УДК 517.95+517.929+519.863
№ держреєстрації 0116U004084
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ЧНУ ім. Ю. Федьковича
58000, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
тел. (0372) 52-61-42, nd-office@chnu.edu.ua

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
Проректор з наукової роботи,
д-р тех. наук, доцент
______________ Андрій САМІЛА
28 жовтня 2020 р.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ТА ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ І МОДЕЛЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ТА СТОХАСТИЧНИХ ПРИКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ

(остаточний)

Науковий керівник НДР
д-р ф.-м. наук, проф. ______________ Ігор ЧЕРЕВКО
27 жовтня 2020 р.

2020

Рукопис закінчено 27 жовтня 2020 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, завідувач кафедри, д-р фіз.-мат. наук, професор	________________	І. М. Черевко (реферат, вступ, розділи 2, 4, 5, висновки)
Виконавці:		
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	Г. С. Пасічник (п. 1.1)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	Г. П. Івасюк (п. 1.2)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	Т. М. Фратавчан (п. 1.2)
Аспірант кафедри	________________	О. В. Осипова (розділ 2)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	________________	А. С. Перцов (п. 2.2, 4.5)
Доцент кафедри, д-р фіз.-мат. наук, доцент	________________	І. І. Клевчук (розділ 3)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	Л. А. Піддубна (розділ 4, 5)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	________________	А. Б. Дорош (розділ 4)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	О. В. Матвій (розділ 5)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	________________	С. А. Іліка (розділ 5)
Аспірант кафедри	________________	І. І. Тузик (п. 5.1, 5.2)
Аспірант кафедри	________________	І. М. Гаюк (п. 4.4)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	І. В. Юрченко (п. 6.1, 6.2)

Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	________________	Т. О. Лукашів (п. 6.3)
Асистент кафедри, канд. фіз.-мат. наук	________________	М. Ю. Горбатенко (п. 6.3)
Доцент кафедри, канд. фіз.-мат. наук, доцент	________________	І. В. Дорошенко (п. 6.4)

Р Е Ф Е Р А Т

Звіт про НДР: 164 с., 2 табл., 2 рис., 175 джерел.

ПАРАБОЛІЧНІ, УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ, СТОХАСТИЧНІ РІВНЯННЯ, ВИРОДЖЕННЯ, СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ, ДЕКОМПОЗИЦІЯ, ПРИНЦИП ЗВЕДЕННЯ, ЗАДАЧА КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, ІНТЕГРАЛЬНИЙ МНОГОВИД, БІФУРКАЦІЯ, СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ, ПУАСОНІВСЬКЕ ЗБУРЕННЯ, МАРКОВСЬКІ ПЕРЕМИКАННЯ.

Об'єкт дослідження – ультрапараболічні рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині, багатотемпові сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь, диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння, стохастичні диференціальні рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними.

Мета роботи – дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші для нових класів вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. Асимптотичне розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь, біфуркація циклів та торів для різних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними. Побудова схем апроксимації початкових та крайових задач для диференціально-різницевих і диференціально-функціональних рівнянь, обґрунтування методів моделювання та оптимізації процесів з післядією та випадковостями.

Для параболічних систем з виродженням і зростаючими коефіцієнтами, а також ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова досліджені властивості фундаментальних розв'язків та описані класи коректності задачі Коші.

Здійснено розщеплення лінійної двотемпової сингулярно збуреної системи на незалежні підсистеми, встановлено принцип зведення для дослідження стійкості розв'язків вихідної системи.

Побудовані схеми апроксимації систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів і розглянуто їх застосування для наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів. Встановлені умови розв'язності крайових задач із запізненням та нейтрального типу, досліджено апроксимацію їх розв'язків за допомогою кубічних сплайнів дефекту два та здійснено комп'ютерне моделювання.

Досліджено існування та стійкість біжучих хвиль у параболічних та диференціально-функціональних системах з малою дифузією.

Встановлено умови існування розв'язку задачі Коші для нелінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь та досліджено стабілізацію сильного розв'язку автономного стохастичного рівняння Іто-Колмогорова.

Усі наведені в звіті результати є новими. Вони можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях так і при обґрунтуванні методик розв'язання та наближеній побудові розв'язків конкретних прикладних задач.

ЗМІСТ

ВСТУП

У звіті наведені результати, які одержані протягом 2016–2020 рр. співробітниками кафедри математичного моделювання ЧНУ при виконанні НДР "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально- функціональних та еволюційних рівнянь і моделювання детермінованих та стохастичних прикладних процесів". Ці дослідження є продовженням виконаної в 2011–2015 рр. кафедрою математичного моделювання НДР "Методи аналізу диференціально-функціональних і еволюційних рівнянь та математичне моделювання процесів з післядією та випадковостями". Звіт складається з 6 розділів.

Результати, що представлені в першому розділі, стосуються дослідження властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині та з їх допомогою досліджено розв'язність задачі Коші для різних вироджень параболічних рівнянь типу Колмогорова на початковій гіперплощині.

Другий розділ містить результати про дослідження сингулярно збурених багатотемпових систем. Для двотемпових лінійних сингулярно збурених систем обґрунтовано принцип зведення для дослідження стійкості вихідної системи та запропоновано можливість використання наближеного інтегрального многовиду при дослідженні стійкості нульового розв'язку.

У третьому розділі досліджено існування та стійкість скінченного числа циклів та біжучих хвиль для параболічної системи із запізненням, рівняння брюсселятора, рівняння спінового горіння із запізненням та диференціально-функціональних параболічних систем із малою дифузією.

Дослідження лінійних та нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу наведено у четвертому розділі. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків у залежності від структури відхилень аргументу. Встановлено достатні умови існування розв'язку таких задач, побудовано та обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку цих задач за допомогою апроксимації кубічними сплайнами дефекту два, досліджено збіжність ітераційного процесу.

У пятому розділі дослідженння зв'язків між розв'язками лінійних диференціально-різницевих рівнянь та розв'язками відповідних апроксимую-чих систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь дозволило побудувати алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів. За допомогою цих алгоритмів запропонована методика дослідження стійкості роз'язків лінійних стаціонарних систем із сталим запізненням, а також розроблено конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями.

У розділі 6 описуються основні теореми про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень та існування і стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних із випадковими параметрами. Дослідження, результати яких увійшли до звіту, використовуються при виконанні студентами курсових і магістерських робіт. За їх матеріалами захищені кандидатська дисертація А. Б. Дороша (2018 р., науковий керівник І. М. Черевко) та докторська дисертація І. І. Клевчука (2017 р.)

Виконавці НДР брали активну участь у роботі міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Ними зроблено 63 доповіді.

1 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ І ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗА ЕЙДЕЛЬМАНОМ СИСТЕМ У НЕГАТИВНИХ ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

У цьому розділі наводяться результати досліджень, що доповнюють і розвивають результати з [1] на випадок ультрапараболічних рівнянь з необмежено зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів і виродженнями на початковій гіперплощині та на випадок параболічних за Ейдельманом систем першого порядку за часовою змінною у спеціальних негативних просторах Гельдера.

Наведені в цьому розділі результати, які стосуються знаходження фундаментального розв'язку задачі Коші та розв'язності задачі Коші, опубліковано в працях [1–13], а результати дослідження задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем – в працях [14–17] та висвітлено в 14 доповідях на 11 наукових конференціях різного рангу.

1.1 Задача Коші для ультрапараболічних рівнянь з необмежено зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів і виродженнями на початковій гіперплощині

У праці [1] наведено короткий огляд праць, що стосуються побудови, дослідження і застосування фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних і деяких ультрапараболічних типу Колмогорова рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині. В [1,10,11] розглядались рівняння вигляду

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)A - a_0 \Big) \; u(t,x) = f(t,x),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

де α і β – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна; a_0 – задана функція; A – диференціальний вираз за n-вимірною просторовою змінною x такий, що вираз $\partial_t - A$ є: 1) рівномірно в параболічним за Петровським чи за Ейдельманом виразом з обмеженими або необмеженими при коефіцієнтами, 2) виродженим параболічним типу Колмогорова (ультрапараболічним) виразом, коефіцієнти якого не залежать або від усіх просторових змінних, або тільки від змінних виродження, або залежать від усіх змінних у випадку однієї групи виродження.

Рівняння (1.1) мають виродження при $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \quad B(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta.$$

Так, рівняння (1.1) має слабке виродження, коли $A(T,0) < \infty$, сильне – якщо $A(T,0) = \infty$ і дуже сильне – коли $A(T,0) = \infty$ і $B(T,0) = \infty$.

У цьому підрозділі викладені результати, які є узагальненням на ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова вигляду (1.1), в якому коефіцієнти групи старших членів сталі, а коефіцієнти в групі молодших членів є зростаючими на нескінченності. Такого типу рівняння без вироджень при є рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу. Зазначимо, що для рівняння, яке тут розглядається, тільки без вироджень на початковій гіперплощині відомі результати про ФРЗК, вивчено його властивості та наведено їх застосування.

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$ – їх сума; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, \ldots, x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, \ldots, x_{2n_2})$.

Розглядаємо такі рівняння:

$$L\,u := \alpha(t)\partial_t u - \beta(t)\Bigg(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}u + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}u + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}u +$$
$$+ b\sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}}\Big(x_{1j}u\Big)\Bigg) - au = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.2}$$

і

$$(L^*v)(\tau,\xi) := -\alpha(\tau)\partial_\tau v(\tau,\xi) + \beta(\tau)\Bigg(\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}}v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_3}\xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}}v(\tau,\xi) -$$

$$-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}v(\tau,\xi) + b\sum_{j=1}^{n_1}\xi_{1j}\partial_{\xi_{1j}}v(\tau,\xi)\Bigg) - a\,v(\tau,\xi) = 0,$$

$$(\tau,\xi)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{1.3}$$

де a_{js}, b і a – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\}\subset\{1,...,n_1\}$, та виконується умова параболічності

$$\exists\,\delta>0\quad \forall\,\sigma_1 := (\sigma_{11},...,\sigma_{1n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}:\ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \ge \delta|\sigma_1|^2.$$

Нехай $\xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – точка в $\mathbb{R}^n$, де $\xi_l\in\mathbb{R}^{n_l}$, $l\in\{1,2,3\}$; B_R – куля $\{z\in\mathbb{R}^n|\,|\xi|\le R\}$, Γ_R – її межа; L і L^* – диференціальні вирази з (1.2) і (1.3). Правильна така дивергентна рівноіть для підходящих функцій u і v:

$$\frac{1}{\alpha(\tau)}(v\,Lu - u\,L^*v)(\tau,\xi) = \partial_\tau(uv)(\tau,\xi) -$$

$$-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}\sum_{l=1}^{n_1}a_{jl}(v\,\partial_{\xi_{1l}}u - u\,\partial_{\xi_{1l}}v)(\tau,\xi) - \frac{b\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}(\xi_{1j}vu)(\tau,\xi) -$$

$$-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_2}\partial_{\xi_{2j}}(\xi_{1j}vu)(\tau,\xi) - \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_3}\partial_{\xi_{3j}}(\xi_{2j}vu)(\tau,\xi),$$

$$(\tau,\xi)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{1.4}$$

Інтегруючи рівність (1.2) за $\tau\in(t_1,t_2)$, $0<t_1<t_2\le T$, і $\xi\in B_R$, одержимо формулу

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{B_R}(v\,Lu - u\,L^*v)(\tau,\xi)\,d\xi = \int_{B_R}(uv)(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2}d\xi -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\int_{\Gamma_R}\sum_{j,l=1}^{n_1}a_{jl}(v\,\partial_{\xi_{1l}}u - u\,\partial_{\xi_{1l}}v)(\tau,\xi)\mu_{1j}\,dS_\xi -$$

$$-b\int_{t_1}^{t_2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\int_{\Gamma_R}\sum_{j=1}^{n_1}(vu)(\tau,\xi)\xi_{1j}\mu_{1j}\,dS_\xi -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\int_{\Gamma_R}\Big(\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{1j}\mu_{2j}-\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{2j}\mu_{3j}\Big)(vu)(\tau,\xi)\,dS_\xi, \tag{1.5}$$

де $(\mu_{11},...,\mu_{1n_1},\mu_{21},...,\mu_{2n_1},\mu_{31},...,\mu_{3n_3})$ – орт зовнішньої нормалі до Γ_R.

Перехід у формулі (1.5) до границі при $R\to 0$ для функцій u і v, для яких інтеграли по Γ_R прямують до нуля, приводить до формули

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}(v\,Lu-u\,L^*v)(\tau,\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}(uv)(\tau,\xi)\Big|_{\theta=t_1}^{\theta=t_2}d\xi, \tag{1.6}$$

яка далі безпосередньо використовується для встановлення наступних властивостей ФРЗК.

Рівність (1.4) фактично означає, що в області $\Pi_{0,T]}$ диференціальний вираз L^*/α є формально спряженим з виразом L/α. Оскільки рівняння (1.2) і (1.3) при $t=0$ вироджуються, то для них не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t=0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про ФРЗК згідно з такими означеннями.

Означення 1.1. *1) ФРЗК для рівняння* (1.2) *називається функція*

$$G(t,x;\tau,\xi),\quad 0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

така, що формула

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}, \tag{1.7}$$

визначає розв'язок рівняння (1.2) *для* $(t,x)\in\Pi(\tau,T]$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau}=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau\in(0,T)$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

2) ФРЗК для рівняння (1.3) *називається функція* $G^*(\tau,\xi;t,x)$, $0<\tau<t\le T$, $\{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$v(\tau,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}G^*(\tau,\xi;t,x)\varphi(x)\,dx,\quad (\tau,\xi)\in\Pi_{(0,t)}, \tag{1.8}$$

визначається в $\Pi_{(\tau,t)}$ розв'язок рівняння (1.3), який задовольняє умову

$$v(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t}=\varphi(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $t\in(0,T]$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Далі наведемо явні формули для функцій G і G^*.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned}(Lu)(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]},\\ u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{1.9}$$

де φ вважаємо такою функцією, що всі подальші міркування є правильними, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є

$$\psi(\sigma):=F_{x\to\sigma}[\varphi],\quad \sigma\in\mathbb{R}^n.$$

Шукаючи розв'язок задачі (1.9) у вигляді

$$u(t,x)=F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)],\quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]},$$

і використавши властивості оберненого перетворення Фур'є, отримуємо формулу

$$\begin{gathered}G(t,x;\tau,\xi)=(4\pi)^{-n/2}\exp\{n_1bB(t,\tau)+aA(t,\tau)\}\times\\ \times(\det A_{n_1n_1}\det A_{n_2n_2}\det A_{n_3n_3})^{-1/2}\prod_{l=1}^{3}(p_l(B(t,\tau)))^{-n_l/2}\times\\ \times\exp\Big\{-\frac{1}{4p_1(B(t,\tau))}\sum_{j,l=1}^{n_1}a_1^{jl}(e^{bB(t,\tau)}x_{1j}-\xi_{1j})(e^{bB(t,\tau)}x_{1l}-\xi_{1l})-\\ -\frac{1}{4p_2(B(t,\tau))}\sum_{j,l=1}^{n_2}a_2^{jl}\Big(x_{2j}-\xi_{2j}+f(B(t,\tau))(x_{1j}+\xi_{1j})\Big)\times\\ \times\Big(x_{2l}-\xi_{2l}+f(B(t,\tau))(x_{1l}+\xi_{1l})\Big)-\frac{1}{4p_3(B(t,\tau))}\times\\ \times\sum_{j,l=1}^{n_3}a_3^{jl}\Big(x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{B(t,\tau)}{2}(x_{2j}+\xi_{2j})+g(B(t,\tau))(x_{1j}-\xi_{1j})\Big)\times\\ \times\Big(x_{3l}-\xi_{3l}+\frac{B(t,\tau)}{2}(x_{2l}+\xi_{2l})+g(B(t,\tau))(x_{1l}-\xi_{1l})\Big)\Big\},\\ 0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\end{gathered}\tag{1.10}$$

в якій $A_{n_kn_k} := (a_{js})_{j,s=1}^{n_k}$, $A_{n_kn_k}^{-1} := (a_k^{js})_{j,s=1}^{n_k}$ – матриця, обернена до матриці $A_{n_kn_k}$, $k \in \{1,2,3\}$, де a_{js}, $\{j,s\} \subset \{1,\dots,n_1\}$, – коефіцієнти з рівняння (1.2);

$$p_1(t) := \begin{cases} \frac{e^{2bt}-1}{2b} & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases}, \quad p_2(t) := \begin{cases} \dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)}, & b \neq 0, \\ \dfrac{t^3}{12}, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_3(t) := \begin{cases} \dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2(e^{bt}+1)}{2b^3(e^{bt}-1)}, & b \neq 0, \\ \dfrac{t^5}{720}, & b = 0, \end{cases}$$

$$f(t) := \begin{cases} \frac{e^{bt}-1}{b(e^{bt}+1)} & b \neq 0, \\ \frac{t}{2}, & b = 0, \end{cases}, \quad g(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}\Big(\dfrac{tb(e^{bt}+1)}{2(e^{bt}-1)} - 1\Big), & b \neq 0, \\ \dfrac{t^2}{12}, & b = 0, \end{cases} \quad t > 0.$$

Для розв'язку задачі

$$(L^*v)(\tau,\xi) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{(0,t)},$$
$$v(\tau,\xi)|_{\tau=t} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

де t – довільно фіксоване число з $(0,T]$, а функція φ така сама, як у задачі (1.9), цілком аналогічно отримується зображення (1.8), в якому

$$G^*(\tau,\xi;t,x) = G(t,x;\tau,\xi), \quad 0 < \tau < t \leq T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Наведемо властивості функцій G і G^* , означених формулами (1.10) і (1.11). Ці властивості подібні до властивостей відповідних функцій для рівнянь, в яких відсутні виродження на початковій гіперплощині. Вони доводяться аналогічним способом.

1^0. Для будь-яких мультиіндексів $\{k_l, m_l\} \subset \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3} G(t,x;\tau,\xi)| \leq C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3} E^{a,b}(t,\tau) \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{3} (p_l(B(t,\tau)))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2} E_c(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

в яких $C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, b, n_1, n_2 і n_3, а також від T тільки у випадку, коли $b > 0$;

$$E^{a,b}(t,\tau) := E^a(t,\tau)\, F^b(t,\tau), \quad E^a(t,\tau) := \exp\{aA(t,\tau)\},$$
$$F^b(t,\tau) := \exp\{n_1 bB(t,\tau)\}, \;\; E_c(t,x;\tau,\xi) :=$$
$$:= \exp\biggl\{ -c\,\biggl(\frac{|e^{bB(t,\tau)}X_1(B(t,\tau)) - \xi_1|^2}{p_1(B(t,\tau))} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(B(t,\tau)) - \xi_l|^2}{p_l(B(t,\tau))} \biggr)\biggr\},$$

де

$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b}x_1',$$
$$x_1 := (x_1', x_1'', x_1'''), \;\; \hat{x}_1 := (x_1', x_1''), \;\; x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3}), \;\; x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2}),$$
$$x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1}), \;\; x_2 := (x_2', x_2''), \;\; x_2' := (x_{21}, ..., x_{2n_3}),$$
$$x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2}), \quad \alpha_b(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt}-1}{b}, & b \neq 0, \\ t, & b = 0. \end{cases}$$

2^0. Функція $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, як функція τ і x є розв'язком рівняння (1.2), а як функція τ і ξ – розв'язком рівняння (1.3).

3^0. Справджуються рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, d\xi = E^{a,b}(t,\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, dx = E^a(t,\tau), 0 \le \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

4^0. Для будь-якої неперервної та обмеженої в $\mathbb{R}^n$ функції φ функція

$$u(t,x,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad 0 \le \tau < t \le T, \;, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.14}$$

задовольняє умову

$$\lim_{t \to \tau} u(t,x,\tau) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

а функція

$$v(\tau,\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(x)\, dx, \quad 0 \le \tau < t \le T, \;, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.15}$$

– умову

$$\lim_{\tau\to t} v(\tau,\xi,t) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

5⁰. Правильна формула згортки

$$G(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\gamma,z)G(\gamma,z;\tau,\xi)\,dz,$$
$$0 < \tau < \gamma < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.16}$$

Зауваження 1.1. З властивостей $\mathbf{2}^0$ і $\mathbf{4}^0$ випливає, що згідно з означенням ФРЗК функції G і G^* справді є ФРЗК відповідно для рівнянь (1.2) і (1.3), причому рівності (1.11) і (1.16) означають, що ФРЗК має властивість нормальності та для нього справджується формула згортки.

Зауваження 1.2. У випадку слабкого виродження рівняння (1.2) у формулах (1.11) – (1.16) можна брати $\tau = 0$.

Наведені властивості ФРЗК дозволяють у випадку слабкого виродження подібно до випадку рівняння без виродження на початковій площині дослідити коректну розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення та граничну поведінку при $t \to 0$ розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі $\Pi_{(o,T]}$, а у випадку сильного виродження - коректну розв'язність неоднорідного рівняння з ваговою початковою умовою, якщо виродження не дуже сильне, і без початкової умови в протилежному випадку.

Наведемо результати про про розв'язність задачі Коші для рівняння (1.2) у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині.

Означимо сімейства банахових просторів $L_p^{\vec{\kappa}(t,\vec{a})}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$, функцій, швидко зростаючих з ростом просторових змінних. Еволюція розв'язків рівняння (1.2) буде характеризуватися належністю їх до цих просторів. Наведемо означення як указаних, так і інших просторів, які далі використовуватимуться. Для цього введемо такі набори функцій, визначених для $t \in [0,T]$:

$$\vec{\kappa}(t,\vec{a}) := (\kappa_1(t,a_1), \kappa_2(t,a_2), \kappa_3(t,a_3)),$$
$$\kappa_1(t,a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2b(T-B(T,t))}}{c_0 - a_1 p_1(T - B(T,t))},$$

$$\kappa_l(t,a_l) := \frac{c_0 a_l}{c_0 - a_l p_l(T - B(T,t))}, \quad l \in \{2,3\};$$

$$\vec{\hat{s}}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)), \quad \vec{s_l}(t) := (s_{l1}(t), \ldots, s_{ln_l}(t)), \quad l \in \{1,2,3\},$$

$$\hat{s}_{1j}(t) := \kappa_1(t,a_1) + 2\theta(n_2 - j)(\alpha_b(B(t,0)))^2 \kappa_2(t,a_2) +$$
$$+ 4\Big(\frac{\alpha_b(B(t,0)) - B(t,0)}{b}\Big)^2 \theta(n_3 - j)\kappa_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_1\},$$

$$\hat{s}_{2j}(t) := 2\kappa_2(t,a_2) + 4(B(t,0))^2\theta(n_3 - j)\kappa_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_2\},$$

$$\hat{s}_{3j}(t) := 4\kappa_3(t,a_3), \quad j \in \{1,\ldots,n_3\},$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (1.12), $\vec{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'-ємних чисел, що $p_l(T) < \dfrac{c_0}{a_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$.

Маємо

$$-c_0\frac{|e^{bB(t,0)}x_1 - \xi_1|^2}{p_1(B(t,0))} + \kappa_1(0,a_1)|\xi_1|^2 \leq \kappa_1(t,a_1)|x_1|^2,$$
$$-c_0\frac{|X_l(B(t,0)) - \xi_l|^2}{p_l(B(t,0))} + \kappa_l(0,a_l)|\xi_l|^2 \leq \kappa_l(t,a_l)|X_l(B(t,0))|^2,$$
$$l \in \{2,3\}, \quad t \in (0,T], \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.17}$$

Введемо вагові функції

$$\hat{\Phi}_\nu(t,\bar{t},x) := \exp\Big\{\ \nu\sum_{l=1}^{3}\kappa_l(t,a_l)|X_l(B(\bar{t},0))|^2\ \Big\}, \quad \hat{\Phi}_\nu(t,x) := \hat{\Phi}_\nu(t,t,x),$$

$$\hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\Big\{\ \nu\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\hat{s}_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2\ \Big\}, \ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Тоді на підставі (1.17) маємо

$$E_{c_0}(t,x;0,\xi)\,\hat{\Phi}_1(0,\xi) \leq \hat{\Phi}_1(t,x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

Поведінка при $|x| \to \infty$ функцій з означених нижче просторів описуватиметься функцією $\hat{\Phi}_\nu$ з $\nu \in \{-1,1\}$.

Нехай $p \in [1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна за x при довільному $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{\kappa}(t,\vec{a})} := \|u(t,\cdot)\hat{\Phi}_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{\hat{s}}(t)} := \|u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

На підставі означення точок X_l та функцій $\hat{s}_{lj}$, $j \in \{1, \cdots, n_l\}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, справджується нерівність

$$\sum_{l=1}^{3} \kappa_l(t, a_l) \, |X_l(B(t, 0))|^2 \leq \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} \hat{s}_{lj}(t) \, |x_{lj}|^2,$$

то $\hat{\Psi}_{-1}(t, x) \leq \hat{\Phi}_{-1}(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, й, отже,

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{\hat{s}}(t)} \leq \|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{\kappa}(t,\vec{a})}, \quad t \in [0, T], \;\; p \in [1, \infty]. \tag{1.19}$$

Зазначимо, що $\hat{s}_{1j}(t) \geq \kappa(0, a_1)$, $s_{lj}(t) > \kappa(0, a_l)$, $l \in \{2, 3\}$, $t \in [0, T]$, тому для $\varphi \in L_p^{\kappa(0,\vec{a})}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\vec{s}(t)} \leq \|\varphi\|_p^{\vec{\kappa}(0,\vec{a})}, \quad t \in [0, T], \quad p \in [1, \infty]. \tag{1.20}$$

ФРЗК для рівняння (1.2) G породжує інтеграл Пуассона функції φ

$$u(t, x) := (P\varphi)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.21}$$

Лема 1.1. *Якщо* $\varphi \in L_p^{\vec{\kappa}(0,\vec{a})}$, $p \in [1, \infty]$, *то для функції* (1.21) *справджується оцінка*

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{\kappa}(t,\vec{a})} \leq C\|\varphi\|_p^{\vec{\kappa}(0,\vec{a})}, \quad t \in (0, T]. \tag{1.22}$$

Лема 1.2. *Нехай* $\varphi \in L_p^{\vec{\kappa}(0,\vec{a})}$, $p \in [1, \infty]$. *Тоді для функції* (1.21) *при* $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t, \cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{\hat{s}}(t)} = 0, \tag{1.23}$$

а при $p = \infty \quad u_1(t, \cdot) \xrightarrow[t \to 0+]{сл} \varphi(\cdot)$, *тобто*

$$\forall \, \psi \in L_1^{-\vec{\hat{s}}(T)} : \; \lim_{t \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_1(t, x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x) dx. \tag{1.24}$$

Наведемо теорему про розв'язність задачі Коші для рівняння (1.2) у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині.

