-76.

106. *Клевчук І. І.* Інтегральні многовиди та розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням / І. І. Клевчук // Буковинський математичний журнал, 2014. – **2**, № 4. – С. 70-73.

107. *Клевчук І. І.* Біфуркація автоколивань параболічних систем із запізнюючим аргументом та малою дифузією / І. І. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". Abstracts of conference reports. – Kiev, 2015. – P. 24.

108. *Стрыгин В. В.* Разделение движений методом интегральных многообразий / В. В. Стрыгин, В. А. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

109. *Гольдштейн В. М.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем / В. М. Гольдштейн, В. А. Соболев. – Новосибирск, 1988. – 153 с.

110. *Воропаева Н. В.* Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев // Дифференц. уравнения. – 1995. – 31, № 4. – С. 569-578.

111. *Sobolev V. A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems / V. A. Sobolev // System and Control Letters. – 1984, N 5. – P. 169-179.

112. *Sobolev V. A.* Decomposition of linear singularly perturbed systems / V. A. Sobolev // Acta Math. Hung. – 1987, N 3-4. – P. 365-376.

113. *Самойленко А. М.* Інваріантні многовиди лінійних диференціальних рівнянь / А. М. Самойленко. – Київ, 2009. – 10 с. (препринт / НАНУ Інт-мат.: № 2009.7).

114. *Черевко І. М.* Розщеплення лінійних сингулярно-збурених диференціально-функціональних рівнянь / І. М. Черевко // Доп. НАН України, 2002. – № 6. – С. 32-36.

115. *Сельський С. С.* Інтегральні многовиди та розщеплення систем лінійних сингулярно збурених рівнянь з двома малими параметрами / С. С. Сельський, І. М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Серія: математика : Зб. наук. праць. – **1**, № 3. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – С. 104-107.

116. *Осипова О. В.* Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем / О. В. Осипова, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Т. 1, № 3-4. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. – С. 114-118.

117. *Воропаева Н. В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.

118. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием / Н. Н. Красовский // ПММ. – 1964. – **28**, № 4. – С. 716–725.

119. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями / Ю. М. Репин // ПММ. – 1965. – **19**, № 2. – С. 226–235.

120. *Cherevko I. M.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials / I. M. Cherevko, L. A. Piddubna // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – **28**, N 1. – P. 15–21.

121. *Піддубна Л. А.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь / Л. А. Піддубна, І. М. Черевко // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 1. – С. 42–50.

122. *Матвій О. В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Нелінійні коливання, 2004. – **7**, № 2. – С. 208–216.

123. *Матвій О. В.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Нелінійні коливання, 2007. – **10**, № 3. – С. 329–335.

124. *Іліка С. А.* Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь / С. А. Іліка, І. М. Черевко // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **55**, № 1. – С. 39–48.

125. *Матвій О. В.* Про стійкість лінійних систем із запізненням / О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. – Чернівці: рута, 2008. – Вип. 421: Математика. – С. 66–70.

126. *Kuang Jiaoxun.* Stability of numerical methods for delay differential equations / Jiaoxun Kuang, Yuhao Cong. – Elsevier, 2007. – 295 p.

127. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

128. *Yang Kuang.* Delay differential equations: with applications in population dynamics / Kuang Yang. – New York : Academic Press, 1993. – 398 p.

129. *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход / Л. А. Бекларян. – М.: Факториал Пресс, 2007. – 288 с.

130. *Беллман Р. Е.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Е. Беллман, К. Л. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

131. *Cryer C. W.* Numerical methods for functional differential equations / C. W. Cryer // Delay and Functional Differential Equations and their Applications. – New York : Academic Press, 1972. – P. 17-101.

132. *Іліка С. А.* Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування / С. А. Іліка, О. В. Матвій, Л. А. Піддубна, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Т. 2, № 2-3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2014. – С. 92-96.

133. *Іліка С. А.* Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь / С. А. Іліка, І. М. Черевко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 39-48.