Теорема 1.1. *Для довільної функції* $\varphi \in L_p^{\vec{\kappa}(0,\vec{a})}$, $p \in [1,\infty]$ *формула* (1.21) *визначає єдиний розв'язок рівняння* (1.2) *в шарі* $\Pi_{(0,T]}$ *у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині, який має такі властивості: існує не залежна від* φ *стала* $C > 0$ *така, що для довільних* $t \in (0,T]$ *справджується нерівність* (1.22)*; при* $p \in [1,\infty)$ *виконується співвідношення* (1.23), *а при* $p = \infty$ $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0+]{сл} \varphi$, *тобто для довільних* ψ *відповідно з простору* $L_1^{-\vec{s}(T)}$ *правильні відповідно співвідношення* (1.24).

Наведемо твердження про інтегральні зображення розв'язків неоднорідного рівняння

$$Lu = f, \tag{1.25}$$

де Lu – вираз із (1.2), які як функції x є обмеженими, а при $t \to 0$ поводяться певним чином залежно від характеру виродження рівняння на початковій гіперплощині.

У наступних теоремах u – неперервний розв'язок в області $\Pi_{(0,T]}$ рівняння (1.25) з неперервною функцією f, причому u і f задовольняють додаткові умови, вказані у відповідних теоремах залежно від характеру виродження; $\|u(t,\cdot)\| := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |u(t,x)|$, $t \in (0,T]$; a і b – сталі з оцінок (1.12); φ – неперервна й обмежена функція в $\mathbb{R}^n$; G – ФРЗК для рівняння (1.2).

Теорема 1.2. *Якщо виконуються умови:*

1$_1$*)* $A(T,0) < \infty$,

2$_1$*)* $\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \quad \|u(t,\cdot)\| < C$,

3$_1$*)* $\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

4$_1$*)* $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\| \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$,

то правильне зображення

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi)\, d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.26}$$

Теорема 1.3. *Якщо виконуються умови:*

1₂) $A(T,0)=\infty,\ B(T,0)<\infty,$

2₂) $\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T]:\ \ \|u(t,\cdot)\|\,E^a(T,t)<C,$

3₂) $\lim\limits_{t\to 0}\Big(u(t,x)\,E^a(T,t)\Big)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$

4₂) $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\|\,E^a(T,\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}<\infty.$

Тоді справджується рівність

$$u(t,x):=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{1.27}$$

де

$$G_0(t,x;\xi):=\lim_{\tau\to 0}\Big(\ G(t,x;\tau,\xi)\,E^{-a}(T,\tau)\ \Big)\ . \tag{1.28}$$

Теорема 1.4. *За таких умов:*

1₃) $A(T,0)=\infty,\ B(T,0)=\infty,$

2₃) $\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T]:\ \ \|u(t,\cdot)\|\,E^{a,b}(T,t)<C,$

3₃) $\lim\limits_{t\to 0}\Big(u(t,x)\,E^{a,b}(T,t)\Big)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$

4₃) $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\|\,E^{a,b}(T,\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}<\infty$

є правильною формула

$$u(t,x):=\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Зауваження 1.3. Твердження, аналогічні теоремам 1.2 – 1.4, правильні також для розв'язків рівняння (1.25), які як функції x експоненціально зростають при $x\to\infty$ зі спеціальним типом зростання, залежним від часової змінної t.

1.2 Задача Коші для параболічних за Ейдельманом систем у негативних просторах Гельдера

У [14–16] побудовано спряжені оператори Гріна задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем першого порядку за часовою змінною, досліхджуються їх властивості у позитивних просторах Гельдера спеціально підібраних спадних функцій, за допомогою норм спряжених операторів у таких просторах вводяться негативні простори Гельдера, доводиться теорема про коректну розв'язність задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем першого порядку у введених негативних просторах Гельдера.

Розглянемо задачу Коші для параболічної за Ейдельманом системи N диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\Big(I_N\partial_t - \sum_{\|\alpha\|\le 2b} A_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha\Big)u(t,x) = f(t,x),\ (t,x)\in\Pi_T,$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.29}$$

де n, N, $b_1, \ldots, b_n$– задані натуральні числа, I_N – одинична матриця порядку N, b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $M := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$; $\partial_x^\alpha := (\partial_{x_1}^{\alpha_1}, \ldots, \partial_{x_n}^{\alpha_n})$, $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := (\partial_t^{\alpha_0}, \partial_x^\alpha)$; $u := \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_N)$ – невідома, $f := \mathrm{col}(f_1,\ldots,f_N)$, $\varphi := \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$ – задані вектор-функції; $\Pi_H := \{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}\,|t\in H, x\in\mathbb{R}^n\}$, якщо $H\subset\mathbb{R}$; T – задане додатне число.

Задачу (1.29) можна подати у вигляді

$$\mathcal{A}u = F,\ \ F = \mathrm{col}(f,\varphi).$$

Припускатимемо, що для (1.29) виконуються наступні умови.

А: *Система диференціальних рівнянь задачі* (1.29) *є рівномірно параболічна за Ейдельманом в шарі* Π_T*;*

Б: *Коефіцієнти системи задачі* (1.29) *обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за* x*, неперервні за* t*, при цьому неперервність за* t *коефіцієнтів* $A_\alpha(t,x)$*,* $\|\alpha\| = 2b$*, рівномірна відносно* $x\in\mathbb{R}^n$*.*

За умов **А** і **Б** існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (1.29) $\Gamma(t,x;\tau,\xi) = (\Gamma_{kj}(t,x;\tau,\xi))_{k,j=1}^N$, для якої є правильними оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma_{kj}(t,x;\tau,\xi)| \le C_{\overline{\alpha}}(t-\tau)^{1-(M-\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} \times E_c(t-\tau, x-\xi), \tag{1.30}$$

$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ \|\overline{\alpha}\| \le 2b, \{k,j\} \subset \{1,\dots,n\},$$

де $E_c(t,x) := \exp\{-c\sum\limits_{j=0}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\}$, $C_{\overline{\alpha}} > 0$, $c > 0$.

Означення 1.2. *Матрицею Гріна задачі Коші* (1.29) *називається матриця* $G := (G_0, G_1)$, *де* $G_0 := (G_0^{kj})_{k,j=1}^N, G_1 := (G_{11},\dots,G_{N1})$, $G_{j1} := (G_{j1}^k)_{k=1}^N$, $j \in \{1,\dots,N\}$, *така, що розв'язки* u *задачі* (1.29) *для довільних гладких і фінітних функцій* f *і* φ, *зображуються у вигляді*

$$u_k(t,x) = \sum_{j=0}^{N}\bigg(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t,x;\tau,\xi) f_j(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{j1}^k(t,x;\xi)\varphi_j(\xi)d\xi\bigg), \ (t,x) \in \Pi_T, k \in \{1,...,N\},$$

або

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

де $G_1 := (G_{11},...,G_{N1})$.

Відомо, що за умов **А** і **Б** елементи матриці Гріна G задачі Коші (1.29) мають вигляд

$$G_0(t,x;\tau,\xi) = \Gamma(t,x;\tau,\xi),$$

$$G_1(t,x;\xi) = \Gamma(t,x;\tau,\xi)|_{\tau=0}, \tag{1.31}$$

$$0 \le \tau < t \le T, \ \ \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо інтегральні оператори, ядрами яких є елементи матриці Гріна G_0 та G_1, вигляду

$$G_0 f = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \tag{1.32}$$

$$G_1 \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{1.33}$$

Оператори (1.32) і (1.33) називатимемо операторами Гріна задачі Коші (1.29).

Побудуємо оператори, спряжені до (1.32) і (1.33), для них повинні виконуватися такі умови

$$(G_0 f, g)_{L_2(\Pi_T)} = (f, G_0^* g)_{L_2(\Pi_T)},$$

$$(G_1 \varphi, g)_{L_2(\Pi_T)} = (\varphi, G_1^* g)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Позначимо через $G^* := (G_0^*, G_1^*)$ і називатимемо його оператором, спряженим до G. Таким чином, маємо

$$(G_0 f, g)_{L_2(\Pi_T)} = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} (G_0 f)'(t,x)\overline{g(t,x)}dtdx =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi \right)' \times \overline{g(t,x)}dtdx = \int\limits_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f'(\tau,\xi) \times$$

$$\times \overline{\left(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G_0'(t,x;\tau,\xi)} g(t,x) dx \right)} d\tau d\xi = (f, G_0^* g)_{L_2(\Pi_T)}.$$

Отже,

$$G_0^* g = \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G_0'(t,x;\tau,\xi)} g(t,x) dx. \tag{1.34}$$

Аналогічно

$$(G_1 \varphi, g)_{L_2(\Pi_T)} = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G_1(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi \right)' \overline{g(t,x)}dtdx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi'(\xi) \overline{\left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G_1'(t,x;\xi)} g(t,x) dtdx \right)} d\xi = (\varphi, G_1^* g)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отже,

$$G_1^* g = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G_1'(t,x;\xi)} g(t,x) dx. \tag{1.35}$$

Враховуючи (1.31), оператори (1.34) і (1.35) матимуть вигляд

$$G_0^* g(\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Gamma'(t,x;\tau,\xi)} g(t,x)dx, (\tau,\xi) \in \Pi_T, \tag{1.36}$$

$$G_1^* g(\xi) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Gamma'(t,x;0,\xi)} g(t,x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.37}$$

де штрих означає транспонування, а риска – комплексну спряженість.

Наведемо означення необхідних позитивних просторів Гельдера.

Нехай $T_1 > T$, $c_1 = c/2$, де c – стала з оцінок (1.30); l і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+^1$ і $(0,1)$; $\triangle_t^\tau f(t,\cdot) := f(t,\cdot) - f(\tau,\cdot)$; $\triangle_{x_j}^{y_j} f(\cdot,x) := f(\cdot,x) - f(\cdot,x(y_j))$, $x(y_j) := (x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\ldots,x_n)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Через $H_{c_1}^{l+\lambda}$ позначимо простір функцій $u : \Pi_T \to \mathbb{C}_{N1}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}$, $\|\overline{\alpha}\| \le l$, і мають скінченну норму

$$\|u\|_{c_1}^{l+\lambda} := \sum_{0 \le l - \|\overline{\alpha}\| \le 2b} \sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\\ t\neq\beta, x\in\mathbb{R}^n}} \Big(|\triangle_t^\beta \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| \times |t-\beta|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)} \times$$

$$\times (E_{c_1}(T_1 - t, x) + E_{c_1}(T_1 - \beta, x))^{-1} \Big) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \le l - \|\overline{\alpha}\| \le m_j} \sup_{\substack{(t,x)\in\Pi_T,\\ y_j\in\mathbb{R}, x_j \neq y_j}} \Big(|\triangle_{x_j}^{y_j} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| \times$$

$$\times |x_j - y_j|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_j} \times (E_{c_1}(T_1 - t, x) + E_{c_1}(T_1 - t, x(y_j)))^{-1} \Big) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l} \sum_{\|\overline{\alpha}\| = j} \sup_{(t,x)\in\Pi_T} \big(| \, \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| \times (E_{c_1}(T_1 - t, x))^{-1} \big).$$

$C_{c_1}^{l+\lambda}$ – простір функцій $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{N1}$, для яких існують неперервні похідні ∂_x^α, $\|\alpha\| \le l$, і є скінченною норма

$$|v|_{c_1}^{l+\lambda} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \le l - \|\alpha\| \le m_j} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ y_j\in\mathbb{R}, x_j\neq y_j}} \Big(|\triangle_{x_j}^{y_j} \partial_x^\alpha v(x)| \times |x_j - y_j|^{-(l-\|\alpha\|+\lambda)/m_j} \times$$

$$\times (E_{c_1}(T_1, x) + E_{c_1}(T_1, x(y_j)))^{-1} \Big) + \sum_{j=0}^{l} \sum_{\|\alpha\| = j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(| \, \partial_x^\alpha v(x)| \times (E_{c_1}(T_1, x))^{-1} \big).$$

$\overset{\circ}{H}{}_{c_1}^{l+\lambda}$ – сукупність функцій з простору $H_{c_1}^{l+\lambda}$, які задовольняють умову $\partial_t^{\alpha_0} u|_{t=T} = 0$, $\alpha_0 \in \{0, \dots, [(l+\lambda)/(2b)]\}$. $H^{l+\lambda}$ і $C^{l+\lambda}$ – простори Гельдера обмежених функцій.

З формул (1.36) і (1.37) видно, що $G_1^* g(\xi) = G_0^* g(0, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тому далі детальніше розглянемо властивості спряженого оператора G_0^*.

Теорема 1.5. *Оператор G_0^* обмежено діє з $\overset{\circ}{H}{}_{c_1}^{l-2b+\lambda}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{c_1}^{l+\lambda}$, $l \geq 2b$.*

Наведемо означення негативних просторів Гельдера. При цьому за позитивні простори візьмемо простори, в яких діють спряжені оператори. Для неперервних і обмежених функцій $u : \Pi_T \to \mathbb{C}_{N1}$ визначимо такі негативні норми

$$||u||^{-(l+\lambda)} := \sup_{g \in \dot{H}_{c_1}^{l+\lambda}} \frac{|(u, g)_{L_2(\prod_T)}|}{||g||_{c_1}^{l+\lambda}},$$

$$|u|_{t=0}|^{-(l+\lambda)} := \sup_{g \in C_{c_1}^{l+\lambda}} \frac{|[u|_{t=0}, g]_{L_2(\mathbb{R}^n)}|}{|g|_{c_1}^{l+\lambda}},$$

де

$$(u, g)_{L_2(\prod_T)} := \int\limits_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} u'(t, x) \overline{g(t, x)} dx,$$

$$[u|_{t=0}, g]_{L_2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} u'(0, x) \overline{g(x)} dx,$$

тут штрих означає транспонування, а риска – комплексну спряженість.

Через $H^{-(l+\lambda)}$ позначимо замикання простору $H^{2b+\lambda}$ функцій $u := col(u_1, ..., u_N)$ за нормою

$$|||u|||^{-(l+\lambda)} := \sum_{j=1}^N (||u_j||^{-(l+\lambda)} + |u_j|_{t=0}|^{-(l+2b+\lambda)}).$$

Для $-\infty < -(l+\lambda) < -2b$ через $\mathcal{H}^{-(l+\lambda)}$ позначимо замикання множини $H^\lambda \times C^{2b+\lambda}$ функцій $F := col(f_1, ..., f_N, \varphi_1, ..., \varphi_N)$, де $f_j \in H^\lambda, \varphi_j \in C^{2b+\lambda}, j \in \{1, ..., N\}$, за нормою

$$||F||_A^{-(l+\lambda)} := \sum_{j=1}^N \left(||f_j||^{-(l+\lambda)} + |\varphi_j|^{-(l+\lambda)} \right).$$

Теорема 1.6. *Нехай* A_α, $||\alpha|| \leq 2b$,*– обмежені та нескінченно диференційовні функції в* Π_T. *Тоді для кожного нецілого* s, $|s| > 2b$ *замикання за неперервністю оператора* A *здійснює гомеоморфізм між просторами* H^S *та* $\mathcal{H}^{s-2b}$.

2 ПРИНЦИП ЗВЕДЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ

2.1 Вступ

Починаючи з робіт А. Пуанкаре [18] та А. М. Ляпунова [19] дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь активно розвивається. При цьому центральне місце займає задача про принцип зведення, який полягає в тому, що дослідження стійкості вихідної системи зводиться до дослідження стійкості простішої системи, як правило, меншої розмірності. Детальний історичний огляд розвитку принципу зведення наведений в роботі О.Б. Ликової [20].

Застосування методу інтегральних многовидів в теорії стійкості активно розвивались в роботах В.А. Пліса [21], А. Келлі [22], А. М. Самойленка [23], Я.С. Баріса і О.Б. Ликової [24] та інших. Особливо ефективним виявився метод інтегральних многовидів для декомпозиції та дослідження стійкості сингулярно збурених систем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,z), \\ \varepsilon\frac{dz}{dt} &= g(t,x,z), \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, ε - малий додатний параметр.

Для системи (2.1) у роботах К.В. Задираки [25, 26] встановлено існування інтегрального многовиду повільних змінних

$$z = \phi(t,x) + \psi(t,x,\varepsilon) = h(t,x,\varepsilon), \tag{2.2}$$

де $\phi(t,x)$ – ізольований розв'язок рівняння $g(t,x,z) = 0$, а $\psi(t,x,\varepsilon)$ – неперервна обмежена функція, яка задовольняє по x умову Ліпшица.

На цьому інтегральному многовиді система (2.1) зводиться до регулярної підсистеми

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,h(t,x,\varepsilon)), \tag{2.3}$$

та одержано умови при виконанні яких справедливий принцип зведення: якісна поведінка розв'язків розв'язків вихідної системи (2.1) еквівалентна поведінці розв'язків регулярної підсистеми (2.3).

Подальші результати для дослідження декомпозиції та стійкості різних класів сингулярно збурених систем одержані в працях Є. Абеда [27], І.І. Клевчука [28], П.В. Кокотовіча, К. Кхаліла і О'Рейлі [29], В.А. Соболєва та В.В. Стригіна [30], І.М.Черевка [31], Е. Фрідман [32, 33] та інших.

Особливого значення має побудова точного чи наближеного інтегрального многовида, що визначається функцією $h(t, x, \varepsilon)$. Найпростіше ця задача розв'язується для лінійних сингулярно збурених систем, які будуть розглянуті в наступних пунктах.

2.2 Розщеплення та принцип зведення для двотемпових лінійних сингулярно збурених систем

2.2.1 Розщеплення системи і початкових умов

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By, \\ \varepsilon\dot{y} = Cx + Dy, \end{cases} \tag{2.4}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, A, B, C, D – сталі матриці розмірностей відповідно $n \times n, n \times m, m \times n, m \times m$, ε – малий додатній параметр.

Припустимо, що власні значення λ_k матриці D задовольняють нерівність

$$Re\lambda_k \leq -2\beta < 0. \tag{2.5}$$

Якщо виконується умова (2.5), тоді при достатньо малому ε існує невироджена заміна змінних

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & P \\ H & E + HP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

яка розщеплює систему (2.4) на дві незалежні підсистеми вигляду [34]

$$\begin{cases} \dot{w} = (A + BH)w, \\ \varepsilon\dot{u} = (D - \varepsilon HB)u, \end{cases} \tag{2.7}$$

де матриці H та P є обмеженими розв'язками систем рівнянь

$$\varepsilon H(A + BH) = (C + DH), \tag{2.8}$$

$$P(D - \varepsilon HB) = \varepsilon(A + BH)P + \varepsilon B. \tag{2.9}$$

Встановимо зв'язок між розв'язками систем (2.4) та (2.7).

Розглянемо для системи (2.4) задачу Коші з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Розв'язок цієї задачі можна представити через розв'язки рівнянь розщепленої системи (2.7) за допомогою таких рівностей

$$\begin{cases} x(t) = w(t) + P(\varepsilon)u(t), \\ y(t) = H(\varepsilon)w(t) + u(t) + H(\varepsilon)P(\varepsilon)u(t). \end{cases} \tag{2.10}$$

Перепишемо (2.10) у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = w(t) + \phi_1(t, \varepsilon), \\ y(t) = H(\varepsilon)w(t) + \phi_2(t, \varepsilon), \end{cases} \tag{2.11}$$

де $\phi_1(t, \varepsilon) = P(\varepsilon)u(t)$, $\phi_2(t, \varepsilon) = u(t) + H(\varepsilon)P(\varepsilon)u(t)$,
$w(t)$ – розв'язок рівняння

$$\dot{w}(t) = (A + BH(\varepsilon))w(t), \tag{2.12}$$

який задовольняє початкову умову

$$\begin{aligned} w(t_0) = w_0 = x_0 + P(\varepsilon)H(\varepsilon)x_0 - P(\varepsilon)y_0 = \\ = x_0 + P(\varepsilon)(H(\varepsilon)x_0 - y_0), \end{aligned} \tag{2.13}$$

$u(t)$ – розв'язок рівняння

$$\varepsilon\dot{u}(t) = (D - \varepsilon H(\varepsilon)B)u(t), \tag{2.14}$$

який задовольняє початкову умову

$$u(t_0) = u_0 = -H(\varepsilon)x_0 + y_0. \tag{2.15}$$

Таким чином, якщо вибрати за початкову умову точку (x_0, y_0) на многовиді $y(t) = H(\varepsilon)x(t)$, то очевидно, що $u_0 = 0$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ і відповідно $x(t) = w(t)$, $y(t) = H(\varepsilon)w(t)$ – розв'язок, траєкторія якого лежить на цьому многовиді.

Знайти точний вигляд матриць $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$, що визначають розщеплююче перетворення, вдається тільки у найпростіших випадках, тому представляє інтерес виписати розщеплені системи при наближеному знаходженні цих матриць і дослідити точність знаходження наближень розв'язків вихідної системи (2.4).

Застосовуючи теорему про неявну функцію, можна показати, що розв'язок рівняння (2.8) можна шукати у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра [35, 36]

$$H(\varepsilon) = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots. \tag{2.16}$$

Підставивши співвідношення (2.16) в рівняння (2.8) і враховуючи, що згідно нерівності (2.5) матриця D - невироджена, можна знайти для коефіцієнтів $H_i, i = 0, 1, \dots$ відповідні рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} &H_0 = -D^{-1}C, \\ &H_i = D^{-1}\Bigg(H_{i-1}A + \sum_{j=0}^{i-1} H_j B H_{i-1-j}\Bigg),\ i = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Розв'язок (2.9) також можна шукати у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра

$$P(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots. \tag{2.17}$$

Підставивши (2.17) в рівняння (2.9) знаходимо для коефіцієнтів $P_i, i = 0, 1, \dots$ співвідношення

$$\begin{aligned} &P_0 = 0, \qquad P_1 = BD^{-1}, \\ &P_i = \big((A + BH)P_i + P_i HB\big)D^{-1},\ i = 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Обчислюючи нульові та перші наближення $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$ і обмежуючись ними в задачах (2.12)-(2.13) та (2.14)-(2.15) дістанемо наближення для розщепленої системи. При врахуванні нульових наближень $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$, маємо

$$\begin{cases} \dot{w} = (A - BD^{-1}C)w, \\ \varepsilon\dot{u} = (D + \varepsilon D^{-1}CB)u. \end{cases}$$

$$w_0 = x_0 + P_0H_0x_0 - P_0y_0 = x_0,$$
$$u_0 = -H_0x_0 + y_0 = D^{-1}Cx_0 + y_0.$$

При врахуванні нульових і перших наближень $H(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$, дістаємо

$$\begin{cases} \dot{w} = \Big(A + B\big(- D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}(-D^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C)\big)\Big)w, \\ \varepsilon\dot{u} = \Big(D - \varepsilon\big(D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}(-d^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C)\big)\Big)u. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w_0 =& x_0 + \varepsilon BD^{-1}\Big(\big(- D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}(-D^{-1}CA+ \\ &+ D^{-1}CBD^{-1}C)\big)x_0 - y_0\Big), \\ u_0 =& - \big(- D^{-1}C + \varepsilon D^{-1}(-D^{-1}CA + D^{-1}CBD^{-1}C)\big)x_0 + y_0. \end{aligned}$$

2.2.2 Принцип зведення

За допомогою розщеплюючого перетворення вихідна система (2.4) зводиться до двох незалежних підсистем вигляду (2.7).

Нехай $(x(t), y(t))$ розв'язок системи (2.4) з початковими умовами $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Покажемо, що існує такий розв'язок $(u(t), w(t))$ системи (2.7) з початковими умовами $(t_0, u_0, w_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, що для всіх $t \geq t_0$ справджуються рівності вигляду (2.10). В силу єдиності розв'язку задачі Коші достатньо буде показати, що рівності (2.10) мають місце для $t = t_0$.

Підставляючи в (2.10) $t = t_0$, дістанемо

$$\begin{aligned} x_0 &= w_0 + Pu_0, \\ y_0 &= u_0 + Hx_0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Розв'язуючи систему (2.18), маємо

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 - Hx_0, \\ w_0 &= x_0 - P(y_0 - Hx_0). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Отже, кожний розв'язок $(x(t), y(t))$ системи (2.4) може бути представлений у вигляді (2.10), де $(u(t), w(t))$ – розв'язок системи (2.7) з початковими умовами (2.19).

Розглянемо рівності (2.10). Враховуючи умову (2.5) маємо оцінки [37]

$$\begin{aligned} &\left|P(\varepsilon)u(t)\right| \leq K_1 e^{-\frac{\mu}{2\varepsilon}(t-t_0)}|u_0|, \\ &\left|u(t) + H(\varepsilon)P(\varepsilon)u(t)\right| \leq K_2 e^{-\frac{\mu}{2\varepsilon}(t-t_0)}|u_0|, \end{aligned} \tag{2.20}$$

де $K_1 > 0, K_2 > 0$. Із оцінок (2.20) випливає принцип зведення для дослідження стійкості нульового розв'язку системи (2.4).

Теорема 2.1. *Нехай справджується умова* (2.5). *Тоді при достатньо малих ε нульовий розв'язок системи* (2.4) *стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок рівняння*

$$\dot{w} = (A + BH)w \tag{2.21}$$

стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий).

Застосування теореми 2.1 на практиці є затрудненим, оскільки потрібно знайти точний вираз для матриці H, що визначає інтегральний многовид повільних змінних.

Розглянемо можливість використання наближеного інтегрального многовиду в задачі про стійкість нульового розв'язку системи (2.4).