134. *Черевко И. М.* Исследование схем аппроксимации дифференциально-разностных уравнений / И. М. Черевко, А. В. Матвий // Math. Analysis, Differential Equations and Applications. – Sofia, 2011. – P. 301-312.

135. *Пернай С. А.* Про апроксимацію диференціальних рівнянь нейтрального типу / С. А. Пернай // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування присв. 65-річчю каф. Інтегральних та диференціальних р-нь КНУ(8-10 червня 2011 р.): Матеріали. – Київ, 2011. – С. 133.

136. *Матвій О. В.* Дослідження схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь / О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Intern.Conf. "Dynamical system modeling and stability investigation"(May 25-27, 2011, Kyiv): Abstracts of conference reports. – Kyiv, 2011. – С. 105.

137. *Іліка С.А.* Дослідження схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу / С. А. Іліка, І. М. Черевко // XVII Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та ін-

форматики": Матеріали конференції (присвячена 350-річчю Львівський національного університету імені Івана Франка, 6-7 жовтня 2011 року). – Львів. – 2011. – С. 49-50.

138. *Матвій О. В.* Про апроксимацію системи різницевих та диференціально-різницевих рівнянь / О. В. Матвій, Л. А. Піддубна // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія: математика : зб. наук. праць. – Т. 1, № 4. – Чернівці : ЧНУ, 2011. – С. 107-112.

139. *Черевко І. М.* Про наближену заміну диференціально-функціональних рівнянь / І. М. Черевко // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"(27-29 вересня 2012 р., Ужгород): Матеріали конф. – Ужгород, 2012. – С. 82.

140. *Матвій О. В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість / О. В. Матвій, Л. А. Піддубна, І. М. Черевко // Матеріали І Міжнародної XX Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"(7-9 квітня 2014 р.). – Львів, 2014. – С. 103-104.

141. *Пернай С. А.* Схема апроксимації підвищеної точності диференціальних рівнянь нейтрального типу / С. А. Пернай, І. М. Черевко // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 112-123.

142. *Cherevko I.* On the approximation of systems with delay and their numerical modelling / I. Cherevko, L. Piddubna, S. Ilika // Actual problems of training specialists in ICT. Conference Proceedings. – Sumy: Sumy State University, 2013. – Part 2. – P. 221-225.

143. *Пернай С. А.* Схема підвищеної точності наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 111-114.

144. *Клевчук І. І.* Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь / І. І. Клевчук, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28-34.

145. *Іліка С. А.* Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування / О. В. Матвій, Л. А. Піддубна, І. М. Черевко // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30 червня – 5 липня 2014 р.). – Чернівці, 2014. – С. 63-64.

146. *Колмановский В. Б.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М. : Наука, 1981. – 448 с.

147. *Черевко І. М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і на-

ближення неасимптотичних коренів квазіполіномів / І. М. Черевко // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. – К. : Ін-т математики АН України, 1992. – С. 74-84.

148. *Dickson D. G.* Asymptotic distribution of zeros of exponential sums / D. G. Dickson // Publ. Math. Debrecen, 1964. – N 11. – P. 297-300.

149. *Walther H. O.* On the eigenvalues of linear autonomous differential delay equations / H. O. Walther // Ordinary and Partial Differential Equations : Proceedings of the Fourth Conference held at Dundee, Scotland, March 30 – April 2, 1976 : lecture Notes in Mathematics. – 1976. – Vol. 564. – P. 513-517.

150. *Баркин А. И.* Об устойчивости линейных систем с запаздыванием // Доклады РАН. – 2006. – **406**, № 6. – С. 476-748.

151. *Хусаинов Д. Я.* Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом / Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова // Украинский математический журнал. – 1983. – **35**, № 2. – С. 261-264.

152. *Резван В.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием / В. Резван. – М.: Наука, 1983. – 360 с.

153. *Вагина М. Ю.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями / М. Ю. Вагина, М. М. Кипнис // Математические заметки. – 2003. – **74**, Вып. 5. – С. 786-789.

154. *Клевчук І. І.* Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь / І. І. Клевчук, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28-34.

155. *Хохлова Т. Н.* Конус устойчивости для линейного матричного дифференциального уравнения с запаздыванием / Т. Н. Хохлова // Вестник ЮУрГУ. – 2010. – Вып. 30 : Математика. Физика. Химия. – С. 33-37.

156. *Cherevko I.* Solving boundary value problems for delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science, 19-23 Aug. 2014, Chisinau, Moldova: Proceedings IMCS-50. – Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science, Acad. of Sciences of Moldova, 2014. – P. 243-246.

157. *Дорош А. Б.* Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 10. – С. 80-88.

158. *Cherevko I.* Existence and approximation of a solution of the boundary

value problems for delay integro-differential equations / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 23rd Conference On Applied And Industrial Mathematics, Suceava, Romania, September 17-20, 2015: Proceedings CAIM 2015. – Suceava: Stefan cel Mare University of Suceava, 2015. – P. 25.

159. *Dorosh A.* Approximation of boundary value problem solutions for integro-differential equations with delay / A. Dorosh // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (25-28 серпня 2015, Дрогобич, Україна). – Львів, 2015. – С. 35.

160. *Grim L. J.* Boundary value problems for delay differential equations / L. J. Grim, K. Schmitt // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, № 5. – P. 997-1000.

161. *Каменский Г. А.* Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 2171-2179.

162. *Biga A.* Existence, uniqueness and approximation for the solution of a second order neutral differential equation with delay in Banach spaces / A. Biga, R. Gaber // Mathematica, - 2007. – **49**, № 2. – P. 117-130.

163. *Лучка А. Ю.* О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / А. Ю. Лучка // Дифференциально-функциональные и разностные уравнения. – Київ: Ін-т математики АН УРСР, 1981. – С. 35-56.

164. *Nikolova T. S.* Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations / T. S. Nikolova, D. D. Bainov // Yokohama Math. J. – 1981. – **29**, № 1. – P. 108-122.

165. *Настасьєва Н. П.* Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач / Н. П. Настасьєва, І. М. Черевко // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 1999. – Вип. 1. – С. 69-73.

166. *Cherevko I.* Solving boundary value problems for neutral delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // Actual problems of training specialists in ICT. Conferenrence Proceedigs. - Sumy: Sumy State University, 2013. - Part 2. - P. 226-234.

167. *Завялов Ю. С.* Методы сплайн-функций / Завялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

168. *Bellen A.* Spline approximations for neutral delay differential equations / A. Bellen, G. Migula // Revue d'analyse numer. et de theorie de l'approximation. – 1994. – **23**, № 2. – P. 117-125.

169. *Бабюк О. К.* Наближення періодичних розв'язків лінійних диференці-

ально-різницевих рівнянь нейтрального типу методом сплайн-колокацій / О. К. Бабюк, І. М. Черевко // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 2. – С. 147-154.

170. *Mishura Y.* Analytic properties of the survival probability in a risk model with additional funds (in Ukrainian) / Y. Mishura, O. Ragulina, O. Stroyev // Teoriya Imovirnostey ta Matematychna Statystyka. – 2014. – No. 91. – P. 123-135.

171. *Леоненко М. М.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. – К.: Інформтехніка, - 1995.

172. *Asmussen S.* Ruin Probabilities / Asmussen S. – World Scientific, Singapore. – 2000.

173. *Grandell J.* Aspects of risk theory / J. Grandell // Springer-Verlag. – New York. – 1991.

174. *Rolski T.* Stochastic Processes for Insurance and Finance / T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels // John Wiley & Sons. – Chichester. – 1999.

175. *Boikov A. V.* The Cram'er-Lundberg model with stochastic premium process / Boikov A. V. - Theory Probab. Appl. – 2002. – Vol. 47, No. 3. – P. 489-493.

176. *Рагуліна О. Ю.* Оцінки і властивості ймовірності небанкрутства страхової компанії в класичній моделі ризику за умови розміщення капіталу на фінансовому (B,S)-ринку / О. Ю. Рагуліна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – Вип. 2. – С. 23-30.