Поряд із рівнянням (2.21) розглянемо рівняння

$$\dot{w} = (A + BH_0)w, \tag{2.22}$$

де H_0 – нульовий член асимптотичного розкладу інтегрального многовиду $y(t) = H(\varepsilon)x(t)$, який визначається співвідношенням

$$H_0 = -D^{-1}C.$$

Нехай нульовий розв'язок рівняння (2.22) експоненціально стійкий, тобто фундаментальна матриця цього рівняння $W(t, t_0)$ задовольняє нерівність

$$\left|W(t, t_0)\right| < Ke^{-\beta(t-t_0)}, \beta > 0, K > 0, t \geq t_0. \tag{2.23}$$

Перепишемо рівняння (2.21) у вигляді

$$\dot{w} = (A + BH_0)w + B(H - H_0)w.$$

Із нерівності (2.23) та співвідношення

$$w(t) = W(t, t_0)w(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t, s)B(H - H_0)w(s)ds$$

випливає оцінка

$$\big|w(t)\big| \le Ke^{-\beta(t-t_0)}\big|w(t_0)\big| + \int_{t_0}^{t} Ke^{-\beta(t-s)}M|H - H_0||w(s)|ds. \tag{2.24}$$

Із зображення (2.16) дістаємо, що існує таке $\overline{\varepsilon}$, що для всіх $0 < \varepsilon \le \overline{\varepsilon}$ має місце оцінка [37]

$$\big|H - H_0\big| < \frac{\beta}{2KM}.$$

Тоді оцінку (2.24) можна переписати у вигляді

$$\big|w(t)\big| \le Ke^{-\beta(t-t_0)}\big|w(t_0)\big| + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{2}e^{-\beta(t-s)}|w(s)|ds. \tag{2.25}$$

Домножимо (2.25) справа на $e^{\beta(t-t_0)}$

$$e^{\beta(t-t_0)}\big|w(t)\big| \le K\big|w(t_0)\big| + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta}{2}e^{\beta(s-t_0)}|w(s)|ds. \tag{2.26}$$

Застосовуючи до (2.26) нерівність Гронуолла-Беллмана [38], отримаємо

$$e^{\beta(t-t_0)}\big|w(t)\big| \le K\big|w(t_0)\big|e^{\frac{\beta}{2}(t-t_0)},$$

$$\big|w(t)\big| \le K\big|w(t_0)\big|e^{-\frac{\beta}{2}(t-t_0)}. \tag{2.27}$$

Отже, нульовий розв'язок рівняння (2.21) експоненціально стійкий при $0 < \varepsilon \le \overline{\varepsilon}$.

З нерівності (2.27) випливає наступна теорема.

Теорема 2.2. *Нехай нульовий розв'язок системи, виродженої для* (2.4) *(при* $\varepsilon = 0$*) і укороченого рівняння* $\varepsilon\dot{y} = Dy$ *експоненціально стійкі. Тоді при достатньо малих* ε *нульовий розв'язок вихідної системи* (2.4) *також експоненціально стійкий.*

2.3 Декомпозиція та стійкість лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами

2.3.1 Декомпозиція

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2, \\ \varepsilon_1\dot{x}_1 = A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 = A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \end{cases} \tag{2.28}$$

в області $\Omega = \{(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : t \in \mathbb{R}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\}$, де $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $A_{ij} = A_{ij}(t),\ i, j = \overline{0, 2}$, – матриці розмірностей $n_i \times n_j$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малі додатні параметри.

Припустимо, що для системи (2.28) справджуються умови:

1) матриці $A_{ij}(t),\ i, j = \overline{0, 2}$, рівномірно обмежені за нормою для $t \in \mathbb{R}$ додатною сталою M.

2) власні значення $\lambda_i = \lambda_i(t),\ i = \overline{1, n_2}$, матриці $A_{22}(t)$ задовольняють нерівність

$$Re\lambda_i \leq -2\beta < 0.$$

Здійснимо в системі (2.28) заміну змінних

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w, \\ x_1 &= y_1 + \varepsilon_2 H_1 w, \\ x_2 &= w + P_0 x_0 + P_1 x_1, \end{aligned} \tag{2.29}$$

де H_0, H_1, P_0, P_1 матричні функції відповідних розмірностей.

Якщо матриці P_0 і P_1 та H_0 і H_1 вибрати як розв'язки систем рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0 = A_{20} + A_{22}P_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{00} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} P_0 - \\ \qquad - \varepsilon_2 P_1 A_{10} - \varepsilon_2 P_1 A_{12} P_0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_1 = A_{21} + A_{22}P_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{01} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} P_1 - \\ \qquad - \varepsilon_2 P_1 A_{11} - \varepsilon_2 P_1 A_{12} P_1, \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{00}H_0 + \varepsilon_2 A_{01}H_1 + A_{02}(E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \\ \qquad + \varepsilon_2 P_1 H_1) - H_0(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}), \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{10}H_0 + \varepsilon_2 A_{11}H_1 + A_{12}(E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \\ \qquad + \varepsilon_2 P_1 H_1) - H_1(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}), \end{cases} \tag{2.31}$$

тоді система (2.28) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= B_{00}y_0 + B_{01}y_1, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 &= B_{10}y_0 + B_{11}y_1, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} &= B_{22}w. \end{aligned} \tag{2.32}$$

де $B_{ij} = A_{ij} + A_{i2}P_j$, $i, j = 0, 1$,
$B_{22} = A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}$.

Припустимо, що для системи (2.28) ми розв'язуємо задачу Коші з початковими умовами $(t_0, x_{00}, x_{10}, x_{20})$. Покажемо, що існує розв'язок системи (2.32) з початковими умовами $(t_0, x_{00}, x_{10}, x_{20})$, для якого справджуються рівності (2.29). В силу єдиності розв'язку достатньо показати, що рівності (2.29) мають місце при $t = t_0$, тобто

$$\begin{aligned} x_{00} &= y_{00} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^0 w_0, \\ x_{10} &= y_{10} + \varepsilon_2 H_1^0 w_0, \\ x_{20} &= w_0 + P_0^0 x_{00} + P_1^0 x_{10}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Із системи рівнянь (2.33) дістаємо

$$\begin{aligned} w_0 &= x_{20} - P_0^0 x_{00} - P_1^0 x_{10}, \\ y_{10} &= x_{10} - \varepsilon_2 H_1^0(x_{20} - P_0^0 x_{00} - P_1^0 x_{10}), \\ y_{00} &= x_{00} - \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^0(x_{20} - P_0^0 x_{00} - P_1^0 x_{10}). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Отже, кожний розв'язок системи (2.28) може бути представлений у вигляді (2.29), де y_0, y_1, w – розв'язок системи (2.32) з початковими умовами (2.34).

Представимо цей розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ x_1 &= x_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ x_2 &= x_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = P_0 y_0(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + P_1 y_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \varphi_3(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{aligned} \tag{2.35}$$

де

$$\varphi_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^0 w_0,$$

$$\varphi_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_2 H_1^0 w_0,$$

$$\varphi_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = w + P_0\varphi_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + P_1\varphi_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2).$$

2.3.2 Розщеплення та принцип зведення

Позначимо $Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ фундаментальну матрицю рівняння

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 = A_{22}x_2.$$

Рівномірна обмеженість матриці A_{22} в області Ω і умова 2) забезпечує оцінку [35, 30, 36]

$$\|Q(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\| \le Ke^{-\frac{3\beta}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}(t-s)}, \tag{2.36}$$

для деякого $K>0$ при будь-яких $-\infty < s \le t < \infty$.

Крім того, якщо справджуються умови 1) - 2) тоді для фундаментальної матриці $\overline{Q}(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ рівняння

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = \big(A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}\big)w \tag{2.37}$$

справедлива оцінка

$$\left|\overline{Q}(t,s,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right| \le Ke^{-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}}. \tag{2.38}$$

Із обмеженості матриць H_0, H_1 та оцінки (2.38) одержуємо, що існує додатне число N, що при $t \ge t_0$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)| &\le \varepsilon_1\varepsilon_2 N e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(t-t_0)}|w_0|,\\ |\varphi_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)| &\le \varepsilon_2 N e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(t-t_0)}|w_0|,\\ |\varphi_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)| &\le N e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(t-t_0)}|w_0|. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Із одержаних співвідношень (2.35) та оцінок (2.39) одержуємо, що система (2.28) має інтегральний многовид

$$x_2 = P_0x_0 + P_1x_1,$$

рух на якому описується підсистемою із перших двох рівнянь системи (2.32)

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = B_{00}y_0 + B_{01}y_1, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 = B_{10}y_0 + B_{11}y_1. \end{cases} \tag{2.40}$$

Будь який розв'язок системи (2.28) представляється у вигляді суми деякого розв'язку, що лежить на інтегральному многовиді та експоненціально спадних доданків. Із представлення (2.35) та оцінок (2.39) дістаємо твердження для дослідження стійкості нульового розв'язку системи (2.28).

Теорема 2.3. *Нехай справджуються умови 1) - 2). Тоді при достатньо малих* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *нульовий розв'язок системи* (2.28) *стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок підсистеми* (2.40) *стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий).*

Розглянемо тепер систему (2.40).

Нехай справджується умова:

3) власні значення $\lambda_i = \lambda_i(t),\ i = 0, 1, \dots,$ матриці $B_{11}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ задовольняють нерівність
$$Re\lambda_i \le -2\gamma < 0.$$

Тоді існує $\varepsilon_1^* > 0$ таке, що для $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ заміна змінних [36, 39]

$$\begin{cases} y_0 = u + \varepsilon_1 H(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)v, \\ y_1 = v + P(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)y_0 \end{cases} \tag{2.41}$$

розщеплює систему (2.40) на незалежні підсистеми

$$\begin{cases} \dot{u} = (B_{00} + B_{01})Hu, \\ \varepsilon_1\dot{v} = (B_{11} - \varepsilon_1 HB_{01})v. \end{cases} \tag{2.42}$$

Матричні функції P і H є рівномірно обмеженими розв'язками таких рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_1\dot{P} = \varepsilon_1(B_{00} + B_{01}H)P + B_{01} - P(B_{11} - \varepsilon_1 HB_{01}), \\ \varepsilon_1\dot{H} = B_{10} + B_{11}H - \varepsilon_1 H(B_{00} - B_{01}H). \end{cases}$$

У системі (2.42) перше рівняння описує поведінку системи (2.40) на інваріантному многовиді повільних змінних, а друге рівняння забезпечує поведінку системи (2.40) на інваріантному многовиді швидких змінних.

Із представлення (2.41) при виконанні умови 3) в [36, 39] встановлено, що стійкість системи (2.40) є еквівалентною стійкості першого рівняння системи (2.42).

Підсумуємо наведені міркування у вигляді принципу зведення для дослідження стійкості нульового розв'язку вихідної системи (2.28).

Теорема 2.4. *Нехай справджуються умови 1), 2), 3). Тоді при достатньо малих значеннях $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ нульовий розв'язок системи* (2.28) *стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок рівняння*

$$\dot{u}(t) = (B_{00} + B_{01}H)\,u$$

стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий).

Приклад 2.1. В якості прикладу застосування побудови розщеплюючого перетворення та застосування принципу зведення розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x_0} = x_0 + x_1 + x_2, \\ \varepsilon_1 \dot{x_1} = x_0 + x_1 + x_2, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{x_2} = -x_0 - x_1 - x_2. \end{cases} \tag{2.43}$$

Зробимо в системі (2.43) заміну змінних

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 h_0 w, \\ x_1 &= y_1 + \varepsilon_2 h_1 w, \\ x_2 &= w + p_0 x_0 + p_1 x_1. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Для знаходження коефіцієнтів p_0, p_1, h_0, h_1, врахувавши стаціонарність та вигляд системи (2.43), із співвідношень (2.30) та (2.31) отримаємо наступні системи рівнянь:

$$\begin{cases} -1 - p_0 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 p_0 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 p_0^2 - \varepsilon_2 p_1 - \varepsilon_2 p_0 p_1 = 0, \\ -1 - p_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 p_0 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 p_0 p_1 - \varepsilon_2 p_1 - \varepsilon_2 p_1^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0(-1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2)=1, \\ h_1(-1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2)=1. \end{cases}$$

Знаходячи обмежені розв'язки цих систем, дістаємо

$$p_0 = p_1 = -1, \quad h_0 = h_1 = \frac{1}{-1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2}.$$

Таким чином, заміна змінних (2.44) набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{-1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2}w, \\ x_1 &= y_1 + \frac{\varepsilon_2}{-1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2}w, \\ x_2 &= w - x_0 - x_1. \end{aligned}$$

При цьому система (2.43) розщеплюється на систему незалежних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = 0, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 = 0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (-1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2)w. \end{cases} \tag{2.45}$$

Згідно теореми 2.4 стійкість нульового розв'язку системи (2.43) еквівалентна стійкості нульового розв'язку першого рівняння системи (2.45). Отже, на основі принципу зведення можна зробити висновок, що нульовий розв'язок системи (2.43) є стійким, але не асимптотично.

Результати розділу 2 опубліковані в [34, 40–44].

3 ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть виникати складні просторові структури. У системах нелінійних гіперболічних рівнянь досліджено існування зліченного числа циклів, а у системах параболічних рівнянь з малою дифузією – існування як завгодно великої кількості циклів (феномен буферності). Динаміка таких процесів досліджувалася у роботах А.Ю. Колєсова, Ю.С. Колєсова, Є.Ф. Міщенка, М.Х. Розова, В.А. Садовнічого, А.М. Самойленка, Є.П. Бєлана та інших. Такі математичні моделі описують складні фізичні явища.

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [45 – 55]. У цьому розділі досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією, рівняння брюсселятора із малою дифузією, рівняння спінового горіння із запізненням та диференціально-функціональних параболічних систем із малою дифузією. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [52 – 58].

3.1 Існування та стійкість біжучих хвиль у параболічних системах із малою дифузією

Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння брюсселятора із малою дифузією.

3.1.1 Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією

Дослідимо біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + (d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + (d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2) \quad (3.1)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x), \quad u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \qquad (3.2)$$

де ε – малий додатний параметр, $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$.

Перейшовши до комплексних змінних $u = u_1 + iu_2$, $\bar{u} = u_1 - iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u}. \qquad (3.3)$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (3.1), (3.2). Розв'язок рівняння (3.3) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d\theta_1}{dy} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}. \qquad (3.4)$$

Інтегральний многовид системи (3.4) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \dots .$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \dots . \qquad (3.5)$$

Перейшовши у рівнянні (3.5) до полярних координат, $\theta = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (3.6)$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \dfrac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (3.6) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (3.5) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0 \exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (3.3) має вигляд

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon), \tag{3.7}$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (3.1), (3.2) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad u_2 = \sqrt{\varepsilon}r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.1), (3.2) має періодичні відносно t розв'язки (3.8).*

3.1.2 Стійкість періодичних розв'язків

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (3.7) рівняння (3.3) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)v\right] + \varepsilon(d_0 + ic_0)(3.2r_n^2 v + w_n^2\bar{v}), \tag{3.9}$$

де $w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$. Зробивши в рівнянні (3.9) заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$, одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\Bigg[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w +$$

$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(3.2inx))\Bigg]. \tag{3.10}$$

Розв'язок рівняння (3.10) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{3.11}$$

Підставляючи (3.11) в (3.10) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+$$

$$+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \tag{3.12}$$

Аналогічно підставляючи (3.11) у спряжене до (3.10) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-$$

$$-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \tag{3.13}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (3.1), (3.2) визначається стійкістю системи (3.12), (3.13) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (3.12), (3.13) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2, \tag{3.14}$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 3.2. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (3.1), (3.2) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.14) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (3.1), в якому $\delta = 0$, $\beta = 0$, $c_0 = 0$. Тоді з теореми 3.1 випливає, що при $d_0 < 0$, $\gamma n^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - \gamma n^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + nx) \\ \sin(\omega_0 t + nx) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 3.2 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6\gamma}(\gamma + 2\alpha)$.

3.1.3 Дослідження загальної параболічної системи із малою дифузією

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u) \tag{3.15}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t,x), \tag{3.16}$$

де ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u,v)$ чотири рази неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0,0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$, тут a і b – власні вектори матриць A_0 і A_0^* відповідно, для яких $(a,b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = diag(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

У системі (3.15) зробимо заміну $u = av + \bar{a}\bar{v}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, та враховуючи, що $(a,b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, одержимо

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon b^* D \frac{\partial^2 (av + \bar{a}\bar{v})}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1 (av + \bar{a}\bar{v}) + b^* F(av + \bar{a}\bar{v}). \tag{3.17}$$

Нехай

$$b^*F(av+\bar{a}\bar{v}) = \sum_{2\le i+j\le 3} f_{ij}\frac{v^i\bar{v}^j}{i!j!} + O(|v|^4).$$

У рівнянні (3.17) зробимо заміну

$$v = \xi + \sum_{2\le i+j\le 3} \chi_{ij}\xi^i\bar{\xi}^j,$$

де $\chi_{21}=0$, так, щоб звести його до нормальної форми

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = i\omega_0\xi + \varepsilon b^* D\frac{\partial^2(a\xi+\bar{a}\bar{\xi})}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1(a\xi+\bar{a}\bar{\xi}) + c_1\xi|\xi|^2\ldots. \tag{3.18}$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. При цьому для c_1 одержимо вираз

$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0}\left(f_{20}f_{11} - 2|f_{11}|^2 - \frac{1}{3}|f_{02}|^2\right) + \frac{f_{21}}{2}.$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (3.15), (3.16). Розв'язок рівняння (3.18) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[b^* D\frac{d^2(a\theta+\bar{a}\bar{\theta})}{dy^2} + b^* A_1(a\theta+\bar{a}\bar{\theta})\right] + (d_0+ic_0)\theta^2\bar{\theta}\ldots, \tag{3.19}$$

де $c_1 = d_0+ic_0$, $\{d_0, c_0\}\subset\mathbb{R}$. Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy}=\theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1,\quad \sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[b^* D\frac{d(a\theta_1+\bar{a}\bar{\theta}_1)}{dy} + b^* A_1(a\theta+\bar{a}\bar{\theta})\right] + (d_0+ic_0)\theta^2\bar{\theta}\ldots. \tag{3.20}$$

Інтегральний многовид системи (3.20) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[b^* A_1(a\theta+\bar{a}\bar{\theta}) - \frac{\omega_0^2}{\sigma^2}b^* D(a\theta+\bar{a}\bar{\theta})\right] + \frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots.$$

Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[b^* A_1(a\theta+\bar{a}\bar{\theta}) - \frac{\omega_0^2}{\sigma^2}b^* D(a\theta+\bar{a}\bar{\theta})\right] + \frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots.$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta = p\exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma}y\right)$ і усереднимо одержане рівняння відносно y [46]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[(\alpha+i\beta)p - \frac{\omega_0^2}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)p\right] + \frac{d_0+ic_0}{\sigma}p^2\bar{p}, \tag{3.21}$$

де $\alpha + i\beta = b^*A_1a$, $\gamma + i\delta = b^*Da$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbb{R}$. Оскільки $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, то $\gamma = Re(b^*Da) = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \tau'(0) = Re(A_1a, b) > 0$.

Перейшовши у рівнянні (3.21) до полярних координат, $p = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right) r + \frac{d_0}{\sigma} r^3. \tag{3.22}$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \dfrac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (3.22) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon} R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (3.19) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon} R_0 \exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma} y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (3.18) має вигляд

$$\xi_n = \xi_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon), \tag{3.23}$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (3.15), (3.16) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon} r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx) + O(\varepsilon),$$

$$u_2 = \sqrt{\varepsilon} r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx) + O(\varepsilon), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.3. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.15), (3.16) має періодичні відносно t розв'язки (3.24).*

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (3.23) рівняння (3.18) має вигляд

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = i\omega_0\zeta + \varepsilon\left[b^*D\frac{\partial^2(a\zeta + \bar{a}\bar{\zeta})}{\partial x^2} + b^*A_1(a\zeta + \bar{a}\bar{\zeta})\right] + \varepsilon(d_0 + ic_0)(3.2r_n^2\zeta + w_n^2\bar{\zeta}), \tag{3.25}$$

де $w_n = r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$.

Зробивши в рівнянні (3.25) заміну $\zeta = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння вигляду (3.10), де $\alpha + i\beta = b^*A_1a$, $\gamma + i\delta = b^*Da$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbb{R}$.

Використовуючи методику доведення теореми 3.2, встановлюємо правильність наступного твердження.

Теорема 3.4. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (3.15), (3.16) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.14) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Для дослідження коливань брюсселятора із малою дифузією розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = A - (B+1)u_1 + u_1^2 u_2 + \varepsilon d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = Bu_1 - u_1^2 u_2 + \varepsilon d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \tag{3.26}$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x+2\pi) = u_1(t,x), \quad u_2(t, x+2\pi) = u_2(t,x),$$

де $B = 1 + A^2 + \varepsilon$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, ε – малий додатний параметр.

У системі (3.26) зробимо заміну $u_1 = y_1 + A$, $u_2 = y_2 + B/A$ і одержану систему зведемо до вигляду (3.17), де

$$b^* F(av + \bar{a}\bar{v}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} - A\right)(v+\bar{v})^2 + \frac{i}{2}\left(v^2 - \bar{v}^2\right) - \frac{1}{8}(v+\bar{v})^3 +$$
$$+ \frac{i}{8A}(v+\bar{v})^2 (v - \bar{v}) + O(\varepsilon),$$

$a_1 = A$, $a_2 = i - A$, $\overline{b_1} = \dfrac{i+A}{2iA}$, $\overline{b_2} = \dfrac{1}{2i}$.

Оскільки $f_{11} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{A} - A\right)$, $f_{02} = f_{11} - i$, $f_{20} = f_{11} + i$, $f_{21} = \dfrac{1}{4}\left(-3 + \dfrac{i}{A}\right)$, то згідно з біфуркаційними формулами знаходимо

$$c_1 = \frac{i}{2A}\left(f_{20} f_{11} - 2|f_{11}|^2 - \frac{1}{3}|f_{02}|^2\right) + \frac{f_{21}}{2} =$$
$$= -\left\{\frac{1}{4A^2} + \frac{1}{8} + i\left[\frac{1}{6A}\left(\frac{1}{A} - A\right)^2 + \frac{1}{24A}\right]\right\}.$$

Крім того, $\gamma = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Отже, якщо $1 > (d_1 + d_2)n^2$, то згідно з теоремою 3.3 періодичний розв'язок системи (3.26) можна записати у виляді $u_1 = A + z_1$, $u_2 = \dfrac{B}{A} - z_1 - \dfrac{1}{A} z_2$, де

$z_1 + iz_2 = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(At + nx)) + O(\varepsilon)$, $r_n^2 = \dfrac{4A^2}{A^2+2}\left(1 - (d_1 + d_2)n^2\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Умови стійкості можна одержати із нерівності (3.14).

3.2 Біфуркація автоколивань параболічних систем із запізненням аргументу та малою дифузією

3.2.1 Біжучі хвилі параболічних рівнянь із запізненням та малою дифузією

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, u(t-\Delta, x)) \tag{3.27}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{3.28}$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u, v)$ чотири рази неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0, 0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$, тут a і b – власні вектори матриць A_0 і A_0^* відповідно, для яких $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = diag(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (3.27), (3.28). Розв'язок системи (3.27) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = \varepsilon D \frac{d^2\theta}{dy^2} + A_0\theta + \varepsilon A_1 \theta + F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)).$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = \varepsilon D \frac{d\theta_1}{dy} + A_0\theta + \varepsilon A_1\theta + F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)). \tag{3.29}$$

Інтегральний многовид системи (3.29) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{1}{\sigma} A_0 \theta + \frac{\varepsilon}{\sigma^3} D A_0^2 \theta + \frac{\varepsilon}{\sigma} A_1 \theta + \frac{1}{\sigma} F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)) + \ldots .$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(3.27)$. Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sigma}A_0\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma^3}DA_0^2\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}A_1\theta + \frac{1}{\sigma}F(\theta, \theta(y-\sigma\Delta)) + \dots . \tag{3.30}$$

У системі (3.30) зробимо заміну $\theta = av + \bar{a}\bar{v}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, та враховуючи, що $(a, b) = 1$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, одержимо

$$\frac{dv}{dy} = i\frac{\omega_0}{\sigma}v - \frac{\varepsilon}{\sigma^3}\omega_0^2 b^* D(av + \bar{a}\bar{v}) + \frac{\varepsilon}{\sigma}b^* A_1(av + \bar{a}\bar{v}) +$$

$$+\frac{1}{\sigma}b^* F(av + \bar{a}\bar{v}, av(y-\sigma\Delta) + \bar{a}\bar{v}(y-\sigma\Delta)) + \dots . \tag{3.31}$$

Зробивши у рівнянні (3.31) заміну $v = w\exp\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right)$, одержимо

$$\frac{dw}{dy} = \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma^3}\omega_0^2 b^* D + \frac{\varepsilon}{\sigma}b^* A_1\right)\left(aw + \bar{a}\bar{w}\exp\left(-2i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right)\right) + \exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right) \times$$

$$\times F\Bigg(aw\exp\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right) + \bar{a}\bar{w}\exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right), aw(y-\sigma\Delta)\exp\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}(y-\sigma\Delta)\right) +$$

$$+\bar{a}\bar{w}(y-\sigma\Delta)\exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}(y-\sigma\Delta)\right)\Bigg) + \dots .$$

У цьому рівнянні перейдемо до нормальної форми, використовуючи властивості функції F, і замінимо w на $\sqrt{\varepsilon}w$ [50, 50]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\varepsilon}{\sigma^3}\omega_0^2 b^* Daw + \frac{\varepsilon}{\sigma}b^* A_1 aw + \frac{\varepsilon}{\sigma}(d_0 + ic_0)w^2\bar{w}. \tag{3.32}$$

Оскільки $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, то $Re(b^* Da) = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$. Зауважимо, що сталі d_0 та c_0 залежать від власного вектора a.

Перейшовши у рівнянні (3.32) до полярних координат, $w = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{\varepsilon}{2\sigma^3}\omega_0^2(d_1 + d_2)r + \frac{\varepsilon}{\sigma}\tau'(0)r + \frac{\varepsilon}{\sigma}d_0 r^3, \tag{3.33}$$

де $\tau'(0) = Re(A_1 a, b) > 0$. Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\tau'(0) > \dfrac{1}{2\sigma^2}\omega_0^2(d_1+d_2)$. Тоді рівняння (3.33) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{\left(\tau'(0) - \frac{1}{2\sigma^2}\omega_0^2(d_1+d_2)\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (3.31) має вигляд $v = \sqrt{\varepsilon}R_0 \exp\left(i\dfrac{\omega_0}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta = av + \bar{a}\bar{v}$ системи (3.30). Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок системи (3.27) має вигляд

$$u_n = \sqrt{\varepsilon}r_n(a \exp i\eta + \bar{a}\exp(-i\eta)) + O(\varepsilon), \tag{3.34}$$

де $r_n = \sqrt{\left(\tau'(0) - \dfrac{1}{2}(d_1+d_2)n^2\right)|d_0|^{-1}}$, $\eta = \omega_n(\varepsilon)t + nx$, $\omega_n(\varepsilon) = \omega_0 + O(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.5. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\tau'(0) > \dfrac{1}{2}(d_1+d_2)n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.27), (3.28) має періодичні відносно t розв'язки (3.34).*

3.2.2 Стійкість періодичних розв'язків

Система рівнянь у варіаціях в околі розв'язку $u_n(t,x)$ системи (3.27) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_0 v + \varepsilon A_1 v + \sqrt{\varepsilon}B_1(t,\varepsilon)v + \sqrt{\varepsilon}B_2(t,\varepsilon)v(t-\Delta, x). \tag{3.35}$$

У системі (3.35) зробимо заміну $v = aw + \bar{a}\bar{w}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Тоді одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon b^* D\frac{\partial^2(aw+\bar{a}\bar{w})}{\partial x^2} + i\omega_0 w + b^*(\varepsilon A_1 + \sqrt{\varepsilon}B_1(t,\varepsilon))(aw+\bar{a}\bar{w}) +$$
$$+\sqrt{\varepsilon}b^* B_2(t,\varepsilon)(aw(t-\Delta,x) + \bar{a}\bar{w}(t-\Delta,x)). \tag{3.36}$$

Зробивши в рівнянні (3.36) заміну $w = z\exp(i\omega_0 t)$ і використавши друге наближення в методі усереднення відносно t, одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon b^* Da\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1 az + \varepsilon(d_0 + ic_0)(3.2r_n^2 z + w_n^2\bar{z}), \tag{3.37}$$

де $w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $\beta = Im(A_1 a, b)$, $\delta = Im(Da, b)$. Заміною $z = u\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ рівняння (3.37) зведемо до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)u + (d_0 + ic_0)r_n^2(u + \overline{u}\exp(3.2inx))\right], \tag{3.38}$$

де $\gamma = Re(Da, b) = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \tau'(0) = Re(A_1 a, b)$.

Розв'язок рівняння (3.38) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx), \quad \overline{u}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{3.39}$$

Підставляючи (3.39) в (3.38) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \tag{3.40}$$

Аналогічно підставляючи (3.39) у спряжене до (3.38) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \tag{3.41}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (3.27), (3.28) визначається стійкістю системи (3.40), (3.41) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (3.40), (3.41) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(3.2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(3.2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді одержимо лінійну систему з матрицею $\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}$. Оскільки $\alpha - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2, \tag{3.42}$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 3.6. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (3.27), (3.28) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.42) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (3.27), в якому $D = diag(d,d)$, $d > 0$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = E$, E – одинична матриця, $F(u, u(t-\Delta, x)) = d_0(u_1^2 + u_2^2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma = d$, $\delta = 0$, $\alpha = 1$, $c_0 = 0$, тому з теореми 3.5 випливає, що при $d_0 < 0$, $n^2 < \dfrac{1}{d}$ існує періодичний розв'язок $u_n = \sqrt{\varepsilon(1-dn^2)|d_0|^{-1}} \times$ $\times \begin{pmatrix} \cos(t+nx) \\ -\sin(t+nx) \end{pmatrix}$. Згідно з теоремою 3.6 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6d}(d+2)$.

Зауваження 3.1. Умови існування та стійкості періодичних розв'язків задачі (3.27), (3.28) можна отримати із рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u},$$

яке одержується за допомогою усереднення.

3.2.3 Періодичні режими рівняння спінового горіння із запізненням

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon\left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} + F\left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi(t-\Delta, x), \frac{\partial \xi}{\partial t}(t-\Delta, x)\right)\right], \tag{3.43}$$

$$\xi(t, x+2\pi) = \xi(t,x), \tag{3.44}$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $\varrho > 0$, причому F – однорідний многочлен третього степеня, тобто $F(a\xi, ap, a\eta, a\zeta) = a^3 F(\xi, p, \eta, \zeta)$, $a \in \mathbb{R}$.

Задача (3.43), (3.44) еквівалентна системі

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \xi = 2\varepsilon\left[p + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F(\xi, p, \xi_\Delta, p_\Delta)\right], \tag{3.45}$$

$$\xi(t, x+2\pi) = \xi(t,x), \quad p(t, x+2\pi) = p(t,x),$$

де $\xi_\Delta = \xi(t-\Delta, x)$, $p_\Delta = p(t-\Delta, x)$.

Розв'язок системи (3.45) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta_1(y)$, $p = \theta_2(y)$, $y = \sigma t + x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \sigma\frac{d\theta_2}{dy}+\theta_1 = 2\varepsilon\left[\theta_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2\theta_2}{dy^2} + F(\theta_1, \theta_2, \theta_1(y-\sigma\Delta), \theta_2(y-\sigma\Delta))\right].$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta_2}{dy} = \theta_3$ зведемо до вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = \theta_3, \quad \sigma\theta_3 + \theta_1 =$$

$$= 2\varepsilon\left[\theta_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d\theta_3}{dy} + F(\theta_1, \theta_2, \theta_1(y-\sigma\Delta), \theta_2(y-\sigma\Delta))\right]. \tag{3.46}$$

Інтегральний многовид системи (3.46) можна зобразити у вигляді

$$\theta_3 = -\frac{1}{\sigma}\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2 + F(\theta_1, \theta_2, \theta_1(y-\sigma\Delta), \theta_2(y-\sigma\Delta))\right] + O(\varepsilon^2).$$

Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = -\frac{1}{\sigma}\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2 + \right.$$

$$\left. + F(\theta_1, \theta_2, \theta_1(y-\sigma\Delta), \theta_2(y-\sigma\Delta))\right] + O(\varepsilon^2). \tag{3.47}$$

Перейшовши до комплексних змінних $u = \theta_1 + i\theta_2$, $\bar{u} = \theta_1 - i\theta_2$, одержимо рівняння

$$\frac{du}{dy} = -\frac{i}{\sigma}u + \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[u - \bar{u} - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}(u-\bar{u}) + 2iF_1(u, \bar{u}, u(y-\sigma\Delta), \bar{u}(y-\sigma\Delta))\right] +$$

$$+ O(\varepsilon^2), \tag{3.48}$$

де $F_1(u, \bar{u}, u(y-\sigma\Delta), \bar{u}(y-\sigma\Delta)) = F\left(\frac{1}{2}(u+\bar{u}), \frac{i}{2}(\bar{u}-u), \frac{1}{2}(u(y-\sigma\Delta) + \bar{u}(y-\sigma\Delta)), \frac{i}{2}(\bar{u}(y-\sigma\Delta) - u(y-\sigma\Delta))\right)$.

Зробивши у рівнянні (3.48) заміну $u = w\exp\left(-\dfrac{i}{\sigma}y\right)$, одержимо рівняння

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[\left(1-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)\left(w - \bar{w}\exp\left(3.2\frac{i}{\sigma}y\right)\right) + 2i\exp\left(-\frac{i}{\sigma}y\right)\times$$

$$\times F_1\Bigg(w\exp\left(-\frac{i}{\sigma}y\right), \bar{w}\exp\left(\frac{i}{\sigma}y\right), w(y-\sigma_0)\exp\left(-\frac{i}{\sigma}(y-\sigma\Delta)\right), \bar{w}(y-\sigma\Delta)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{i}{\sigma}(y-\sigma\Delta)\right)\Bigg)\Bigg] + O(\varepsilon^2).$$

Виконавши усереднення в цьому рівнянні відносно y [50, 50], одержимо рівнянння

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[w - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}w + (d_0 + ic_0)w^2\bar{w}\right]. \tag{3.49}$$

Перейшовши у рівнянні (3.49) до полярних координат $w = r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[r - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}r + d_0r^3\right].$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\sigma^2\varrho^2 > 1$. Тоді рівняння (3.49) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{\left(1-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (3.48) має вигляд $u = R_0\exp\left(-\dfrac{i}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta_1 = R_0\cos\left(\dfrac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$, $\theta_2 = -R_0\sin\left(\dfrac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$ системи (3.47). Враховуючи, що функції θ_1 та θ_2 мають період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (3.43) має вигляд

$$\xi_n = r_n\cos(t + nx) + O(\varepsilon), \quad r_n = \sqrt{\left(1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}}, \tag{3.50}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.7. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.43), (3.44) має періодичні відносно t розв'язки (3.50), де $n \in \mathbb{Z}$.*

3.2.4 Стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння із запізненням

Система рівнянь у варіаціях в околі розв'язку $\xi = \xi_n(t,x)$, $p = \dfrac{\partial \xi_n(t,x)}{\partial t}$ системи (3.45) має вигляд

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 = 2\varepsilon\Bigg[v_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2 +$$
$$+ B_3(t)v_1(t-\Delta,x) + B_4(t)v_2(t-\Delta,x)\Bigg].$$

Перейшовши до комплексних змінних $v = v_1 + iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -iv + \varepsilon\left[v - \bar{v} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 (v-\bar{v})}{\partial x^2} + C_1(t)v + C_2(t)\bar{v} + C_3(t)v_\Delta + C_4(t)\bar{v}_\Delta\right].$$

де $v_\Delta = v(t-\Delta,x)$, $\bar{v}_\Delta = \bar{v}(t-\Delta,x)$. Зробивши заміну $v = w\exp(-it)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\left[w + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (d_0 + ic_0)(3.2r_n^2 w + u_n^2\bar{w})\right], \tag{3.51}$$

де $u_n = r_n\exp(i(\omega_n(\varepsilon)t + nx))$, $\omega_n(\varepsilon) = \varepsilon c_0 r_n^2$. Заміною $w = u\exp(i\omega_n(\varepsilon)t)$ рівняння (3.51) зведемо до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left[u + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (d_0 + ic_0)(r_n^2 u + r_n^2\bar{u}\exp(3.2inx)) + d_0 r_n^2 u\right]. \tag{3.52}$$

Розв'язок рівняння (3.52) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx), \quad \overline{u}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{3.53}$$

Підставляючи (3.53) в (3.52) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} =$$

$$= \varepsilon\left[(1+d_0 r_n^2)y_{k+n} - \frac{(k+n)^2}{\varrho^2}y_{k+n} + (d_0+ic_0)r_n^2(y_{k+n}+v_{k-n})\right]. \qquad (3.54)$$

Аналогічно підставляючи (3.53) у спряжене до (3.52) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} =$$

$$= \varepsilon\left[(1+d_0 r_n^2)v_{k-n} - \frac{(k-n)^2}{\varrho^2}v_{k-n} + (d_0-ic_0)r_n^2(v_{k-n}+y_{k+n})\right]. \qquad (3.55)$$

Стійкість періодичних розв'язків рівняння спінового горіння визначається стійкістю системи (3.54), (3.55) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через εA матрицю системи (3.54), (3.55) з елементами εa_{11}, εa_{12}, εa_{21}, εa_{22}. Матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості періодичного розв'язку $\xi_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = \dfrac{4c_0 nk}{|d_0|\varrho^2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}\right)$, тобто

$$\left(\frac{k^2}{\varrho^2} + 1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2 \left(\frac{k^2}{\varrho^2} + 2 - \frac{6n^2}{\varrho^2}\right) > \frac{4c_0^2 n^2}{\varrho^2 d_0^2}\left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2. \qquad (3.56)$$

Теорема 3.8. *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (3.43), (3.44) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.56) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (3.43) з нелінійністю $F = -\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t}\right)^3$. Тоді $d_0 = -1$, $c_0 = 0$, тому з теореми 3.7 випливає, що при $n^2 < \varrho^2$ існує періодичний розв'язок $\xi_n = \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}}\cos(t + nx) + O(\varepsilon)$. Згідно з теоремою 3.8 біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6}(3.2\varrho^2 + 1)$.

3.3 Біфуркація циклів диференціально-функціональних параболічних систем із малою дифузією

Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією на колі.

Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль, одержано біфуркаційні рівняння.

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Позначимо через u_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t + \theta, x)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$.

Розглянемо параболічну систему із запізнюючим аргументом та малою дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon) u_t + f(u_t, \varepsilon) \tag{3.57}$$

і періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{3.58}$$

де ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^n$, $L(\varepsilon) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ – лінійний неперервний оператор, $f : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор f п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів. Припустимо, що нульовий розв'язок рівняння (3.57) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий.

Поряд з (3.57) розглянемо лінійні рівняння

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L(\varepsilon) \tilde{u}_t, \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L(0) \tilde{u}_t. \tag{3.60}$$

Згідно з теоремою Рісса оператор $L(\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді інтеграла Стілтьєса

$$L(\varepsilon)\varphi = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, \varepsilon)] \varphi(\theta),$$

де матриця $\eta(\theta, \varepsilon)$ має обмежену варіацію відносно θ. Нехай $\eta(\theta, \varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε. Характеристичне рівняння для рівняння (3.59) має вигляд

$$det \Lambda_\varepsilon(\lambda) = 0,\ \Lambda_\varepsilon(\lambda) = \lambda I - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta, \varepsilon), \tag{3.61}$$

де I – одинична матриця. Припустимо, що рівняння (3.61) має одну пару коренів вигляду $\xi(\varepsilon) \pm i\zeta(\varepsilon)$, $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) > 0$, $\zeta(0) > 0$, а інші корені лежать у півплощині $Re\lambda \leq \lambda_0 < 0$.

Рівняння (3.57) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(0)u_t + F(u_t, \varepsilon), \tag{3.62}$$

де $F(u_t, \varepsilon) = \varepsilon D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t - L(0)u_t + f(u_t, \varepsilon)$. Позначимо через $\tilde{u}_t(\varphi)$ розв'язок рівняння (3.60) з початковою функцією $\varphi \in \mathbb{C}$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (3.60) співвідношенням $T(t)\varphi = \tilde{u}_t(\varphi)$. Сім'я $\{T(t), t \geq 0\}$ утворює сильно неперервну півгрупу. Твірний оператор півгрупи є оператором диференціювання $A\varphi(\theta) = \dfrac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, з областю визначення

$$D(A) = \{\varphi \in \mathbb{C}, \frac{d\varphi}{d\theta} \in \mathbb{C}, \frac{d\varphi(0)}{d\theta} = L(0)\varphi\}.$$

Позначимо через $\mathbb{P}$ власний підпростір в $\mathbb{C}$, породжений розв'язками рівняння (3.60), що відповідають кореням $\pm i\zeta(0)$. Розкладемо простір $\mathbb{C}$ в пряму суму $\mathbb{C} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$ – базис в $\mathbb{P}$. Розглядаючи спряжене до (3.60) рівняння, можна аналогічно визначити функцію $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \Delta$. Тоді кожний елемент $u_t \in \mathbb{C}$ можна зобразити у вигляді $u_t = \Phi y(t) + z_t$, де $y(t) = (\Psi, u_t)$, $z_t = u_t - \Phi y(t)$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$, $z_t \in \mathbb{Q}$, (Ψ, u_t) – деякий білінійний функціонал. Рівняння (3.57) еквівалентне системі рівнянь [45, 46]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = By + \Psi(0)F(\Phi y + z_t, \varepsilon),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F(\Phi y(s) + z_s, \varepsilon)ds.$$

Тут X_0^Q – проекція на підпростір Q функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leq \theta < 0$, $X_0(0) = I$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \zeta(0) \\ -\zeta(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно [46] можна довести існування функції $g : \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{Q}$, що задовольняє умови $g(0, \varepsilon) = 0$, $||g(y, \varepsilon) - g(y', \varepsilon)|| \leq \frac{1}{2}|y - y'|$ і такої, що множина $S_\varepsilon = \{(\varphi, \varepsilon)|\varepsilon \in [0, \varepsilon_0),\ \varphi = \Phi y + \vartheta,\ y \in \mathbb{R}^2,\ \vartheta = g(y, \varepsilon),\ \vartheta \in \mathbb{Q}\}$ є локальним інтегральним многовидом рівняння (3.62). Функція $g(y, \varepsilon)$ буде чотири рази неперервно диференційовною відносно y. Поведінка розв'язків рівняння (3.62) на інтегральному многовиді S_ε описується рівнянням

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv + \Psi(0)F(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon), \tag{3.63}$$

де $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Для кожного розв'язку $u_t = \Phi y(t) + z_t$ рівняння (3.62) існує розв'язок $\chi_t = \Phi v(t) + g(v(t), \varepsilon)$, що належить S_ε і такий, що правильна оцінка

$$||u_t - \chi_t|| \leq Ke^{-\nu t}, \quad K > 0, \quad \nu > 0.$$

У рівнянні (3.63) збережемо в лінійних доданках члени порядку $O(\varepsilon)$. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv + \varepsilon\Psi(0)D\Phi(0)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\Psi(0)\Phi v + \Psi(0)f(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon).$$

Перейшовши до комплексних змінних $w = v_1 + iv_2$, $\overline{w} = v_1 - iv_2$, одержимо рівняння вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} - i\zeta(0)w + \\ + \varepsilon(\alpha + i\beta)w + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{w} + W(w, \overline{w}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.64}$$

де

$$(\gamma + i\delta)w + (\gamma_1 + i\delta_1)\overline{w} = (1, i)\Psi(0)D\Phi(0)v, (\alpha + i\beta)w + (\alpha_1 + i\beta_1)\overline{w} = (1, i)\Psi(0)\times$$
$$\times L'(0)\Phi v,\ \alpha = \xi'(0),\ \beta = \zeta'(0), W(w, \overline{w}, \varepsilon) = (1, i)\Psi(0)f(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon).$$

Перетворимо рівняння (3.64) за допомогою підстановки

$$w = s + V_2(s, \overline{s}) + V_3(s, \overline{s}), \tag{3.65}$$

де V_2 і V_3 – форми відповідно другого і третього порядку. Перетворення (3.65) можна підібрати так, що рівняння для s набере вигляду

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{s}}{\partial x^2} - i\zeta(0)s +$$

$$+\varepsilon(\alpha+i\beta)s+\varepsilon(\alpha_1+i\beta_1)\overline{s}+(d_0+ic_0)s^2\overline{s}+\ldots \qquad (3.66)$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(3.57)$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (3.57), (3.58). Розв'язок рівняння (3.66) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $s=\theta(y)$, $y=\sigma t+x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy}=\varepsilon(\gamma+i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2}+\varepsilon(\gamma_1+i\delta_1)\frac{d^2\overline{\theta}}{dy^2}-i\zeta(0)\theta+$$

$$+\varepsilon(\alpha+i\beta)\theta+\varepsilon(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}+\ldots$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy}=\theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy}=\theta_1,\ \sigma\theta_1=\varepsilon(\gamma+i\delta)\frac{d\theta_1}{dy}+\varepsilon(\gamma_1+i\delta_1)\frac{d\overline{\theta}_1}{dy}-i\zeta(0)\theta+\varepsilon(\alpha+i\beta)\theta+$$

$$\varepsilon(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}+\ldots. \qquad (3.67)$$

Інтегральний многовид системи (3.67) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1=-\frac{\zeta(0)}{\sigma}i\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)\theta-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma_1+i\delta_1)\overline{\theta}+$$

$$+(\alpha+i\beta)\theta+(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}\Bigg]+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta}+\ldots.$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(3.57)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy}=-\frac{\zeta(0)}{\sigma}i\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)\theta-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma_1+i\delta_1)\overline{\theta}+$$

$$+(\alpha+i\beta)\theta+(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}\Bigg]+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta}+\ldots.$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta=p\exp\left(-\dfrac{\zeta(0)}{\sigma}iy\right)$ і усереднимо одержане рівняння відносно y [50]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)p+(\alpha+i\beta)p\right]+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}p^2\overline{p}. \qquad (3.68)$$

Перейшовши у рівнянні (3.68) до полярних координат $p = r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\varepsilon\frac{\zeta^2(0)\gamma}{\sigma^3}r + \varepsilon\frac{\alpha}{\sigma}r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \tag{3.69}$$

Нехай виконуються нерівності $\gamma > 0$, $d_0 < 0$, $\alpha\sigma^2 > \zeta^2(0)\gamma$. Тоді рівняння (3.69) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\zeta^2(0)\gamma}{\sigma^2}\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок системи (3.67) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(-\frac{\zeta(0)}{\sigma}iy\right) + O(\varepsilon)$, $\theta_1 = \frac{d\theta}{dy}$. Враховуючи, що функція θ повинна мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\frac{\zeta(0)}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (3.66) має вигляд

$$s_n = s_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)), \tag{3.70}$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = -\zeta(0) + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$. Звідси одержимо періодичний розв'язок задачі (3.57), (3.58)

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx). \tag{3.71}$$

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (3.70) рівняння (3.66) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\zeta(0)v + \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} +$$
$$+\varepsilon(\alpha + i\beta)v + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{v} + (d_0 + ic_0)(2\varepsilon r_n^2 v + s_n^2\overline{v}).$$

Зробивши заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w + (d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))]. \tag{3.72}$$

Розв'язок рівняння (3.72) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx), \quad \overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{3.73}$$

Підставляючи (3.73) в (3.72) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha+i\delta n^2+d_0r_n^2)y_{k+n}-(\gamma+i\delta)(k+n)^2y_{k+n}+(d_0+ic_0)r_n^2(y_{k+n}+v_{k-n})]. \tag{3.74}$$

Аналогічно підставляючи (3.73) у спряжене до (3.72) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha-i\delta n^2+d_0r_n^2)v_{k-n}-(\gamma-i\delta)(k-n)^2v_{k-n}+(d_0-ic_0)r_n^2(v_{k-n}+y_{k+n})]. \tag{3.75}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (3.57), (3.58) визначається стійкістю системи (3.74), (3.75) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (3.74), (3.75) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(2i\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(2i\delta kn)$. Тоді одержимо лінійну систему з матрицею $\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}$. Оскільки $\alpha - \gamma n^2 = -d_0r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0r_n^2-\gamma k^2)^2(\gamma^2k^2+\delta^2k^2-2\gamma d_0r_n^2-4\gamma^2n^2-2\delta c_0r_n^2) > 4\gamma^2n^2(c_0r_n^2-\delta k^2)^2. \tag{3.76}$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3.9. *Нехай $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.57), (3.58) має періодичні відносно t розв'язки (3.71), де $n \in \mathbb{Z}$. Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (3.76) при всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.*

Для наближеного знаходження циклів задачі (3.57), (3.58) досить обмежитися членами другого і третього порядку розкладу функції $\Psi(0)f(\Phi v + g(v,0),0)$ в ряд за степенями v. А для цього досить визначити члени другого порядку в розкладі функції $g(v,0)$. Перше наближення функції $g(v,0)$ має вигляд

$$g_1(v,0) = \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q f(\Phi e^{Bs}v, 0)ds.$$

Зобразимо функцію $f(\Phi y, 0)$ у вигляді $f(\Phi y, 0) = c_1 y_1^2 + c_2 y_1 y_2 + c_3 y_2^2 + O(|y|^3)$. Тоді знаходження функції $g_1(v, 0)$ зводиться до обчислення інтеграла

$$z = \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\omega s} ds,$$

де $\omega \in \{0, 2\zeta(0), -15\zeta(0)\}$. Зауважимо, що інтеграл z збіжний.

Теорема 3.10. *При довільних дійсних ω функція $z(\theta)$ належить $\mathbb{Q} \bigcap D(A)$ і виконується рівність*

$$i\omega z - Az = X_0^Q. \tag{3.77}$$

Для знаходження z потрібно розв'язати рівняння (3.77) відносно z. Це рівняння рівносильне такій системі

$$\frac{dz(\theta)}{d\theta} - i\omega z(\theta) = -X_0^Q(\theta),\ -\Delta \le \theta < 0, \tag{3.78}$$

$$\int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, 0)]z(\theta) - i\omega z(0) = -X_0^Q(0). \tag{3.79}$$

Можна показати [53], що система (3.78), (3.79) має єдиний розв'язок.

4 КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

4.1 Вступ

Дослідження крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь другого порядку розпочалося з праць А. Д. Мишкіса, Г. А. Каменського, Л. Г. Грімма та К. Шмідта, К. Неверса, в яких запропоновано їх класифікацію та одержано перші достатні умови існування розв'язків за допомогою принципу нерухомої точки Шаудера-Тихонова.

Для знаходження розв'язків крайових задач використовують проекційно-ітераційні та колокаційні методи, методи послідовних наближень і ряд числових алгоритмів. Відзначимо чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка, який успішно застосували М. І. Ронто, Д. І. Мартинюк, С. І. Трохимчук, Ю. В. Теплінський, І. І. Король та інші до різних класів крайових задач.

У даному розділі досліджуються лінійні та нелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків у залежності від структури відхилень аргументу. Встановлено достатні умови існування розв'язку таких задач, побудовано та обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку цих задач за допомогою апроксимації кубічними сплайнами дефекту два, досліджено збіжність ітераційного процесу.

Зокрема, у підрозділі 4.2 розглянуто лінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням, у підрозділі 4.3 – лінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Підрозділ 4.4 охоплює нелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу.