177. *Рагуліна О. Ю.* Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою / О. Ю. Рагуліна // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика – 2010. – № 1-2. – С. 82-116.

178. *Рагуліна О. Ю.* Про ймовірність небанкрутства страхової компанії у двох моделях ризику / О. Ю. Рагуліна // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2012. – № 1. – С. 40-50.

179. *Bondarev B. V.* On the finite-time nonruin probability of an insurance company with investments in the financial (B,S)-market / B. V. Bondarev, E. Yu. Ragulina // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – Vol. 48, No. 5. – P. 736-748.

180. *Гусак Д. В.* Кумулянтне зображення кореня Лундбергадля напівнеперервних процесів / Д. В. Гусак // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2010. – № 82. – С. 21-29.

181. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями / Скороход А. В. - М.: Наука, 1964. – 278 с.

182. *Gerber H. U.* Martingales in risk theory / H. U. Gerber // Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker. – 1973. – Vol. 73. –

P. 205-216.

183. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables / W. Hoeffding // Journal of the American Statistical Association. – 1963. – No. 58. – P. 13-30.

184. *Карташов М. В.* Стійкість транзієнтних квазі-однорідних марковських напівтруп та оцінка ймовірності банкрутства / М. В. Карташов, О. М. Строєв // Теор. ймовірностей математична статистика. – 2006. – Вип. 74. – С. 36-44.

185. *Строєв О. М.* Операторне представлення процесу ризику : Матеріали конф., Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (15-17 трав., 2008 р., Київ Т. 2.). – К.: ТОВ "Задруга 2008. – С. 387.

186. *Строєв О. М.* Оцінка ймовірності розорення процесу ризику з неоднорідною інтенсивністю премій : Матеріали конф., Тринадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, (13-15 трав. 2010 р., Київ. Т. 3.). – К.: НТУУ, 2010. – С. 107.

187. *Строєв О. М.* Оцінка ймовірності розорення процесу ризику з неоднорідною інтенсивністю премій / О. М. Строєв // Вісник Київського університету: Зб. наук. пр. Математика Механіка, 17-18. – 2007. – С. 23-29.

188. *Строєв О. М.* Оцінка ймовірності розорення процесу ризику з перестрахуванням / О. М. Строєв // Вісник Київського університету: Зб. наук. пр. Математика Механіка, 13-14. – 2005. – С. 97-101.

189. *Mishura Y.* Practical approaches to the estimation of the ruin probability in a risk model with additional funds / O. Ragulina, O. Stroyev // Modern Stochastics: Theory and Applications. – K., 2014. – **18**. – C. 167-180.

190. *Перцов А. С.* Про зведення задачі мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів від розв'язків задачі Неймана для рівнянь лінійної теорії пружності до задачі оптимального керування / А. С. Перцов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 128-135.

191. *Подлипенко Ю. К.* Наближені мінімаксні оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь / Ю. К. Подлипенко, М. Ю. Горбатенко, А. С. Перцов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки, №4, 2014. - С. 213 - 218.

192. *Toselli A.* Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory / Toselli A., Widlund O. – Berlin, Heidelberg, New-York.: Springer, 1972. – 450 p.

193. *Наконечный А. Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах / Наконечный А. Г.

– Киев: КГУ, 1985. – 82 с.

194. *Подлипенко Ю. К.* Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей / Ю. К. Подлипенко, Н. В. Грищук // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – № 2. – С. 104-128.

195. *Подлипенко Ю.К.* Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармоничного рівняння з граничними умовами типа Неймана / Ю. К. Подлипенко, А. С. Перцов //Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – № 4. – С. 153-160.

196. *Наконечний О. Г.* Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана / О. Г. Наконечний, Ю. К. Подлипенко, А. С. Перцов // Доповіді НАН України. – 2010. – № 2. – С. 43-50.

197. *Перцов А. С.* Минимаксное оценивание неизвестных данных краевой задачи для бигармонического уравнения с граничными условиями типа Неймана / А. С. Перцов // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – № 1. – С. 103-112.