Результати досліджень даного розділу опубліковані в працях [59–71]

4.2 Лінійні крайові задачі з запізненням

4.2.1 Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x)\, y(x - \tau_i(x)) + b_i(x)\, y'(x - \tau_i(x)) \Big) + f(x), \tag{4.1}$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x),\ j = 0, 1,\ x \in [a^*; a],\ y(b) = \gamma, \tag{4.2}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x),\ i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 < i \le n} \left\{ \inf_{x \in [a;b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Нехай функції $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = \overline{0, n},\ f(x)$ – неперервні на $[a; b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_i = \big\{ x_j \in [a, b] : \ x_j - \tau_i(x_j) = a,\ j = 1, 2, \ldots \big\},$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x),\ i = \overline{1, n}$ – такі функції, що множини E_i, $i = \overline{1, n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = [a^*; a],\ I = [a, b],$$

$$I_1 = [a, x_1],\ I_2 = [x_1, x_2],\ \ldots,\ I_k = [x_{k-1}, x_k],\ I_{k+1} = [x_k, b],$$

$$B\big(J \cup I\big) = \Bigg\{ y(x) : y(x) \in \Bigg(C(J \cup I) \cap \Big(C^1(J) \cup C^1(I) \Big) \cap$$

$$\cap \Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \Bigg) \Bigg), |y(x)| \le P_1,\ |y'(x)| \le P_2 \Bigg\},$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.1)–(4.2) вважатимемо функцію $y = y\left(x\right)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.1) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (4.2). Будемо шукати розв'язок задачі (4.1)–(4.2), який належить простору $B(J \cup I)$.

Із означення простору $B(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.1)–(4.2) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a, b]$, де $y'\left(a\right)$ – права похідна.

Введемо норму в просторі $B(J \cup I)$:

$$\|y\|_B = \max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\left|y\left(x\right)\right|, \frac{2}{b-a}\max\left(\max_{x\in J}\left|y'\left(x\right)\right|, \max_{x\in I}\left|y'\left(x\right)\right|\right)\right\}.$$

Простір $B(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.1)–(4.2) еквівалентна інтегральному рівнянню [72,73]

$$y\left(x\right) = \int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s\right) y\left(s-\tau_i\left(s\right)\right) + \sum_{i=0}^{n} b_i\left(s\right) y'\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)\right]\times \tag{4.3}$$

$$\times\overline{G}\left(x,s\right)ds + l\left(x\right),\ x \in J\cup I,$$

$$\overline{G}\left(x,s\right) = \begin{cases} G\left(x,s\right), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

$$l\left(x\right) = \begin{cases} \varphi\left(x\right), & x \in J, \\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right), & x \in I, \end{cases}$$

де $G\left(x,s\right)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\left(x\right) = 0,\ x \in I,\ y\left(a\right) = y\left(b\right) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B(J \cup I)$ наступним чином

$$\left(Ty\right)\left(x\right) = \int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s\right) y\left(s-\tau_i\left(s\right)\right) + \sum_{i=0}^{n} b_i\left(s\right) y'\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)\right]\times$$

$$\times\overline{G}\left(x,s\right)ds + l\left(x\right),\ x \in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + \sum_{i=0}^{n} b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) \right] \times \qquad (4.4)$$

$$\times \overline{G}_x'(x,s)\, ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a},\ x \in J \cup I.$$

Нехай коефіцієнти у рівнянні (4.1) такі, що справджуються нерівності $|a_i(x)| \le A_i$, $|b_i(x)| \le B_i$, $i = \overline{0,n}$, $|f(x)| \le F$ при $x \in [a;b]$. Позначимо $P = P_1 \sum\limits_{i=0}^{n} A_i + P_2 \sum\limits_{i=0}^{n} B_i + F$, де P_1, P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору $B(J \cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{ \max\limits_{x\in J} |\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8} P + \max\left\{ |\varphi(a)|,\ |\gamma| \right\} \right\} \le P_1,$

2) $\max\left\{ \max\limits_{x\in J} |\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \le P_2,$

3) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum\limits_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2} \sum\limits_{i=0}^{n} B_i < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.1)–(4.2) *у просторі* $B(J \cup I)$.

Із вигляду функції Гріна

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \le s \le x \le b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \le x \le s \le b, \end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [74]:

$$\int\limits_a^b \Big| G(x,s) \Big| ds \le \frac{(b-a)^2}{8},\ \int\limits_a^b \Big| G_x'(x,s) \Big| ds \le \frac{b-a}{2}. \qquad (4.5)$$

Якщо справджуються умови 1)-2) та нерівності (4.5), тоді оператор T відображає простір $B(J \cup I)$ у себе.

Нехай $y_1, y_2 \in B(J \cup I)$. Враховуючи оцінки (4.5) та означення норми простору $B(J \cup I)$, одержуємо:

$$\left\|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\right\|_B \leq \tag{4.6}$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

Нерівність (4.6) та умова 3) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B(J\cup I)$ і має єдину нерухому точку [74]. Тому крайова задача (4.1)–(4.2) має єдиний розв'язок $y(x)\in B(J\cup I)$.

4.2.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E\subset\Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\left(x\right)$, який належить простору $B(J\cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.1)–(4.2) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)},x\right)=\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right)$, який задовольняє крайові умови (4.2) при $x=a$ та $x=b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.1) та сплайн $S\left(y^{(k)},x\right)$, знаходимо для $k=0,1,\ldots$:

$$M_j^{+(k+1)}=\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+ \tag{4.7}$$
$$+b_i(x_j)S'\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)\Big)+f(x_j),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$M_j^{-(k+1)}=\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+ \tag{4.8}$$
$$+b_i(x_j)S'\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)\Big)+f(x_j),\ j=\overline{1,m}.$$

У співвідношеннях (4.7), (4.8) підставляємо $S^{(p)}\left(x,y^{(k)}\right)=\varphi^{(p)}(x)$, $p=0,1$ при $x<a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють величини M_{j-1}^+ і M_j^- $(j=1,2,\ldots,m)$.

$$\left\{\begin{array}{c} h_{j+1}y_{j-1}-(h_j+h_{j+1})y_j+h_jy_{j+1}=\frac{h_jh_{j+1}}{6}\times \\ \times\left(h_jM_{j-1}^+ + 2h_jM_j^- + 2h_{j+1}M_j^+ + h_{j+1}M_{j+1}^-\right), \\ j=\overline{1,m-1}. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

.

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(k+1)}\right)$ у формі

$$\begin{gathered} S(x,y)=M_{j-1}^+\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+M_j^-\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+ \\ +\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}^+h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j}+\left(y_j-\frac{M_j^-h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j}, \\ x\in[x_{j-1};x_j],\ j=1,2,\ldots,m, \end{gathered} \tag{4.10}$$

використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j=\overline{0,m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j=\overline{1,m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\begin{gathered} \lambda_1=\sum_{i=0}^n\max_{x\in[a;b]}\left|a_i(x)\right|,\ \lambda_2=\sum_{i=0}^n\max_{x\in[a;b]}\left|b_i(x)\right|, \\ u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\ v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3}, \\ \mu=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H\right). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Теорема 4.2. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.1)–(4.2) *існує та належить простору* $B(J\cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta=u\lambda_1+v\lambda_2<1 \tag{4.12}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0<H<H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$.

Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) = S^{(p)}(\tilde{y}, x), \ p = 0, 1,$$
$$\widetilde{M}_j^{+} = S''(\tilde{y}, x_j + 0), \ j = \overline{0, m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-} = S''(\tilde{y}, x_j - 0), \ j = \overline{1, m},$$
$$\widetilde{y}_j = S(\tilde{y}, x_j), \ j = \overline{1, m}.$$

При цьому

$$\widetilde{M}_j^{+} = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) + b_i(x_j)S'\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big)\Big) +$$
$$+ f(x_j), \ j = \overline{0, m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-} = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) + b_i(x_j)S'\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big)\Big) +$$
$$+ f(x_j), \ j = \overline{1, m}.$$

Параметри $\widetilde{M}_j^{+}$, $\widetilde{M}_j^{-}$ сплайна $S(\tilde{y}, x)$ задовольняють систему (4.9).

Нехай $S(y, x)$ – кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y(x)$ крайової задачі (4.1)–(4.2). Тоді

$$\left\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - y^{(p)}(x)\right\| \leq \left\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y, x)\right\| + \left\|S^{(p)}(y, x) - y^{(p)}(x)\right\|,$$
$$p = 0, 1. \tag{4.13}$$

Для другого доданка у правій частині (4.13) справджуються нерівності [75]:

$$\left\|S^{(p)}(y, x) - y^{(p)}(x)\right\| \leq K_p H^{2-p} \omega\left(y''(x), H\right), \tag{4.14}$$
$$p = 0, 1, \ K_0 = \frac{5}{2}, \ K_1 = 5,$$

де $\omega\left(y''(x), H\right) = \max\limits_{1\leq r\leq l+1} \omega_r\left(y''(x), H\right)$, $\omega_r\left(y''(x), H\right)$ – модуль неперервності функції $y''(x)$ на $I_r = [x_{r-1}; x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (4.13), згідно вигляду правої частини рівняння (4.1), знайдемо допоміжні нерівності:

$$\Big|M_j^+ - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) + \tag{4.15}$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) - f(x_j)\Big| \le \Big|M_j^+ - y''(x_j + 0)\Big| +$$

$$+\Big|y''(x_j + 0) - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) +$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) - f(x_j)\Big| =$$

$$= \Big|S''(y, x_j + 0) - y''(x_j + 0)\Big| + \Big|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)y(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) +$$

$$+b_i(x_j)y'(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) +$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big)\Big| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x), H) + \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i(x_j)\Big(y(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) -$$

$$-S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x_j)\Big(y'(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) -$$

$$-S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big)\Big| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x), H) + \frac{5}{2}H^2\omega(y''(x), H)\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big| +$$

$$+5H\omega(y''(x), H)\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x), H) + \lambda_1\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x), H) + \lambda_2 5H\omega(y''(x), H) =$$

$$= 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H\right)\omega(y''(x), H) = \mu\omega(y''(x), H),\ j = \overline{0, m-1}.$$

Аналогічно можна одержати

$$\Bigg|M_j^- - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))+ \tag{4.16}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))\Big)-f(x_j)\Bigg| \le \mu\omega(y'',H),\ j=\overline{1,m}.$$

Звідси

$$M_j^+ \le \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+ \tag{4.17}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)+f(x_j)+\mu\omega(y''(x),H),$$

$$j=\overline{0,m-1},$$

$$M_j^- \le \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))+ \tag{4.18}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))\Big)+f(x_j)+\mu\omega(y''(x),H),$$

$$j=\overline{1,m}.$$

Позначимо

$$\max_{x\in[a;b]}\Big|S^{(p)}(\tilde{y},x)-S^{(p)}(y,x)\Big| = \alpha_p,\ p=0,1,$$

$$\max_j\Big|\widetilde{M_j}-M_j\Big| = \max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}\Big|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\Big|,\ \max_{j=\overline{1,m}}\Big|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\Big|\right\}.$$

Використовуючи формули для $S\left(\tilde{y},x\right)$, $S\left(y,x\right)$ та нерівності (4.17)–(4.18), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\le u\Big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H)\Big),\\ \alpha_1 &\le v\Big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H)\Big). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Розв'язуючи систему (4.19), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (4.13):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\le \frac{u\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta},\\ \alpha_1 &\le \frac{v\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Тепер, враховуючи (4.14), нерівності (4.13) можна записати у вигляді

$$\left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\|\leq R_p\omega\left(y''\left(x\right),H\right),\ p=0,1, \tag{4.20}$$

де $R_0=\sup\limits_{H\leq H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta}+\frac{5H^2}{2}\right)$, $R_1=\sup\limits_{H\leq H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta}+5H\right)$.

Можна підсумувати вищевказані твердження стосовно точності апроксимації розв'язку крайової задачі (4.1)–(4.2) послідовністю сплайнів у вигляді наступної теореми.

Теорема 4.3. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.1)–(4.2) *існує, єдиний і належить простору* $B(J\cup I)$. *Якщо виконується умова* (4.12), *тоді існує таке* $H^*>0$, *що для будь-якого* $H<H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)},x\right)\right\}$ *апроксимує розв'язок крайової задачі* (4.1)–(4.2) *і виконуються співвідношення* (4.20).

4.3 Лінійні крайові задачі нейтрального типу

4.3.1 Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i\left(x\right)y\left(x-\tau_i\left(x\right)\right)+b_i\left(x\right)y'\left(x-\tau_i\left(x\right)\right)+ \tag{4.21}$$

$$+c_i\left(x\right)y''\left(x-\tau_i\left(x\right)\right)\Big)+f\left(x\right),$$

$$y^{(p)}\left(x\right)=\varphi^{(p)}\left(x\right),\ p=0,1,2,\ x\in\left[a^*;a\right],\ y\left(b\right)=\gamma, \tag{4.22}$$

де запізнення $\tau_0\left(x\right)=0$, а $\tau_i\left(x\right),\ i=\overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi\left(x\right)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma\in R$,

$$a^*=\min_{0<i\leq n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}\left(x-\tau_i\left(x\right)\right)\right\}.$$

Нехай функції $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $i=\overline{0,n}$, $f(x)$ – неперервні на $[a;b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_{i1} = \big\{x_j \in [a,b] : \, x_j - \tau_i(x_j) = a, \; j = 1, 2, \ldots\big\},$$
$$E_{i2} = \big\{x_j \in [a,b] : \, x_0 = a, \; x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j, \; j = 0, 1, 2, \ldots\big\},$$
$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \big(E_{i1} \cup E_{i2}\big).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_{i1}, E_{i2}, $i = \overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = [a^*; a], \; I = [a,b],$$
$$I_1 = [a, x_1], \; I_2 = [x_1, x_2], \; \ldots, \; I_k = [x_{k-1}, x_k], \; I_{k+1} = [x_k, b],$$
$$B_2\big(J \cup I\big) = \Bigg\{ y(x) : y(x) \in \Bigg(C(J \cup I) \cap \Big(C^1(J) \cup C^1(I) \Big) \cap$$
$$\cap \Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \Bigg) \Bigg), \; |y(x)| \le P_1, \; |y'(x)| \le P_2, \; |y''(x)| \le P_3 \Bigg\},$$

де P_1, P_2, P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.21)–(4.22) вважатимемо функцію $y = y(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.21) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (4.22). Будемо шукати розв'язок задачі (4.21)–(4.22), який належить простору $B_2(J \cup I)$.

Із означення простору $B_2(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.21)–(4.22) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a,b]$, де $y'(a)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J \cup I)$:

$$\|y\|_{B_2} = \max\Bigg\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \; \frac{2}{b-a} \max\Big(\max_{x \in J} |y'(x)|, \; \max_{x \in I} |y'(x)| \Big),$$
$$\max\Big(\max_{x \in J} |y''(x)|, \; \max_{x \in I_1} |y''(x)|, \; \ldots, \; \max_{x \in I_{k+1}} |y''(x)| \Big) \Bigg\}.$$

Простір $B_2(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.21)–(4.22) еквівалентна інтегральному рівнянню [72,73]

$$y(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) + \right. \tag{4.23}$$

$$\left. + c_i(s)\, y''(s - \tau_i(s)) \Big) \right] \overline{G}(x,s)\, ds + l(x),\ x \in J \cup I,$$

$$\overline{G}(x,s) = \begin{cases} G(x,s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x) = 0,\ x \in I,\ y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J \cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) + \right. \tag{4.24}$$

$$\left. + c_i(s)\, y''(s - \tau_i(s)) \Big) \right] \overline{G}(x,s)\, ds + l(x),\ x \in J \cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) + \right. \tag{4.25}$$

$$\left. + c_i(s)\, y''(s - \tau_i(s)) \Big) \right] \overline{G}'_x(x,s)\, ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a},\ x \in J \cup I.$$

$$(Ty)''(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x)\, y(x - \tau_i(x)) + b_i(x)\, y'(x - \tau_i(x)) + \tag{4.26}$$

$$+ c_i(x)\, y''(x - \tau_i(x)) \Big),\ x \in J \cup I.$$

Нехай коефіцієнти у рівнянні (4.21) такі, що справджуються нерівності $|a_i(x)| \leq A_i$, $|b_i(x)| \leq B_i$, $|c_i(x)| \leq C_i$, $i = \overline{0,n}$, $|f(x)| \leq F$ при $x \in [a;b]$. Позначимо $P = \sum\limits_{i=0}^{n}\Big(A_iP_1 + B_iP_2 + C_iP_3\Big) + F$, де P_1, P_2, P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J \cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|\,,\ \frac{(b-a)^2}{8}P + \max\big(|\varphi(a)|\,,\ |\gamma|\big)\right\} \leq P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|\,,\ \frac{b-a}{2}P + \left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\} \leq P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|\,,\ P\right\} \leq P_3,$

4) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}A_i + \frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}B_i + \sum\limits_{i=0}^{n}C_i < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.21)–(4.22) *у просторі* $B_2(J \cup I)$.

4.3.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E_2 \subset \Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y(x)$, який належить простору $B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.21)–(4.22) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right) = \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (4.22) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.21) та сплайн $S\left(y^{(k)}, x\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x_j) S\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) + \tag{4.27}$$

$$+ b_i(x_j) S'\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) +$$

$$+ c_i(x_j) S''\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big)\Big) + f(x_j),\ j = \overline{0, m-1},$$

$$M_j^{-(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x_j) S\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) + \tag{4.28}$$

$$+ b_i(x_j) S'\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) +$$

$$+ c_i(x_j) S''\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big)\Big) + f(x_j),\ j = \overline{1, m}.$$

У співвідношеннях (4.27), (4.28) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (4.9).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (4.10), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big|a_i(x)\big|,\ \lambda_2 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big|b_i(x)\big|,\ \lambda_3 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big|c_i(x)\big|, \tag{4.29}$$

$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$

$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

Теорема 4.5. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.21)–(4.22) *існує та належить простору* $B_2(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{4.30}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)}, x\right)\right\}$,

$k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\| \lim_{k\to\infty} S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x) \right\| \leq R_p \omega\left(y''(x), H\right), \ p = 0, 1, 2, \tag{4.31}$$

$$R_0 = \sup_{H \leq H^*} \left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2} \right), \ R_1 = \sup_{H \leq H^*} \left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H \right),$$

$$R_2 = \sup_{H \leq H^*} \left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5 \right), \ \omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1 \leq r \leq l+1} \omega_r\left(y''(x), H\right).$$

Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) = S^{(p)}\left(\tilde{y}, x\right), \ p = 0, 1, 2,$$

$$\widetilde{M}_j^+ = S''\left(\tilde{y}, x_j + 0\right), \ j = \overline{0, m-1},$$

$$\widetilde{M}_j^- = S''\left(\tilde{y}, x_j - 0\right), \ j = \overline{1, m},$$

$$\widetilde{y}_j = S\left(\tilde{y}, x_j\right), \ j = \overline{1, m}.$$

При цьому

$$\widetilde{M}_j^+ = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x_j) S\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) + b_i(x_j) S'\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) +$$
$$+ c_i(x_j) S''\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) \Big) + f(x_j), \ j = \overline{0, m-1},$$

$$\widetilde{M}_j^- = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x_j) S\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) + b_i(x_j) S'\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) +$$
$$+ c_i(x_j) S''\big(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) \Big) + f(x_j), \ j = \overline{1, m}.$$

Параметри $\widetilde{M}_j^+$, $\widetilde{M}_j^-$ сплайна $S\left(\tilde{y}, x\right)$ задовольняють систему (4.9) та рівняння (4.27)–(4.28).

Нехай $S\left(y, x\right)$ – кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y\left(x\right)$ крайової задачі (4.21)–(4.22). Тоді

$$\left\| S^{(p)}\left(\tilde{y}, x\right) - y^{(p)}\left(x\right) \right\| \leq \left\| S^{(p)}\left(\tilde{y}, x\right) - S^{(p)}\left(y, x\right) \right\| + \left\| S^{(p)}\left(y, x\right) - y^{(p)}\left(x\right) \right\|,$$
$$p = 0, 1, 2. \tag{4.32}$$

Для другого доданка у правій частині (4.32) справджуються нерівності [75]:

$$\left\| S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \leq K_p H^{2-p}\omega\left(y''\left(x\right),H\right), \tag{4.33}$$
$$p=0,1,2,\ K_0=\frac{5}{2},\ K_1=K_2=5,$$

де $\omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max\limits_{1\leq r\leq k+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$, $\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$ – модуль неперервності функції $y''\left(x\right)$ на $I_r=[x_{r-1};x_r]$.

Позначимо

$$\max_{x\in[a;b]}\left|S^{(p)}(\tilde{y},x)-S^{(p)}(y,x)\right|=\alpha_p,\ p=0,1,2,$$
$$\max_j\left|\widetilde{M_j}-M_j\right|=\max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}\left|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\right|,\ \max_{j=\overline{1,m}}\left|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\right|\right\}.$$

Нескладно одержати нерівності:

$$\left|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\right|\leq\left|\widetilde{M_j^+}-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+\right.$$
$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+c_i(x_j)S''(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-$$
$$\left.-f(x_j)\right|+\mu\omega(y''(x),H)=\left|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(\tilde{y},x_j+0-\tau_i(x_j+0))+\right.$$
$$+b_i(x_j)S'(\tilde{y},x_j+0-\tau_i(x_j+0))+c_i(x_j)S''(\tilde{y},x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-$$
$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+$$
$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+$$
$$\left.+c_i(x_j)S''(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)\right|+\mu\omega(y''(x),H)\leq$$
$$\leq\sum_{i=0}^{n}\left|a_i(x_j)\right|\alpha_0+\sum_{i=0}^{n}\left|b_i(x_j)\right|\alpha_1+\sum_{i=0}^{n}\left|c_i(x_j)\right|\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H)\leq$$
$$\leq\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}. \tag{4.34}$$

Аналогічно,

$$\left|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\right|\leq\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}. \tag{4.35}$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$|\tilde{y}_j - y_j| \le \frac{K^5}{8}(b-a)^2 \max\Big\{ \max_{j=\overline{0,m-1}} |\widetilde{M_j^+} - M_j^+|,\ \max_{j=\overline{1,m}} |\widetilde{M_j^-} - M_j^-| \Big\}. \quad (4.36)$$

Використовуючи формули для $S(\tilde{y}, x)$, $S(y, x)$ та нерівності (4.34)–(4.36), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\le u\Big(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right)\Big), \\ \alpha_1 &\le v\Big(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right)\Big), \\ \alpha_2 &\le \alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Розв'язуючи систему (4.37), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (4.32):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\le \frac{u\mu\omega(y''(x), H)}{1-\theta}, \\ \alpha_1 &\le \frac{v\mu\omega(y''(x), H)}{1-\theta}, \\ \alpha_2 &\le \frac{\mu\omega(y''(x), H)}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Тепер, враховуючи (4.33), нерівності (4.32) можна записати у вигляді (4.31).

Зауваження. При використанні описаного алгоритму розв'язування крайових задач (4.21)–(4.22) за наближений розв'язок вибирається $S(y^{(k)}, x)$ при деякому $k > 0$. Оцінимо похибку, яка буде при цьому допущена. Із нерівностей (4.31) маємо:

$$\|S^{(p)}(y^{(k+j)}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x)\| \le \theta^{k-1} \max(u, v, 1)\, d\, \frac{1-\theta^i}{1-\theta},\ p = 0, 1, 2.$$

Нехай $H < H^*$. Тоді з попередньої нерівності одержуємо:

$$\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x)\| \le \frac{\theta^{k-1}}{1-\theta} \max(u, v, 1)\, d.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує кількість ітерацій k_0, така що при $k > k_0$

$$\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x)\| \le \varepsilon,\ p = 0, 1, 2.$$

Тоді при $k > k_0$ і виконанні умов теореми 4.5 одержуємо оцінку похибки

$$\|S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x)\| \le \varepsilon + K_p\omega(y''(x), H),\ p = 0, 1, 2. \quad (4.38)$$

4.4 Нелінійні крайові задачі з запізненням та нейтрального типу

4.4.1 Існування розв'язку крайової задачі з запізненням

Введемо позначення

$$[y(x)] = \Big(y\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y\big(x-\tau_n(x)\big)\Big), \tag{4.39}$$
$$[y(x)]_1 = \Big(y'\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y'\big(x-\tau_n(x)\big)\Big).$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big),\ x\in[a;b], \tag{4.40}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x),\ p=0,1,\ x\in[a^*;a],\ y(b)=\gamma, \tag{4.41}$$

де запізнення $\tau_0(x)=0$, а $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma\in R$,

$$a^* = \min_{0<i\le n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}(x-\tau_i(x))\right\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$E_i = \big\{x_j\in[a,b]:\ x_j-\tau_i(x_j)=a,\ j=1,2,\ldots\big\},$$
$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини $E_i,\ i=\overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P = \sup\Big\{\Big|f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)\Big| : \Big|y\big(x-\tau_i(x)\big)\Big| \le P_1,$$

$$\Big|y'\big(x-\tau_i(x)\big)\Big| \le P_2,\ i=\overline{0,n},\ x\in[a;b]\Big\},$$

$$J=[a^*;a],\ I=[a,b],$$

$$I_1 = [a, x_1]\,,\ I_2 = [x_1, x_2]\,,\ \ldots,\ I_k = [x_{k-1}, x_k]\,,\ I_{k+1} = [x_k, b]\,,$$

$$B\left(J \cup I\right) = \Bigg\{ y\,(x) : y\,(x) \in \Bigg(C(J \cup I) \cap \Big(C^1(J) \cup C^1(I) \Big) \cap$$

$$\cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2\,(I_j) \right) \Bigg), |y\,(x)| \le P_1,\ |y'(x)| \le P_2 \Bigg\},$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.40)–(4.41) вважатимемо функцію $y = y\,(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.40) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (4.41). Будемо шукати розв'язок задачі (4.40)–(4.41), який належить простору $B(J \cup I)$.

Із означення простору $B(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.40)–(4.41) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a, b]$, де $y'\,(a)$ – права похідна.

Введемо норму в просторі $B(J \cup I)$:

$$\|y\|_B = \max\left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y\,(x)|\,, \frac{2}{b-a} \max\left(\max_{x \in J} |y'\,(x)|\,, \max_{x \in I} |y'\,(x)| \right) \right\}.$$

Простір $B(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.40)–(4.41) еквівалентна інтегральному рівнянню [72,73]

$$y\,(x) = \int_{a^*}^{b} \Big[f\big(s, [y(s)], [y(s)]_1\big) \Big]\, \overline{G}\,(x, s)\, ds + l\,(x)\,,\ x \in J \cup I, \tag{4.42}$$

$$\overline{G}\,(x, s) = \begin{cases} G\,(x, s)\,, & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

$$l\,(x) = \begin{cases} \varphi\,(x)\,, & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}\,(x-a) + \varphi\,(a)\,, & x \in I, \end{cases}$$

де $G\,(x, s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\,(x) = 0,\ x \in I,\ y\,(a) = y\,(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B(J \cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \Big[f\big(s, [y(s)], [y(s)]_1\big) \Big] \overline{G}(x,s)\, ds + l(x), \ x \in J \cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \Big[f\big(s, [y(s)], [y(s)]_1\big) \Big] \overline{G}'_x(x,s)\, ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}, \qquad (4.43)$$

$$x \in J \cup I.$$

Нехай функція $f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big)$ – неперервна у $G = [a,b] \times G_1^{n+1} \times G_2^{n+1}$, де $G_1 = \big\{ u \ \in R : \ |u| < P_1 \big\}$, $G_2 = \big\{ v \ \in R : \ |v| \le P_2 \big\}$, P_1, P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору $B(J \cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{ \max\limits_{x \in J} |\varphi(x)|, \ \frac{(b-a)^2}{8} P + \max\Big\{ |\varphi(a)|, \ |\gamma| \Big\} \right\} \le P_1,$

2) $\max\left\{ \max\limits_{x \in J} |\varphi'(x)|, \ \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \le P_2,$

3) функція $f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінними* $[y(x)], [y(x)]_1$ *зі сталими* L_i, $i = \overline{0, 2n+1}$ *у* G,

4) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum\limits_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2} \sum\limits_{i=n+1}^{2n+1} L_i < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.40)–(4.41) *у просторі* $B(J \cup I)$.

4.5 Існування розв'язку крайової задачі нейтрального типу

Введемо позначення

$$\begin{aligned} [y(x)] &= \Big(y\big(x - \tau_0(x)\big), \ldots, y\big(x - \tau_n(x)\big) \Big), \\ [y(x)]_1 &= \Big(y'\big(x - \tau_0(x)\big), \ldots, y'\big(x - \tau_n(x)\big) \Big), \qquad (4.44) \\ [y(x)]_2 &= \Big(y''\big(x - \tau_0(x)\big), \ldots, y''\big(x - \tau_n(x)\big) \Big). \end{aligned}$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2\big), \tag{4.45}$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x), \ j = 0, 1, 2, \ x \in [a^*; a], \ y(b) = \gamma, \tag{4.46}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x), \ i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 < i \leq n} \left\{ \inf_{x \in [a; b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_{i1} = \big\{x_j \in [a, b] : \ x_j - \tau_i(x_j) = a, \ j = 1, 2, \ldots\big\},$$

$$E_{i2} = \big\{x_j \in [a, b] : \ x_0 = a, \ x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j, \ j = 0, 1, 2, \ldots\big\},$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \big(E_{i1} \cup E_{i2}\big).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x), \ i = \overline{1, n}$ – такі функції, що множини $E_{i1}, E_{i2}, \ i = \overline{1, n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P = \sup \Big\{ \Big| f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2\big) \Big| : \Big| y\big(x - \tau_i(x)\big) \Big| \leq P_1,$$

$$\Big| y'\big(x - \tau_i(x)\big) \Big| \leq P_2, \ \Big| y''\big(x - \tau_i(x)\big) \Big| \leq P_3, \ i = \overline{0, n}, \ x \in [a; b] \Big\},$$

$$J = [a^*; a], \ I = [a, b],$$

$$I_1 = [a, x_1], \ I_2 = [x_1, x_2], \ \ldots, \ I_k = [x_{k-1}, x_k], \ I_{k+1} = [x_k, b],$$

$$B_2\big(J \cup I\big) = \Bigg\{ y(x) : y(x) \in \Bigg(C(J \cup I) \cap \Big(C^1(J) \cup C^1(I) \Big) \cap$$

$$\cap \Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \Bigg) \Bigg), \ |y(x)| \leq P_1, \ |y'(x)| \leq P_2, \ |y''(x)| \leq P_3 \Bigg\},$$

де P_1, P_2, P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.45)–(4.46) вважатимемо функцію $y = y\,(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.45) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (4.46). Будемо шукати розв'язок задачі (4.45)–(4.46), який належить простору $B_2(J \cup I)$.

Із означення простору $B_2(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.45)–(4.46) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a, b]$, де $y'\,(a)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J \cup I)$:

$$\|y\|_{B_2} = \max\biggl\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|,\ \frac{2}{b-a}\max\Bigl(\max_{x\in J}|y'(x)|,\ \max_{x\in I}|y'(x)|\Bigr),$$
$$\max\Bigl(\max_{x\in J}|y''(x)|,\ \max_{x\in I_1}|y''(x)|,\ \ldots,\ \max_{x\in I_{k+1}}|y''(x)|\Bigr)\biggr\}.$$

Простір $B_2(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.45)–(4.46) еквівалентна інтегральному рівнянню [72,73]

$$y\,(x) = \int\limits_{a^*}^{b}\Bigl[f\bigl(s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2\bigr)\Bigr]\,\overline{G}\,(x,s)\,ds + l\,(x)\,,\ x \in J \cup I, \quad (4.47)$$

$$\overline{G}\,(x,s) = \begin{cases} G\,(x,s)\,, & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

$$l\,(x) = \begin{cases} \varphi\,(x)\,, & x \in J, \\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a) + \varphi\,(a)\,, & x \in I, \end{cases}$$

де $G\,(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\,(x) = 0,\ x \in I,\ y\,(a) = y\,(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J \cup I)$ наступним чином

$$(Ty)\,(x) = \int\limits_{a^*}^{b}\Bigl[f\bigl(s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2\bigr)\Bigr]\,\overline{G}\,(x,s)\,ds + l\,(x)\,,\ x \in J \cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \Big[f\big(s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2\big)\Big] \overline{G}_x^{'}(x,s)\,ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}, \quad (4.48)$$

$$x \in J \cup I.$$

$$(Ty)''(x) = f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2\big), \ x \in J \cup I. \quad (4.49)$$

Нехай функція $f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2\big)$ – неперервна у $G = [a,b] \times G_1^{n+1} \times G_2^{n+1} \times G_3^{n+1}$, де $G_1 = \big\{u \in R: \ |u| < P_1\big\}$, $G_2 = \big\{v \in R: \ |v| \le P_2\big\}$, $G_3 = \big\{w \in R: \ |w| \le P_3\big\}$, P_1, P_2, P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J \cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J} |\varphi(x)|, \ \frac{(b-a)^2}{8}P + \max\Big\{|\varphi(a)|, \ |\gamma|\Big\}\right\} \le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J} |\varphi'(x)|, \ \frac{b-a}{2}P + \left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\} \le P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J} |\varphi''(x)|, \ P\right\} \le P_3,$

4) функція $f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2\big)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінними* $[y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2$ *зі сталими* L_i, $i = \overline{0, 3n+2}$ *у* G,

5) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum\limits_{i=2n+2}^{3n+2} L_i < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.45)–(4.46) *у просторі* $B_2(J \cup I)$.

4.5.1 Обчислювальна схема для крайової задачі із запізненням. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E \subset \Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y(x)$, який належить простору $B(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.40)–(4.41) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(0)}\right) = \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (4.41) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.40) та сплайн $S\left(x, y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = f(x_j, [S(x_j + 0, y^{(k)})], [S(x_j + 0, y^{(k)})]_1), \qquad (4.50)$$
$$j = \overline{0, m-1},$$
$$M_j^{-(k+1)} = f(x_j, [S(x_j - 0, y^{(k)})], [S(x_j - 0, y^{(k)})]_1), \qquad (4.51)$$
$$j = \overline{1, m}.$$

У співвідношеннях (4.50), (4.51) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (4.9).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (4.10), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} L_i, \ \lambda_2 = \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i, \qquad (4.52)$$
$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}, \ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$
$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

Теорема 4.8. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.40)–(4.41) *існує та належить простору* $B(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 < 1 \qquad (4.53)$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x, y^{(k)}\right)\right\}$,

$k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\| \lim_{k\to\infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}(x) \right\| \le R_p \omega\left(y''(x), H\right), \ p = 0, 1, \tag{4.54}$$

$$R_0 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2} \right), \ R_1 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H \right),$$

$$\omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1 \le r \le l+1} \omega_r\left(y''(x), H\right),$$

де $\omega_r(f, H)$ *– це модуль неперервності функції* f *на відрізку* δ_r*.*

4.5.2 Обчислювальна схема для крайової задачі нейтрального типу. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E_2 \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y(x)$, який належить простору $B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.45)–(4.46) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(0)}\right) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (4.46) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.45) та сплайн $S\left(x, y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = f(x_j, [S(x_j + 0, y^{(k)})], [S(x_j + 0, y^{(k)})]_1, [S(x_j + 0, y^{(k)})]_2),$$
$$j = \overline{0, m-1}, \tag{4.55}$$

$$M_j^{-(k+1)} = f(x_j, [S(x_j - 0, y^{(k)})], [S(x_j - 0, y^{(k)})]_1, [S(x_j - 0, y^{(k)})]_2),$$
$$j = \overline{1, m}. \tag{4.56}$$

У співвідношеннях (4.55), (4.56) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (4.9).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (4.10), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} L_i,\ \lambda_2 = \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i,\ \lambda_3 = \sum_{i=2n+2}^{3n+2} L_i, \tag{4.57}$$

$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$

$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

Теорема 4.9. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.45)–(4.46) *існує та належить простору* $B_2(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{4.58}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x, y^{(k)}\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}(x)\right\| \leq R_p \omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, 2, \tag{4.59}$$

$$R_0 = \sup_{H \leq H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right),\ R_1 = \sup_{H \leq H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$

$$R_2 = \sup_{H \leq H^*}\left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5\right),$$

$$\omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1 \leq r \leq l+1} \omega_r\left(y''(x), H\right),$$

де $\omega_r(f, H)$ *– це модуль неперервності функції* f *на відрізку* δ_r.

5 СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

5.1 Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та її застосування

5.1.1 Вступ

Вперше задача про апроксимацію лінійних стаціонарних рівнянь із запізненням розглянута М.Є. Салуквадзе [76] та Ю.М. Рєпіним і В.Є. Третьяковим [77], але без дослідження збіжності наближень. У праці [78] М.М. Красовський розглянув лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{5.1}$$

де $x \in R^n$, A, B – сталі $n \times m$ матриці. Встановлено, що розв'язок початкової задачі для системи із запізненням (5.1) можна апроксимувати розв'язками задачі Коші для спеціальної системи звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі $t \in [0, \tau], T > 0$.

Дослідження схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t-\tau_i),$$

де $A, B_i, i = \overline{1,k}$ – $n \times n$ сталі матриці, $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < ... < \tau_k$ розглядались в роботі [80] О.В. Матвія та І.М. Черевка.

Дослідження зв'язків між розв'язками лінійних диференціально-різницевих рівнянь та розв'язками відповідних апроксимуючих систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь дозволило побудувати алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіомів. За допомогою цих алгоритмів запропонована методика дослідження стійкості роз'язків лінійних стаціонарних систем із сталим запізненням [80,81], а також розроблено конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями [82,83].

5.1.2 Схема апроксимації

Розглянемо початкову задачу для лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t - \tau_i), \tag{5.2}$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0], \tag{5.3}$$

де $A, B_i, i = \overline{1,k}$ – сталі $n \times n$ матриці, $x \in R^n$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k = \tau$, $\varphi \in C[-\tau, 0]$.

Поставимо у відповідність системі (5.2) за схемою Красовського-Рєпіна [78,84] систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i z_{l_i}(t),\ l_i = [\frac{\tau_i m}{\tau}] \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)),\ i = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$\mu = \frac{m}{\tau}$, $m \in \mathbb{N}$ з початковими умовами

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{0,m}. \tag{5.5}$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (5.4) апроксимує систему рівнянь із запізненням (5.2) на скінченному інтервалі $[0, T]$, якщо справджуються співвідношення

$$\left\| x(t - \frac{tj}{m}) - z_j(t) \right\| \to 0, j = \overline{0,m}, t \in [0,T] \text{ при } m \to \infty.$$

Теорема 5.1. *Розв'язок задачі Коші (5.4)-(5.5) апроксимує розв'язок початкової задачі (5.2)-(5.3) при $t \in [0, T]$ і $m \to \infty$.*

5.1.3 Про стійкість лінійних систем із запізненням

Дослідження стійкості систем із запізненням (5.2) на даний час є однією із найбільш важливих для практики задач.

Теорема 5.2. *[86] Для того, щоб нульовий розв'язок системи (5.2) був експоненціально стійким необхідно і досить, щоб всі корені його характеристичного рівняння*

$$D(\lambda) = det(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i e^{-\lambda \tau_i}) = 0 \tag{5.6}$$

лежали у півплощині

$$Re\lambda < 0. \tag{5.7}$$

Безпосереднє обчислення нулів квазіполінома (5.6) або аналіз їх локалізації є достатньо складною задачею, особливо для систем високого порядку. Можливість дослідження експоненціальної стійкості (нестійкості) системи (5.2) за допомогою аналізу апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь забезпечує наступне твердження.

Теорема 5.3. *[79] Якщо нульовий розв'язок рівняння (5.2) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує* $m_0 > 0$, *таке, що при* $m \geq m_0$ *нульовий розв'язок системи (5.4) експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх* $m \geq m_0$ *нульовий розв'язок системи (5.4) експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (5.2) експоненціально стійкий (нестійкий).*

Застосовуючи теорему 5.3 можна одержати ефективний алгоритм дослідження системи (5.2) на експоненціальну стійкість. Характеристичний многочлен апроксимуючої системи (5.4) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E - A & 0 & ... & -B_1 & ... & -B_k \\ -\mu E & (\mu+\lambda)E & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\mu E & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & (\mu+\lambda)E & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & (\mu+\lambda)E \end{vmatrix}. \tag{5.8}$$

Елементи визначника (5.8) матриці розмірності $n \times n$. Використовуючи те, що в першому рядку визначника ненульові блоки знаходяться на позиціях $l_j, j = \overline{0,k}$ нескладно одержати для (5.8) таке співвідношення

$$\Psi_m(\lambda) = det(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i(\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{l_i})(\mu+\lambda)^{mn} = 0. \tag{5.9}$$

Дослідимо зв'язок між квазіполіномом (5.6) і характеристичним многочленом (5.8).

Лема 5.1. *Для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}},\ m \in N \tag{5.10}$$

збігаєтьcя при $m \to \infty$ до квазіполінома (5.6).

Зауваження 5.1. Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (5.9), збігаються, то корені характеристичного рівняння (5.8) можна брати за наближені значення коренів квазіполінома $D(\lambda)$. Обчислюючи корені характеристичного многочлена (5.8) за допомогою стандартних процедур у спеціалізованих пакетах Mathematica, Maple, Mathlab, MathCad при різних значеннях запізнення τ, для яких зберігається стійкість апроксимуючої системи (5.3) встановлюємо, згідно теореми 5.3, стійкість системи із запізненням (5.1), а також можемо знайти верхню межу величини запізнення τ, для якої система (5.3), а значить і система із запізненням (5.1) є експоненціально стійкою.

5.1.4 Коефіцієнтні області стійкості

Розглянемо застосування методу Д-розбиття [87] для побудови та аналізу коефіцієнтних областей стійкості на прикладі найпростішого диференціального рівняння із запізненням

$$x'(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0,\ a,b \in R, \tau > 0, \tag{5.11}$$

квазіполіном якого має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda\tau} = 0. \tag{5.12}$$

Розіб'ємо простір коефіцієнтів рівняння (5.11) лініями, яким відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один корінь на уявній осі. Таке розбиття називається Д-розбиттям. Кожній області такого Д-розбиття відповідають квазіполіноми з однаковою кількістю нулів з додатною дійсною частиною. Знайшовши область, якій відповідають квазіполіноми, що не мають нулів з додатною дійсною частиною, одержимо коефіцієнтну область асимптотичної стійкості розв'язків рівняння (5.11).

При $\lambda = 0$ маємо одну із ліній Д-розбиття

$$a + b = 0. \tag{5.13}$$

Якщо квазіполіном (5.12) має чисто уявний корінь $\lambda = i\omega, i = \sqrt{-1}, \omega \in R$, тоді $i\omega + a + be^{-i\omega\tau} = 0$. Виділяючи дійсну та уявну частину одержимо рівняння іншої границі Д-розбиття в параметричній формі:

$$a = -\frac{\omega cos\omega\tau}{sin\omega\tau},\ b = \frac{\omega}{sin\omega\tau},\ 0 < \omega < \frac{\pi}{\tau}. \tag{5.14}$$

Лінії (5.13), (5.14) в області коефіцієнтів (a, b) утворюють Д-розбиття, яке зображене на

Рисунок 5.1

При $a > 0$ і $b = 0$ квазіполіном (5.12) не має коренів з додатніми дійсними частинами, отже область I є областю асимптотичної стійкості рівняння (5.11).

Аналізуючи рисунок 5.1 маємо, що область II, де $a + b < 0$ є областю нестійкості при довільному запізненні τ. Якщо $a + b > 0$ та $a > |b|$ маємо область асимптотичної стійкості при будь-якому запізненні $\tau > 0$.

При $a + b > 0$ та $b > |a|$ можемо попадати як в область асимптотичної нестійкості III так і в область асимптотичної стійкості I в залежності від значення запізнення τ.

Якщо a та b фіксовані коефіцієнти рівняння (5.11) то із співвідношень (5.14) знаходимо параметри ω і τ, при яких границя Д-розбиття (5.14) проходить через точку (a, b):

$$\begin{aligned} \omega &= bsin(cos^{-1}(-\frac{a}{b})), \\ \tau &= \frac{cos^{-1}(-\frac{a}{b})}{bsin(cos^{-1}(-\frac{a}{b}))}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Співвідношення (5.15) – це точне значення верхньої межі запізнення τ для рівняння (5.11) при якому ще зберігається асимптотична стійкість [88].

Як приклад розглянемо лінійне диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t) + 3x(t) + 3,1x(t - \tau) = 0. \tag{5.16}$$

Верхня межа запізнення для якої нульовий розв'язок рівняння (5.16) є асимптотично стійкий, згідно оцінок одержаних в [89], задається співвідношенням $\tau \leq 0,3226$. Обчислюючи значення верхньої межі запізнення τ за формулою (5.15) дістаємо, що стійкість зберігається при $\tau < 36963$.

5.2 Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

5.2.1 Постановка задачі. Схема апроксимації

Розглянемо початкову задачу для лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t, x_t)] = P(t, x_t),\ t \in [0, T], \tag{5.17}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \tag{5.18}$$

де $G(t,x_t)$, $P(t,x_t)$ – лінійні обмежені функціонали, що не містять сингулярної складової вигляду

$$G(t,x_t) = \sum_{i=1}^{p} G_i(t)x(t-\tau_i) + \int_{-\tau}^{0} H(t,\theta)x(t+\theta)d\theta,$$

$$P(t,x_t) = \sum_{i=0}^{p} P_i(t)x(t-\tau_i) + \int_{-\tau}^{0} Q(t,\theta)x(t+\theta)d\theta,$$

$G_i(t)$, $P_i(t)$, $i=\overline{0,p}$ – $n\times n$-матричні функції, компоненти яких неперервні функції при $t\in[0,T]$; $H(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$ – матричні функції, компоненти яких неперервні за сукупністю змінних функції на $[0,T]\times[-\tau,0]$, $0<\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l=\tau$.

Означення 5.1. *[90]. Для будь-яких $\varphi\in C$, $\sigma\in[r,\infty)$, $A\geq 0$, функція $x(t,\varphi)$ визначена на $[\sigma-r,\sigma+A]$ називається розв'язком рівняння (5.17) на $[\sigma,\sigma+A]$ з початковим значенням φ в точці $t=\sigma$, якщо x – неперервна на $[\sigma-r,\sigma+A]$; $x_\sigma=\varphi$; $x(t)-G(t,x_t)$ – неперервно диференційовна на $[\sigma,\sigma+A]$ і задовільняє рівність (5.17) на $[\sigma,\sigma+A]$.*

Позначимо $K_G=\max\limits_{k=\overline{1,p}}\max\limits_{t}||G_k(t)||$, $K_P=\max\limits_{k=\overline{0,p}}\max\limits_{t}||P_k(t)||$, $K_H=\max\limits_{t,\theta}||H(t,\theta)||$, $K_Q=\max\limits_{t,\theta}||Q(t,\theta)||$, $\omega_Q(\frac{\tau}{m})=n\max\limits_{i,j}\omega(q_{ij},\frac{\tau}{m})$, $\omega_H(\frac{\tau}{m})=n\max\limits_{i,j}\omega(h_{ij},\frac{\tau}{m})$, де $\omega(q_{ij},\frac{\tau}{m})$, $\omega(h_{ij},\frac{\tau}{m})$ – модуль неперервності функцій $q_{ij}(t,\theta)$, $h_{ij}(t,\theta)$, $i,j=\overline{1,n}$, $t\in[0,T]$, $\theta\in[-\tau,0]$.

Припустимо, що для системи (5.17) справджується нерівність

$$pK_G+\tau K_H<1 \qquad (5.19)$$

Нехай $m,p\in N$. Поставимо у відповідність рівнянню (5.17) систему звичайних диференціальних рівнянь де використано заміну інтегралів за формулою лівих прямокутників з кроком $h = \frac{\tau}{m}$.

$$\frac{d}{dt}[z_0(t) - \sum_{i=1}^{p} G_i(t) z_{l_i}(t) - \frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} H(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}) z_{m-i}(t)] = \sum_{i=0}^{p} P_i(t) z_{l_i}(t) +$$
$$+\frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} Q(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}) z_{m-i}(t),$$
$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1,m}, t \in [0,T], l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}]. \tag{5.20}$$

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0,m}. \tag{5.21}$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (5.20)–(5.21) апроксимує початкову задачу для системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (5.17)–(5.18), якщо справджуються співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0, j = \overline{0,m}, t \in [0,T] \text{ при } m \to \infty.$$

5.2.2 Обгрунтування схеми апроксимації

Дослідимо питання про близькість розв'язків початкової задачі (5.17)-(5.18) та розв'язків задачі Коші (5.20)-(5.21).

Розглянемо зображення $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ – розв'язки таких задач Коші

$$\begin{gathered} \frac{\tau}{m}{z'}_1^{(1)}(t) + z_1^{(1)}(t) = x(t), t \in [0,T], \\ \frac{\tau}{m}{z'}_j^{(1)}(t) + z_j^{(1)}(t) = z_{j-1}^{(1)}(t), j = \overline{2,m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x(-\frac{j\tau}{m}), j = \overline{1,m}; \end{gathered} \tag{5.22}$$

$$\begin{gathered} \frac{\tau}{m}{z'}_1^{(2)}(t) + z_1^{(2)}(t) = z_0(t) - x(t), t \in [0,T], \\ \frac{\tau}{m}{z'}_j^{(2)}(t) + z_j^{(2)}(t) = z_{j-1}^{(2)}(t), j = \overline{2,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0, j = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Оцінимо різниці $z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})$, $j = \overline{1,m}$ враховуючи структуру систем (5.22)-(5.23) та нерівність $||z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})|| \le ||z_j^{(1)}(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})|| + ||z_j^{(2)}(t)||$.

Враховуючи позначення $z_j(t) = (z_{j1}(t), ..., z_{jn}(t))$, $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, представимо $z_{ji}(t)$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$

і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\begin{gathered}\frac{\tau}{m}\frac{dz_{j1}^{(1)}(t)}{dt}+z_{j1}^{(1)}(t)=x_i(t), i=\overline{1,n},\\ \frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(1)}(t)=z_{j-1,i}^{(1)}(t), j=\overline{2,m},\end{gathered} \tag{5.24}$$

$$z_{ji}^{(1)}(0)=x_i(-\frac{j\tau}{m}), j=\overline{1,m}, i=\overline{1,n}; \tag{5.25}$$

$$\begin{gathered}\frac{\tau}{m}\frac{dz_{j1}^{(2)}(t)}{dt}+z_{j1}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t),\\ \frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(2)}(t)=z_{j-1,i}^{(2)}(t), j=\overline{2,m}, i=\overline{1,n},\end{gathered} \tag{5.26}$$

$$z_{ji}^{(2)}(0)=0, j=\overline{1,m}, i=\overline{1,n}. \tag{5.27}$$

Нехай

$$N_j(t)=\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(s-\tfrac{\tau j}{m})-z_{ji}(s)|, j=\overline{0,m}, t\in[0,T]. \tag{5.28}$$

Враховуючи вигляд систем (5.24) та (5.26) для різниці $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(t)|$ маємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\tfrac{j\tau}{m})-z_{ji}(t)|\le\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\tfrac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|. \tag{5.29}$$

Методом математичної індукції не важко показати, що для першого доданку в правій частині (5.29) справедлива оцінка

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(s)|\le N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T]. \tag{5.30}$$

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі диференціально-функціонального рівняння (5.17) [45, 91] маємо, що функції $x_i(t)\in C[-\tau,T]$, $i=\overline{1,n}$, тому, застосовуючи теорему **??** [92], для різниці $|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|$ дістаємо оцінку

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|\le\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),\lim_{\delta\to0}\gamma(\delta)=0. \tag{5.31}$$

Нерівність (5.31) справедлива для всіх $t\in[0,T]$, тому враховуючи позначення (5.28), маємо

$$N_j(t)\le\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})+N_0(t),\ \ j=\overline{1,m}. \tag{5.32}$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді такого твердження.

Лема 5.2. *Нехай вхідна функція $x(t)$ в системі (5.22) є неперервною при $t \in [0,T]$, тоді для розв'язків задач Коші (5.22)-(5.23) справджується співвідношення (5.31), де $N_j(t)$ визначається рівністю (5.28).*

Для оцінки різниці $||x(t) - z_0(t)||$, представимо рівняння (5.17) та (5.20) в еквівалентній інтегральній формі

$$\begin{gathered}
[x(t) - \sum_{i=1}^{p} G_i(t)x(t-\tau_i) - \int_{-\tau}^{0} H(t,\theta)x(t+\theta)d\theta] - \\
-[x(0) - \sum_{i=1}^{p} G_i(0)x(-\tau_i) - \int_{-\tau}^{0} H(0,\theta)x(\theta)d\theta] = \\
= \int_0^t \sum_{i=0}^{p} P_i(t)x(t-\tau_i)dt + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} Q(t,\theta)x(t+\theta)d\theta dt;
\end{gathered} \tag{5.33}$$

$$\begin{gathered}
[z_0(t) - \sum_{i=1}^{p} G_i(t)z_{l_i}(t) - \frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} H(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)] - \\
-[z_0(0) - \sum_{i=1}^{p} G_i(0)z_{l_i}(0) - \frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} H(0, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(0)] = \\
= \int_0^t \sum_{i=0}^{p} P_i(t)z_{l_i}(t)dt + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} Q(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)d\theta dt.
\end{gathered} \tag{5.34}$$

Встановимо деякі властивості розв'язків задачі Коші (5.20)–(5.21). Нехай початкові умови для системи (5.20)–(5.21) задовольняють нерівності $\sum\limits_{i=1}^{n} |z_{ji}(0)| < \delta$, $j = \overline{0,m}$.

Позначимо

$$M(t) = \max_{s\in[0,t]}[\delta, \sum_{i=1}^{n} |z_{0i}(s)|]. \tag{5.35}$$

Із векторного рівняння

$\frac{dz_1}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_0(t) - z_1(t))$ одержимо

$$z_{1i}(t) = z_{1i}(0)exp(\frac{-mt}{\tau}) + \frac{m}{\tau}\int_0^t z_{0i}(s)exp(\frac{m(s-t)}{\tau})ds.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{1i}(t)| \le M(t)(exp(\frac{-mt}{\tau}) + \frac{m}{\tau}\int_0^t exp(\frac{m(s-t)}{\tau})ds) = M(t).$$

Аналогічно, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ji}(t)| \le M(t), j = \overline{1,m}. \tag{5.36}$$

Враховуючи рівність (5.34), маємо

$$\begin{gathered} M(t) \le \delta + n(pK_G + \tau K_H)M(t) + n(pK_G + \tau K_H)M(0)+ \\ +n(pK_P + \tau K_Q) \int\limits_0^t M(s)ds. \end{gathered} \tag{5.37}$$

Використовуючи тепер лему Гроноулла-Беллмана [93] та позначення (5.35), маємо

$$\begin{gathered} M(t) \le (\delta + n(pK_G + \tau K_H)M(t) + n(pK_G + \tau K_H)M(0))\times \\ \times e^{n(pK_P+\tau K_Q)T} = K_Z. \end{gathered} \tag{5.38}$$

Із рівностей (5.33),(5.34), враховуючи властивості матриць $G_i(t), P_j(t)$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{0,p}$, $H(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$, та нерівності (5.38), дістаємо

$$\begin{gathered} N_0(t)[1 - pK_G - \tau K_H] \le \Big[pK_G(\gamma(\tfrac{\tau}{\sqrt{m}}) + n\omega(\tfrac{\tau}{m}))+ \\ +\tau[K_H(n\omega(\tfrac{\tau}{m}) + \gamma(\tfrac{\tau}{\sqrt{m}})) + K_Z\omega_H] + pK_G n\omega(\tfrac{\tau}{m})+ \\ +\tau[K_H n\omega(\tfrac{\tau}{m}) + K_Z\omega_H] + T(p+1)K_P[\gamma(\tfrac{\tau}{\sqrt{m}}) + n\omega(\tfrac{\tau}{m})]+ \\ +T\tau[K_Q[n\omega(\tfrac{\tau}{m}) + \gamma(\tfrac{\tau}{\sqrt{m}})] + K_Z\omega_Q] + [(p+1)K_P + \tau K_Q] \Big] \int\limits_0^t N_0(s)ds. \end{gathered} \tag{5.39}$$

Із останньої нерівності дістаємо

$$N_0(t) \le \alpha + \beta \int_0^t N_0(s)ds,$$

де

$$\alpha = \frac{[\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + n\omega(\frac{\tau}{m})] \cdot [pK_G + \tau K_H + T\tau K_Q + T(p+1)K_P] + \tau K_Z\omega_H +}{[1 - pK_G - \tau K_H]}$$

$$\frac{+pK_G n\omega(\frac{\tau}{m}) + \tau[K_H n\omega(\frac{\tau}{m}) + K_Z\omega_H] + T\tau K_Z\omega_Q}{[1 - pK_G - \tau K_H]},$$

$$\beta = \frac{[(p+1)K_P + \tau K_Q]}{[1 - pK_G - \tau K_H]}.$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла-Беллмана [93], одержуємо

$$N_0(t) \leq \alpha(\frac{\tau}{m})e^{\beta}, t \in [0,T], \tag{5.40}$$

Оскільки $\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})$, $\omega(\frac{\tau}{m})$, $\omega \to 0$ при $m \to \infty$, тоді

$$\lim_{m\to\infty} \alpha(\frac{\tau}{m}) = 0.$$

Із останнього співвідношення випливає, що розв'язки задачі Коші (5.20)–(5.21) апроксимують розв'язки початкової задачі (5.17)–(5.18) при $t \in [0,T]$ і $m \to \infty$.

Теорема 5.4. *Нехай $G_i(t)$, $P_i(t)$, $i = \overline{0,p}$ – $n\times n$ неперервні матричні функції при $t \in [0,T], H(t,\theta), Q(t,\theta)$ – матричні функції, компоненти яких неперервні за сукупністю змінних функції на $[0,T]\times[-\tau,0]$, $0 < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = \tau$ і виконується умова (5.19). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (5.20),(5.21) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (5.17)–(5.18) при $t \in [0,T]$ і $m \to \infty$.*

Для ілюстрації дослідженої в даному пункті схеми апроксимації наведемо модельний приклад.

Приклад 5.1. Розглянемо початкову задачу

$$\frac{d}{dt}[x(t) - x(t-1)] = x(t) + 2x(t-1), t \in [0, 0.8],$$
$$x(t) = 2t + \frac{2}{3}, t \in [-1, 0].$$

Відповідна їй апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = z_0(t) + 2z_m(t) + m(z_{m-1}(t) - z_m(t)),$$
$$\frac{dz_j(t)}{dt} = m(z_{m-j}(t) - z_j(t)), \;\; j = \overline{1,m},$$
$$z_j(0) = \frac{-2j}{m} + \frac{2}{3}, \;\; j = \overline{0,m}.$$

В Таблиці 5.1 наведені результати числових експериментів обчислення значень $z_0(t)$ для $m = 5, 8, 16$ з використанням різницевої схеми Гіра першого порядку, значення точного розв'язку вихідної задачі $x_T(t) = 4e^t - 4t - \frac{10}{3}$, $t \in [0,1]$, а також відповідні похибки $\triangle_5$, $\triangle_8$, $\triangle_{16}$.

Таблиця 5.1

t	$x_T(t)$	$z_0(m=5)$	$\triangle_5$	$z_0(m=8)$	$\triangle_8$	$z_0(m=16)$	$\triangle_{16}$
0	0,66667	0,66667	0,00000	0,66667	0,00000	0,66667	0,00000
0,1	0,68735	0,68701	0,00034	0,68713	0,00022	0,68801	0,00066
0,2	0,75228	0,75054	0,00174	0,75088	0,00140	0,75186	0,00042
0,3	0,86610	0,86116	0,00494	0,86308	0,00302	0,86436	0,00174
0,4	1,03396	1,02074	0,01322	1,02772	0,00624	1,03058	0,00338
0,5	1,26155	1,23220	0,02935	1,24969	0,01186	1,25856	0,00299
0,6	1,55514	1,49637	0,05877	1,52803	0,02711	1,54979	0,00535
0,7	1,92168	1,81639	0,10529	1,86329	0,05839	1,90427	0,01740
0,8	2,36883	2,19905	0,16978	2,25871	0,11012	2,32001	0,04882

Бачимо, що із ростом розмірності m апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь похибка наближень $z_0(t)$ (по відношенню до $x(t)$) зменшується, що підтверджує теоретичні висновки з теореми 5.4.

5.3 Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

5.3.1 Лінійні диференціальні рівняння нейтрального типу з одним відхиленням аргументу

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\frac{dx(t-\tau)}{dt}, \tag{5.41}$$

де $A, B, C \in R,\ \tau > 0$.

Характеристичний квазіполіном для рівняння (5.41) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = A - \lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau}. \tag{5.42}$$

Застосуємо для рівняння (5.41) схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь підвищеної точності [94]. Аналогічно, як в попередньому пункті, одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dz_0(t)}{dt} = Az_0(t) + Bz_m(t) + Cz_{2m}(t), \\ &\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{m+j}(t), \\ &\frac{dz_{m+j}(t)}{dt} = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t), \\ &j = \overline{1,m},\ m \in \mathbb{N},\ \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Лема 5.3. *Для характеристичного рівняння системи (5.43) справджується рівність*

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m + B + C\lambda = 0. \tag{5.44}$$

Перевіримо, що при $m = 2, 3$ рівність (5.44) справедлива.

Для $m = 2$ безпосередньо обчислюючи, дістаємо

$$D_5(\lambda) = (A-\lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{2}(1 + \frac{\lambda\tau}{4}))^2 + C\lambda + B = 0.$$

Для $m = 3$ маємо

$$D_7(\lambda) = \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи виписаний визначник за першим рядком, одержимо

$$D_7(\lambda) = (A-\lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{3}(1 + \frac{\lambda\tau}{6}))^3 + B + C\lambda = 0.$$

Отже, для $m = 2, 3$ рівність (5.44) вірна. Припустимо, що для деякого $m - 1$ вона вірна і доведемо, що вона справджується для m.

Виписуючи характеристичне рівняння системи (5.43)

$$D_{2m+1}(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & \dots & C \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і розкриваючи одержаний визначник за елементами першого рядка, маємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)I_1^m + (-1)^{m+2}BI_2^m + (-1)^{2m+2}CI_3^m = 0. \tag{5.45}$$

Для визначників I_1^m та I_3^m неважко одержати рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda) + 2\mu^2)I_1^{m-1}, \\ I_3^m &= 2\mu^2 I_3^{m-1}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Із рекурентних співвідношень (5.46) одержуємо

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda) + 2\mu^2)^m, \\ I_3^m &= \lambda(2\mu^2)^m. \end{aligned}$$

Обчислюючи визначник I_2^m, використавши його структуру, маємо

$$I_2^m = (-1)^{m(m+2)}(2\mu^2)^m.$$

Підставляючи значення I_1^m, I_2^m, I_3^m у рівність (5.45), одержуємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^m + B(-1)^{(m+1)(m+2)}(2\mu^2)^m + C\lambda(2\mu^2)^m = 0.$$

Зважаючи на те, що $(m+1)(m+2)$ завжди парне, а $\mu = \frac{m}{\tau}$, тоді

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A-\lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m + B + C\lambda = 0.$$

Лема 5.4. *Для фіксованих $\lambda \in \mathbb{Z}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m \in \mathbb{N}, \tag{5.47}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (5.42).

Розглянемо фіксоване $\lambda \in \mathbb{Z}$. Тоді $\lambda \neq -\frac{m}{\tau} \pm \frac{m}{\tau} i$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in \mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи рівність (5.44), маємо

$$H_m(\lambda) = (A-\lambda)+B(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-m}+C\lambda(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-m} = 0. \quad (5.48)$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{-m} = e^{-\lambda\tau},$$

переходячи в рівності (5.48) до границі при $m \to \infty$, для фіксованого $\lambda \in \mathbb{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty} H_m(\lambda) = A - \lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau}.$$

Зауваження 5.2. Оскільки нулі функцій $D_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (5.47), збігаються, то корені характеристичного многочлена (5.44) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (5.54).

5.3.2 Порівняння схем апроксимації

Згідно результатів пункту 5.3.1 неасимптотичні корені квазіполінома лінійного рівняння нейтрального типу можна наближати нулями характеристичного многочлена відповідної апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. Для обчислення коренів многочленів використаємо функцію polyroots(v) із пакета Mathcad, яка повертає вектор, що містить всі корені многочлена, коефіцієнти якого є елементами вектора v.

У працях [95; 96] досліджено наближення рівняння нейтрального типу (5.41) системою звичайних диференціальних рівнянь згідно схеми Красовського–Рєпіна вигляду

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz_0(t)}{dt} = Az_0(t) + \mu C z_{m-1}(t) + (B - \mu C) z_m(t), \\
&\frac{dz_i(t)}{dt} = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \\
&i = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau},\ l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}],\ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{5.49}
$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (5.49) одержано зображення

$$
\Psi_m(\lambda) = (A - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^m + B + \lambda C = 0 \tag{5.50}
$$

і показано, що корені характеристичного рівняння (5.50) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (5.42).

Здійснивши заміну $\lambda = (v - 1)\frac{m}{\tau}$ в рівності (5.50), одержимо вигляд многочлена

$$
v^{m+1} - (1 + \frac{A\tau}{m})v^m - Cv - (\frac{B\tau}{m} - C) = 0,
$$

який зручний для чисельного знаходження коренів.

Приведемо характеристичне рівняння (5.44) із схеми апроксимації підвищеної точності до вигляду, зручного для реалізації на ЕОМ. Здійснимо в (5.44) заміну $\lambda = \frac{m}{\tau}(s - 1)$, одержимо

$$
(A + \frac{m}{\tau} - \frac{m}{\tau}s)(s^2 + 1)^m + 2^m B + 2^m C\lambda = 0.
$$

Розкладаючи $(s^2 + 1)^m$ за степенями s, дістанемо рівняння у стандартному вигляді

$$
\alpha_0 s^{2m+1} + \alpha_1 s^{2m} + \alpha_2 s^{2m-1} + \ldots + \alpha_{2m} s + \alpha_{2m+1} = 0,
$$

де коефіцієнти $\alpha_i, i = \overline{0, 2m - 1}$ обчислюються за формулами

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = -\tfrac{m}{\tau}, \quad \alpha_1 = A + \tfrac{m}{\tau}, \\
&\alpha_{2m} = -\tfrac{m}{\tau} + 2^m C \tfrac{m}{\tau}, \\
&\alpha_{2m+1} = A + \tfrac{m}{\tau} + 2^m B - 2^m C \tfrac{m}{\tau}, \\
&\alpha_{2i} = -\tfrac{m}{\tau} C_m^i, \quad i = \overline{1, m-1}, \\
&\alpha_{2i+1} = (A + \tfrac{m}{\tau}) C_m^i, \quad i = \overline{1, m-1}.
\end{aligned}
$$

Приклад 5.2. Розглянемо рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + x(t-1) + \frac{dx(t-1)}{dt} \tag{5.51}$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda = 2 + e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}. \tag{5.52}$$

Дійсний корінь квазіполінома (5.52) з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda = 1,6879$.

Здійснимо апроксимацію рівняння (5.51) системою звичайних диференціальних рівнянь за схемою Красовського–Рєпіна і за схемою підвищеної точності. Для наближення коренів квазіполінома (5.52) обчислюємо корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем за допомогою функції polyroots(v) із пакета Mathcad.

Результати обчислень для кореня із найбільшою дійсною частиною при різних $m(m > 3)$, наведені в Таблиці 3, де $\lambda_i^{\text{К.Р.}}$ – одержане наближення за схемою Красовського–Рєпіна, а $\lambda_i^{\text{П.Т.}}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Таблиця 5.2

m	λ_T	$\lambda_1^{\text{К.Р.}}$	$\triangle_{\text{К.Р.}}$	$\lambda_1^{\text{П.Т.}}$	$\triangle_{\text{П.Т.}}$
4	1,6879	1,5837	0,1042	1,6753	0,0126
10	1,6879	1,6415	0,0464	1,6852	0,0027
16	1,6879	1,6582	0,0297	1,6872	0,0007

Із Таблиці 5.2 видно, що наближення за схемою підвищеної точності є значно ефективнішими, ніж наближення за схемою Красовського–Рєпіна.

5.3.3 Лінійні диференціальні рівняння нейтрального типу із багатьма відхиленнями аргументу

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з багатьма відхиленнями аргументу вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{dx(t-\tau_i)}{dt}, \tag{5.53}$$

де $A_i, B_i,\ i=\overline{0,n}$ – сталі, $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_n=\tau$.

При дослідженні рівняння (5.53) важливе значення має розміщення нулів його характеристичного квазіполінома

$$\Phi(\lambda)=\lambda-\sum_{i=0}^{n}A_ie^{-\lambda\tau_i}-\lambda\sum_{i=1}^{n}B_ie^{-\lambda\tau_i}=0. \tag{5.54}$$

Апроксимуюча система підвищеної точності для рівняння (5.53) має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_0(t)}{dt}=\sum_{j=0}^{n}A_jz_{l_j}(t)+\sum_{j=1}^{n}B_jz_{l_j+m}(t),\\
&\frac{dz_i(t)}{dt}=z_{i+m}(t),\\
&\frac{dz_{i+m}(t)}{dt}=2\mu^2\left[z_{i-1}(t)-z_i(t)\right]-2\mu z_{i+m}(t),\quad i=1,...,m,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

де $\mu=\frac{m}{\tau}$, $l_j=[\frac{m\tau_j}{\tau}]$.

Покажемо, що при $m\to\infty$ корені характеристичного многочлена системи (5.55) апроксимують неасимптотичні корені квазіполінома (5.54).

Для знаходження аналітичного вигляду характеристичного многочлена системи звичайних диференціальних рівнянь (5.55) розглянемо спочатку випадок рівняння з двома відхиленнями аргументу.

Випишемо характеристичне рівняння системи (5.55) при $n=2$, покладаючи $k=[\frac{m\tau_1}{\tau_2}]$:

$$D^2_{2m+1}(\lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix}
A_0-\lambda & 0 & \dots & 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 & A_2 & 0 & \dots & B_1 & 0 & \dots & 0 & B_2\\
0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\
2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\mu-\lambda
\end{vmatrix}. \tag{5.56}$$

Лема 5.5. *Для характеристичного рівняння (5.56) справджується рівність*

$$D^2_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^m + A_1\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k} +$$
$$+A_2 + B_1\lambda\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k} + B_2\lambda = 0. \tag{5.57}$$

Розглянемо тепер характеристичне рівняння системи (5.55) при довільному $n \in \mathbb{N}$

$$D^n_{2m+1}(\lambda) =$$
$$= \begin{vmatrix} A_0-\lambda & 0 & \dots & 0 & A_i & 0 & \dots & 0 & A_n & 0 & \dots & B_i & 0 & \dots & 0 & B_n \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix}. \tag{5.58}$$

Лема 5.6. *Для характеристичного рівняння (5.58) справджується рівність*

$$D^n_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^m + \sum_{i=1}^{n-1} A_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{m-l_i} +$$

$$+A_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda B_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{m-l_i} + \lambda B_n = 0. \tag{5.59}$$

Лема 5.7. *Для фіксованих $\lambda \in \mathbb{Z}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{D^n_{2m+1}(\lambda)}{(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m \in \mathbb{N}, \tag{5.60}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (5.54).

Дійсно, розглянемо фіксоване $\lambda \in \mathbb{Z}$. Тоді $\lambda \neq -\frac{m}{\tau} \pm \frac{m}{\tau} i$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in \mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи рівність (5.60), маємо

$$H_m(\lambda) = (A_0-\lambda)+\sum_{i=1}^{n-1} A_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+A_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+\lambda B_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m}=0. \quad (5.61)$$

На підставі відомих границь

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{-m}=e^{-\lambda\tau},$$

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{\frac{-\tau_i m}{\tau}}=e^{-\lambda\tau_i}$$

та означення числа l_i одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}((A_0-\lambda)+\sum_{i=1}^{n-1} A_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+A_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+\lambda B_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m})=$$

$$=A_0-\lambda+\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i}+A_n e^{-\lambda\tau}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i e^{-\lambda\tau_i}+\lambda B_n e^{-\lambda\tau}.$$

Отже, переходячи в рівності (5.61) до границі при $m\to\infty$, для фіксованого $\lambda\in\mathbb{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty}H_m(\lambda)=\lambda-\sum_{i=0}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i}-\lambda\sum_{i=1}^{n} B_i e^{-\lambda\tau_i}.$$

Зауваження 5.2. Оскільки нулі функцій $D^n_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно рівності (5.60), збігаються, то корені характеристичного многочлена (5.59) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (5.54).

Одержані в цьому розділі результати опубліковані у [83, 88, 97–105].

6 ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

У розділі 6 описуються основні теореми про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішних збурень та існування і стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних із випадковими параметрами.

6.1 Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішних збурень

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференцальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [108], [109], [111], [112], [113], [116], [117]. У працях [114], [115] А.Н. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Дана робота розглядає питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішних збурень, незалежних від вінерівського процесу.

6.1.1 Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу в частинних похідних під дією випадкових зовнішних збурень, незалежних від вінерівського процесу

$$d\left(u(t,x)+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,y)\,u(t-\tau,y)\,dy\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(\gamma_j)\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}dt+\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\,\sigma(t,u(t-\tau,x))\,dw(t,x)\,, \qquad (6.1)$$

для $t\in(0,T]\,,\; x\in\mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t,x)=\psi(t,x)\,,\quad \forall t\in[-\tau,0]\,, \qquad (6.2)$$

де $\gamma_j\equiv\gamma_j(\omega)\in\mathbf{R}^1$, $j=\overline{1,r+1}$, незалежні попарно та незалежні від вінерівського процесу $w(t,x)$ випадкові величини; зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j=\overline{1,r+1}$, — берівські функції, додатні, попарно незалежні та незалежні від вінерівського процесу і початкової функції; $T\in(0,\infty)$ — фіксований дійсний час, $\tau>0$, випадковий r-вимірний оператор Лапласа [106], [109]

$$\Delta_x(\omega)\equiv\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(x_j)\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}, \qquad (6.3)$$

$w(t,x)$ – $L_2(\mathbf{R}^r)$-вимірний Q-вінерівський процес [107]; $\sigma:[0,T]\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ і $b:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi:[-\tau,0]\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

6.1.2 Обговорення попередніх результатів та означення

Наведемо декілька тверджень з праць [114]–[117].

Лема 6.1 [117, с.188]. *Оператор*

$$S(t):L_2(\mathbf{R}^r)\to L_2(\mathbf{R}^r) \qquad (6.4)$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1, [114]) за початковими даними (6.2) *з імовірністю 1*

$$d(u(t,x))+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)\,u(t-\tau,z)\,dz=$$

$$=\Delta_x u(t,x)\,dt, \qquad (6.5)$$

за правилом

$$u\left(t,x\right)=\left(s\left(t\right)g\left(\bullet\right)\right)\left(x\right)=\int_{\mathbf{R}^{r}}K\left(t,x-y\right)g\left(\bullet\right)dy, \tag{6.6}$$

та утворює C_{0-} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x\left(\omega\right)$ (6.3). А ця напівгрупа $S\left(t\right)$ є стискаючою, тобто

$$\left\|\left(S\left(t\right)g\left(\bullet\right)\right)\left(x\right)\right\|^{2}_{L_2(\mathbf{R}^r)}\leq\left\|g\left(x\right)\right\|^{2}_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \tag{6.7}$$

Уведемо потік (фільтрацію) σ-алгебр $\{F_t, t\geq t_0\geq 0\}$, який породжений $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$-значним Q-вінерівським процесом

$$w\left(t,x\right)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}e_n\left(x\right)\beta_n\left(t\right), \tag{6.8}$$

де $\{\beta_n\left(t\right)\equiv\beta_n\left(t,\omega\right)\}\subset\mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерівські (броунівські) процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\equiv\lambda<\infty. \tag{6.9}$$

При цьому система векторів $e_n\left(x\right)\equiv\bar{e}_n\left(x\right)$ утворюють ортонормований базис у $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$ такий, що

$$\sup_{n\in\{1,2,\ldots\}}\ ess\sup_{x\in\mathbf{R}^r}\left|e_n\left(x\right)\right|\leq 1. \tag{6.10}$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$-значних F_t-вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\Phi\left(\bullet\right)\equiv\Phi\left(t,\omega\right):[0,T]\times\Omega\to L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$ з нормою

$$\left\|\Phi\left(\bullet\right)\right\|_{B_{2,T}}\equiv\sqrt{\sup_{0\leq t\leq T}\mathbf{E}\left\|\Phi\left(t,\omega\right)\right\|^{2}_{L_2(\mathbf{R}^r)}}. \tag{6.11}$$

Означення 6.1. Неперервну випадкову функцію $u\equiv u\left(t,x,\omega\right):[-\tau,T]\times\mathbf{R}^r\times\Omega\to\mathbf{R}^1$ назвемо м'яким розв'язком задачі (6.1), (6.2), якщо виконуються умови:

1. u є F_T-вимірною для майже всіх $t\in[-\tau,T]$ та фіксованих $x\in\mathbf{R}^r$, $\omega\in\Omega$;

2. u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$u\left(t,x,\omega\right)=\int_{\mathbf{R}^r}K\left(t,x-y\right)\times$$

$$\times\left(\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z)\,\psi(-\tau,z)\,dz\right)dy-$$

$$-\int_{\mathbf{R}^r} b(0,x,y)\,u(t-\tau,y)\,dy-$$

$$-\int_0^t\left(\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(\gamma_j)\,\Delta_x(\omega)\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\mathbf{R}^r} b(s,y,z)\,u(s-\tau,z)\,dzdy\right)ds+$$

$$+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\,\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\times\right.$$

$$\times\sigma(s,u(s-\tau),y)\,e_n(y)\,dy)\,d\beta_n(s) \tag{6.12}$$

для $t\in[0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початковою умовою (6.2);

3. існує норма

$$E\left\{\int_0^T\|u(t,x,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\,dt\right\}<\infty. \tag{6.13}$$

Лема 6.2 [115]. *Вираз* (6.13) *для випадкової функції* $u(t,x,\omega)$ *є нормою.*

6.1.3 Основний результат

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega,F,\{F_t,t\geq t_0\},\mathbf{P})$ побудований [106–110] для задачі (6.1), (6.2), яка є предметом дослідження цієї роботи.

Основне твердження

Нехай для задачі (6.1), (6.2) виконано умови:

1. Коефіцієнт $\sigma\equiv\sigma(t,u,x)$ є:

1а) вимірним за всіма аргументами;

1б) задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом

$$|\sigma(t,u,x)-\sigma(t,v,x)|\leq L\,|u-v|$$

для $\forall t\in[0,T]$, $u,v\in\mathbf{R}^1$, $x\in\mathbf{R}^r$;

2. Початкова функція $\psi(t,x,\omega)$ є:

2а) F_0-вимірною відносно аргумента $t \in [0,T]$;

2б) незалежною від вінерівського процесу $w(t) \equiv w(t,\omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0,T]$;

2в) незалежною від зовнішніх збурень $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$;

2г) має норму

$$\sup_{-\tau \le t \le 0} \mathbf{E} \|\psi(t,x,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} < \infty; \tag{6.14}$$

3. Функція $b \equiv b(t,x,y)$ задовольняє умови:

3а)

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\, dy dx} = K_1; \tag{6.15}$$

3б)

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\, dy dx = K_2; \tag{6.16}$$

3в) для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i,j\} \subset \{1,2,...,r\}$;

3г) матриця Гессе $D^2_x b$ задовольняє умову

$$|\nabla_x b(t,x,y)| + \left\|D^2_x b(t,x,y)\right\| \le Z(t,x,y), \tag{6.17}$$

для $\forall t \in [0,T] \subset [0,\infty)$, $\{x,y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $Z : [0,T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to [0,\infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтегралу

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z(t,x,y)\, dx dy = K_3 < \infty; \tag{6.18}$$

4. Для функції $Z(t,x,y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|Z(t,x,z) - Z(t,x_0,z)| \le \zeta(t,z,x_0,\delta)\, |x - x_0|,$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t,z,x_0,\delta)$ для $\forall t \in [0,T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \le t \le T} \zeta(t,\cdot,x_0,\delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \delta \in \mathbf{R}_+; \tag{6.19}$$

5. зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$,

   5а) попарно незалежні;

   5б) незалежні від вінерівського процесу та від початкової функції $\psi(t,x) \equiv \psi(t,x,\omega) \in \mathbf{R}^1$;

   5в) виконується умова обмеженості математичних сподівань квадратів зовнішних збурень $\mathbf{E}\left\{\varphi_{r+1}^2\right\} \le K_4 < \infty$.

Тоді задача (6.1), (6.2) для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t,x,\omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0,T]$, якщо

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\,dxdy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \tag{6.20}$$

6.2 Про існування та стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних із випадковими параметрами

Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено велику кількість робіт, які вказані в монографіях [93], [118], [119], і не менша кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених була опублікована в кінці XX – на поч. XXI ст.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння у відомих монографіях [108], [120] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [121–123] стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними (див., наприклад, роботи [108], [109], [124], [111] та ін.)

Подальше дослідження стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода з частинними похідними йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри в цих рівняннях (див. [108], [121], [111], [125] та ін).

Дана робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки сильного розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними з урахуванням випадкових параметрів [109], [111].

6.2.1 Постановка задачі

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором [93], [120], [108], [121] $(\Omega, F, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, $\mathrm{F} \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ – фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega) \in \mathrm{R}^1$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ-алгебри $B\left([0, T], \mathrm{R}^1\right)$ борельових множин на площині [110], [125] та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\left\{|u(t, x, \omega)|^2\right\} dx < \infty \tag{6.21}$$

для всіх $t \in [0, T]$, $\mathrm{E}\{\bullet\}$ – математичне сподівання [118], $T \subset [0, \infty)$. Позначимо через $\mathfrak{M}_T$ простір функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, що мають властивість інтегровності (6.21).

Уведемо норми [108], [110]:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathrm{R}^1}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx; \tag{6.22}$$

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2T}}^2 \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt; \tag{6.23}$$

$$\mathrm{E}_u(t) \equiv \mathrm{E}\left\{\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathrm{R}^1}}^2\right\}, \tag{6.24}$$

де через $L_{2\mathrm{R}^1}$ і L_{2T} позначені простори функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, які мають відповідні норми (6.22)–(6.24).

У просторі $\mathfrak{M}_T$ треба ввести норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathrm{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx\right]^2 dt. \tag{6.25}$$

Позначимо через

$$Q(A(\xi(\omega)), q, p) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj}(\xi(\omega)) q^k p^j, \tag{6.26}$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}$ матриця розмірності $n \times m$, складена з елементів $a_{kj} \in \mathrm{R}^1$.

У просторі $\mathfrak{M}_T$ з (6.25) розглянемо підпростір $\mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T$, для елементів якого має місце включення

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t, x, \omega\right) \in \mathfrak{M}_T. \tag{6.27}$$

У $(\Omega, F, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ розглянемо задачу Коші для лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A\left(\xi_1\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\right] +$$

$$+Q\left(B\left(\xi_2\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) =$$

$$= Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t, x, \omega\right) \frac{dw\left(t, \omega\right)}{dt} +$$

$$+ \int_{\mathbf{V}} Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right) u\left(t, x, \omega\right) \tilde{\nu}\left(dt, dv\right), \tag{6.28}$$

$$Q\left(A\left(\xi_1\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t, x, \omega\right)\Big|_{t=0} = \left[Qu\right]_0, \tag{6.29}$$

де Q визначено у (6.26), (6.27) матриці $B \equiv \{b_{ij}\left(\xi_2\left(\omega\right)\right)\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij}\left(\xi_2\left(\omega\right)\right) \in \mathrm{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}\left(\xi_3\left(\omega\right)\right)\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij}\left(\xi_3\left(\omega\right)\right) \in \mathrm{R}^1$, $D \equiv \{d_{ij}\left(\xi_4\left(\omega\right), v\right)\}_{i,j=1}^{k,n}$, $d_{ij}\left(\xi_4\left(\omega\right), v\right) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{V}$, де $\xi_i\left(\omega\right), i = 1, 2, 3, 4$, випадкові величини, які задані щільністю $p_{\xi_i}\left(x\right), i = 1, 2, 3, 4$, (або функцією розподілу $F_{\xi_i}\left(x\right) \equiv \mathrm{P}\left\{\omega : \xi_i\left(\omega\right) < x \;\forall\; x \in \mathrm{R}^1\right\}$, i=1,2,3,4 [118]), $w\left(t, \omega\right)$ – одновимірний вінерів процес [124], та $\xi_i\left(\omega\right)$, i=1,2,3,4, не залежать від $w\left(t, \omega\right)$. $\tilde{\nu}\left(dt, A\right) \equiv \nu\left(dt, A\right) - \Pi\left(A\right) dt$ – центрована пуассонова міра.

Під сильним розв'язком задачі Коші (6.28), (6.29) будемо розуміти неперервну з імовірністю одиниця за $t \in [0, T]$ функцію $u\left(t, x, \omega\right)$, узгоджену з фільтрацією $\{F_t, t \in [0, T]\}$, і таку, що з імовірністю одиниця для кожної пари (t, x) задовольняє інтегральне стохастичне рівняння [93], [120], [124]

$$Q\left(A\left(\xi_1\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) = \left[Qu\right]_0 +$$

$$+ \int_0^t Q\left(B\left(\xi_2\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega) ds +$$

$$+\int_0^t Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s,x,\omega) dw\left(s,\omega\right) ds+$$
$$+\int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right) u\left(s,x,\omega\right) \tilde{\nu}\left(ds, dv\right) \tag{6.30}$$

з початковими невипадковими умовами (6.29).

6.2.2 Існування розв'язку задачі Коші для лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними у просторі $\mathfrak{M}_{1T}$

Для встановлення факту існування сильного розв'язку задачі Коші для (6.28)–(6.29) доведемо спочатку допоміжний результат.

Лема 6.3. *Перетворення Фур'е за x для функції $u\left(t,x,\omega\right)$*

$$v\left(t,\sigma,\omega\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u\left(t,x,\omega\right) dx \tag{6.31}$$

не виводить її з простору $\mathfrak{M}_T$ для довільного скінченного $T \subset \mathrm{R}^1$.

Теорема 6.1. *Нехай для задачі Коші* (6.28), (6.29) *виконуються умови:*

1. *Корені полінома $P\left(\lambda\left(x\right), i\sigma\right) \equiv \lambda Q\left(A\left(x\right), \lambda, i\sigma\right) + Q\left(B\left(x\right), \lambda, i\sigma\right)$ при кожному фіксованому $x \in \mathrm{R}^1$ та $\sigma \neq 0$ задовольняють нерівність $Re\lambda\left(x\right) \leq \psi\left(\sigma\right) < 0$, $\psi\left(0\right) = 0$;*

2. *$\forall\, t \in [0,T]$ та $C\left(x\right) \equiv 0_{k\times n}$, $D\left(x\right) \equiv 0_{k\times n}$ детерміноване рівняння*
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A\left(x\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{u}\left(t,x\right)\right] +$$
$$+Q\left(B\left(x\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{u}\left(t,x\right) = 0 \tag{6.32}$$
має розв'язок $\tilde{u}\left(t,x\right)$ задачі Коші в $L_{2\mathrm{R}^1}$ з початковими умовами
$$Q\left(A\left(x\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{u}\left(t,x\right) = \left[Q\tilde{u}\right]_0; \tag{6.33}$$

3. *Випадкові величини $\xi_i\left(\omega\right)$, $i = 1,2,3,4$, не залежать від $w\left(t,\omega\right)$ та $\tilde{\nu}\left(dt, A\right)$.*

Тоді стохастична задача Коші (6.28), (6.29) *при $C\left(x\right) \neq 0_{k\times n}$ має розв'язок у просторі $\mathfrak{M}_{1T}$.*

6.2.3 Асимптотична поведінка в середньому квадратичному сильного розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 6.4. *Нехай для лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода з частинними похідними* (6.28), (6.29) *виконуються умови теореми 6.1. Тоді:*

1. *Для довільної матриці* $C(x) \neq 0_{k\times n}$ *має місце включення*

$$\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right)\right|^2 H\left(t,\sigma\right) \in L_{2,(0,+\infty)}, \tag{6.34}$$

2. *Для відповідної норми цього простору справджується рівність*

$$\mathrm{E}\left\|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) H\left(t,\sigma\right)\right\|^2_{L_{2T}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda, i\sigma\right)\right|^2} d\lambda \equiv S\left(\sigma\right), \tag{6.35}$$

3. *Для довільної матриці* $D(x) \neq 0_{k\times n}$*має місце включення*

$$\int_{\mathbf{V}} \mathrm{E}\left|Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right)\right|^2 H\left(t,\sigma\right)\Pi\left(d\sigma\right) \in L_{2,(0,+\infty)}, \tag{6.36}$$

4. *Для відповідної норми цього простору справджується рівність*

$$\int_{\mathbf{V}} \mathrm{E}\left\{Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right) H\left(t,\sigma\right)\right\}\Pi\left(dv\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{V}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}\left|Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma, v\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda, i\sigma\right)\right|^2} d\lambda \Pi\left(dv\right) \equiv$$
$$\equiv S_1\left(\sigma\right). \tag{6.37}$$

Теорема 6.2. *Нехай виконуються умови теореми 6.1. Тоді:*

1. *Якщо* $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma) < 1$, *тоді* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}_U(t) = 0$, *де*

$$U\left(t,x,\omega\right) \equiv Q\left(R\left(\xi\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t,x,\omega\right)$$

для довільної дійснозначної матриці R;

2. *Якщо* $S(\sigma) > 1$ *на множині* Λ *міри Лебега, тоді* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}_U(t) = +\infty$.

6.2.4 Задача втрати стійкості стрижня

У праці [111] досліджується поведінка стрижня, на який діє "білий шум". Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, яку тлумачимо як формальний запис, оскільки вона не існує в жодній точці з імовірністю одиниця, а в узагальненому розумінні похідна вінерового процесу – це нормальний "білий шум" [131], а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\left(\xi_1\left(\omega\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\xi_2\left(\omega\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\left(\xi_3\left(\omega\right)\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \quad (6.38)$$

з початковими умовами

$$u\left(0,x\right) = f_1\left(x\right), \frac{\partial u\left(0,x\right)}{\partial t} = f_2\left(x\right) \quad (6.39)$$

та крайовими умовами

$$u\left(t,0\right) = u\left(t,l\right) = \frac{\partial u\left(t,0\right)}{\partial x} = \frac{\partial u\left(t,l\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u\left(t,0\right)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u\left(t,l\right)}{\partial x^2} = 0. \quad (6.40)$$

Тут $a\left(\xi_1\left(\omega\right)\right) > 0, b\left(\xi_2\left(\omega\right)\right) > 0, c\left(\xi_3\left(\omega\right)\right) > 0$ з імовірністю 1. Під функцією $u\left(t,x,\omega\right)$ розуміємо випадкову функцію, що не має розривів 2-го роду,тобто інтегровна в розумінні пункту 1. Аналогічно до дискретного випадку [119] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром $a\left(x\right), \forall x \in \mathrm{R}^1$, як найбільш допустиму інтенсивність процесів з взаємно незалежними значеннями, при якій система стійка в l.i.m., тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [108] $S_{k_1k_2}$ системи (6.38)–(6.40)

$$S_{k_1k_2} \equiv \sum_{k=0}^{m} a_{k_1k_2}\left(\xi\left(\omega\right)\right)\frac{\partial^k u\left(t,x\right)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} \quad (6.41)$$

за параметрами $a_{k_1k_2}\left(\xi_1\left(\omega\right)\right)$, $k = k_1 + k_2$.

Якщо позначити $P\left(\lambda,\sigma,\omega\right) \equiv \sum_{k=0}^{m} a_{k_1k_2}\left(\xi_1\left(\omega\right)\right)\lambda^{k_1}\left(i\sigma\right)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості $S_{k_1k_2}\left(x\right)$ системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1k_2}\left(x\right) \equiv \left[\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{k_1}\left|\sigma\right|^{k_2}}{\left|P\left(i\lambda,\sigma,x\right)\right|}d\lambda\right]^{-1}. \quad (6.42)$$

Використовуючи вищенаведене твердження (6.41), (6.42), знайдено [123] статистичний запас стійкості $S(x)$ за параметрами $a(x), b(x), c(x)$ системи (6.38)–(6.40):

$$S(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{\left(\sigma^4 + a(x)\sigma^2 - b(x)\lambda^2\right)^2 + c(x)^2 \lambda^2}\right]^{-1} =$$

$$= 2a(x)\, c(x), \forall x \in \mathrm{R}^1.$$

Отже, система (6.38)–(6.40) є стійкою в середньому квадратичному, $S(x) > \varepsilon^2, \forall x \in \mathrm{R}^1$.

Нехай на систему (6.38)–(6.40) діють зовнішні випадкові "збурення" типу $\xi(\omega)$ на праву частину стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (6.38). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішніми збуреннями $\varphi_i(\xi(\omega)), i = 1, 2$. Тоді (6.38) буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(\xi(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t,\omega)}{dt}. \tag{6.43}$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (6.43), (6.39), (6.40), маємо

$$S(\varphi_i) \equiv \left[\mathrm{E}\left\{|\varphi_i(\xi)|^2\right\} \sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{\left(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2\right)^2 + c^2\lambda^2}\right]^{-1} =$$

$$= \mathrm{E}\left\{|\varphi_i(\xi)|^2\right\} 2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в l.i.m. теореми 6.2, приходимо до висновку, що система (6.43), (6.39), (6.40) є стійкою в l.i.m., якщо

$$E\left\{\varphi_1^2(\xi(\omega))\right\} 2ac < 1, \tag{6.44}$$

та нестійкою в l.i.m., якщо поміняти знак на протилежний.

Нехай $\varphi_2(\xi(\omega)) \equiv 0$, $\varphi_1(\xi(\omega)) \equiv \varphi(\xi(\omega))$; $\xi(\omega)$ має закон розподілу $P\{\omega : \xi \equiv \mathbf{1}\} = P\{\omega : \xi = -1\} = \frac{1}{2}$ та $\varphi(\xi(\omega)) \equiv \xi(\omega)$. Тоді $\mathrm{E}\{\xi\} = 0$, $D\{\xi\} = 1$ й умова збігається з умовою (6.44).

Нехай $\varphi_2(\xi(\omega)) \equiv 0$, $\varphi_1(\xi(\omega)) \equiv \varphi(\xi(\omega))$. Якщо в якості закону розподілу $\xi(\omega)$ вибрати пуассоновий закон $\mathrm{P}\{\omega : \xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ та $\varphi(\xi) = \xi$, тоді $\mathrm{E}\xi = D\xi = \lambda$. Отже, умова стійкості в l.i.m. системи (6.43), (6.39), (6.40) буде мати вигляд $2ac\lambda < 1$, а нестійкості, відповідно, $2ac\lambda > 1$.

Запропонована в даному пункті стохастична модель складних систем, є спробою врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу [108], [109], [129], [130], але й випадкові збурення інших типів.

6.3 Оптимальне керування стохастичних динамічних систем випадкової структури з пуассоновими збуреннями і марковськими перемиканнями

Системи з марковськими параметрами належать до важливого класу систем, що описують процеси швидких змін станів, які трапляються в багатьох випадках, наприклад, в промисловості, в системах масового обслуговування [132], в екологічних системах [133], в економіці та фінансах, при моделюванні мікросіток [134].

Звернемо увагу на факт [135], що такі різкі зміни в системах є дискретними подіями і моделюються як ланцюг Маркова, який набуває скінченної кількості значень. Практичні застосування, а також багато теоретичних результатів для систем з марковськими стрибками можна знайти, наприклад, у [136], [138]. В [135] розглядається лінійна система наступного вигляду

$$\dot{x}(t) = (A(\xi(t)) + \Delta A(\xi(t)))x(t) + (B(\xi(t)) + \Delta B(\xi(t)))u(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x_0, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану, ξ – ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів, A, B – відомі сталі матриці для кожного фіксованого ξ; $\Delta A, \Delta B$ – невизначені матриці, які відповідають певні умови; $u \in \mathbb{R}^m$ – керування. Для такої системи розв'язано задачу синтезу оптимального керування з постійним оберненим зв'язком. У [133] розв'язана задача оптимального керування для лінійної стохастичної системи Іто з невизначеністю вигляду

$$\dot{x}(t) = (A(\xi(t)) + \Delta A(\xi(t)))x(t) + (B(\xi(t))+$$

$$+\Delta B(\xi(t)))u(t) + (\xi(t))x(t)w(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x_0, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Тут і нижче $w(t), t \geq 0$ - вінерів процес.

Великий внесок у розробку систем з марковським параметрами вніс Кац [139]. В його викладках марковський процес може бути або ланцюгом Маркова, або суто розривним процесом Маркова, або неперервним процесом Маркова. Крім того, доцільно розглянути випадок збурень імпульсного типу, коли, наприклад, моменти часу, в які можливі розриви фазових траєкторій процесу, відомі заздалегідь. Для детермінованих та різницевихких систем ця ситуація була детально вивчена в [140].

Стохастичні системи випадкової структури за Кацом [139] з імпульсними марковськими збуреннями за Царковим були розглянуті в [141–144]. Досліджено стійкість у різних імовірнісних сенсах та вирішено проблему оптимальної стабілізації, розв'язком якої є оптимальне керування, яке стабілізує систему до стохастично стійкої. У цих роботах припускалась відсутність точки згущення, але в [145–147] було доведено існування та єдиність розв'язку системи диференціальноно-різницевих рівнянь із марковськими параметрами та перемиканнями за наявності точок згущення. Тому ми можемо розглянути проблему стабілізації та оптимального керування для таких систем.

Далі, в теорії керування є задачі побудови керування, яке мінімізує деякий функціонал якості. Ця задача є ширшою, ніж задача оптимальної стабілізації, яка передбачає, крім мінімізації функціонала, стабілізацію системи. Монографія [148] – одна з основних робіт, в якій представлена загальна теорія керованих процесів та теорія керованих стохастичних диференціальних рівнянь. Тут розглядаються класичні задачі про оптимальну зупинку випадкових процесів, подано строге доведення виведення рівнянь Беллмана [149] та їх застосування для побудови оптимальних керувань.

У [153] розглянуто керовані системи зі скінченною післядією детермінованого та стохастичного типу. Стаття [154] присвячена синтезу оптимального керування лінійними стохастичними динамічними системами зі скінченною післядією та пуассоновими збуреннями.

У [125] отримано загальний вигляд рівняння Беллмана та функціонала Беллмана для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканням, що дає достатні умови існування оптимального керування, а в [155] вирішено проблему синтезу оптимального керування для таких систем.

У [152], [153] моменти перемикань марковських процесів вважаються відомими, однак у багатьох випадках можливі також стрибкоподібні зміни траєкторій процесу і у випадкові моменти. Такі ситуації адекватно описуються доданком типу інтеграла за випадковою пуассоновою мірою.

Робота [157] присвячена синтезу оптимального керування стохастичними динамічними системами випадкової структури, що знаходяться під впливом імпульсних перемикань типу Маркова у відомі моменти часу з урахуванням пуассонових збурень, які дозволяють описати розриви траєкторій у випадкові моменти часу.

6.3.1 Достатні умови оптимальності

Розглянемо стохастичну систему випадкової структури, яка задана стохастичним диференціальним рівнянням Іто

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), u(t))dt + b(t, \xi(t), x(t), u(t))dw(t)+$$
$$+\int_{\mathbf{R}^m} c(t, \xi(t), x(t), u, z)\tilde{\nu}(dz, dt), t \in \mathbf{R}_+ \backslash K, \qquad (6.45)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\,|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(\,t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \qquad (6.46)$$

$$t_k \in K = \{t_n \Uparrow\},\ n = 0, 1, 2, ...,, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty.$$

і початковими умовами

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^m, \xi(t_0) = y \in \mathbf{Y},\, \eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}. \qquad (6.47)$$

Тут $\xi(t)$ – марковський процес із значеннями в просторі $\mathbf{Y} := \{y_1, ..., y_N\}$, $\{\eta_k,\ k \geq 0\}$ – ланцюг Маркова зі значеннями в просторі $\mathbf{H}$; $x : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^m$; $w(t)$ – m-вимірний стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(dz, dt) = \nu(dz, dt) - \mathbf{E}\nu(dz, dt)$ – центрована пуассонова міра; процеси w, ν, ξ и η незалежні в сукупності [125], [155].

Траєкторії процесу $x(t),\ t \geq 0$ належать простору Скорохода $\mathbf{D}$ [148], керування $u(t) := u(t, x(t)) : [0; T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ – m-вимірна функція з класу U допустимих керувань [150]; коефіцієнти $a : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $b : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, $c : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ і функція $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ вимірні за сукупністю змінних і за фазовою змінною задовольняють умову Липшиця.

Введемо послідовність функцій $v_k(t, x)\ :\ [t_0, T] \times \mathbf{R}^m\ \to\ \mathbf{R}^1,\ k\ \geq\ 0$; позначимо $V := \{f(t, x) :\ f \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^m)\}$.

На функціях $v_k(t, x) \in V$ визначимо слабкий інфінітезимальний оператор [125]

$$\mathrm{L}v_k(t, x) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{1}{\Delta} \left\{\mathbf{E}_{t,x} v_k(t + \Delta, x(t + \Delta, t_k, y, h, u)) - v_k(t, x)\right\}, \qquad (6.48)$$

де $x(t, t_k, y, h, u)$ – сильний розв'язок (6.45) на $t \in [t_k, t_{k+1})$ при керуванні $u_k \in U$, яке побудовано на проміжку $[t_k, t_{k+1})$.

Задача оптимального керування полягає у знаходженні керування $u_k^0,\ k \geq 0$, з множини допустимих керувань U такого, яке б мінімізувало функціонал якості [150]

$$I(u_k^0) := I^{u_k^0}(t, x) := \inf_U \left(\sum_{k=0}^{\bar{N}} \mathbf{E}_{t_k, x_k} \left\{ F\left(x(T)\right) + \int_t^T G(s, x, u(s, x)) ds \right\} \right),$$

где $F(x) \geq 0; G(t, x, u) \geq 0$, $\mathbf{E}_{t,x}\{f\} = \mathbf{E}\{f/x(t) = x\}$.

Для отримання достатніх умов оптимальності потрібно використати декілька допоміжних тверджень.

Лема 6.5. [157] *Нехай:*

1. *виконується умова*

$$|a(t, y, x_1, u) - a(t, y, x_2, u)| + |b(t, y, x_1, u) - b(t, y, x_2, u)| +$$

$$+\int_{\mathbf{R}^m} |c(t,y,x_1,u,z) - c(t,y,x_2,u,z)|\,\Pi(dz)+$$
$$+\,|g(t,y,h,x_1) - g(t,y,h,x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|\,,\ L>0,$$

при $\forall t \in [0,T]$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ *і умова*

$$|a(t,y,0,u)| + |b(t,y,0,u)| + |g(t,y,0,u)| +$$
$$+\int_{\mathbf{R}^m} |c(t,y,0,u,z)|\,\Pi(dz) = L_1 < \infty;$$

1. *існує послідовність функцій* $v_k : [0,T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^1$, $k \ge 0$, *з класу* V*;*
2. *для* $s \in [t_k, T]$ *визначено слабкий інфінітезимальний оператор* $\mathrm{L}v_k(s,x)$ *на розв'язках* (6.45)-(6.47).

Тоді $\forall\, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in [t_0,T]$ *має місце рівність*

$$\mathbf{E}_{t_k,x_k} v_k(\tilde{t}_2, x(\tilde{t}_2)) - \mathbf{E}_{t_k,x_k} v_k(\tilde{t}_1, x(\tilde{t}_1)) = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \mathbf{E}_{t_k,x_k} \mathrm{L}v_k(s,x(s))ds. \qquad (6.49)$$

Лема 6.6. [157] *Нехай:*

1. *виконуються умови* 1) *і* 2) *леми 6.5;*
2. $\forall\, t \in [t_0,T]$, $\forall v_k \in V$, $k \ge 0$, *має місце рівняння*

$$\mathrm{L}v_k(t,x) + G(t,x,u_k(t,x)) = 0 \qquad (6.50)$$

з крайовою умовою

$$v_k(T,x) = 0, k \ge 0, \qquad (6.51)$$

де $\mathrm{L}v_k(t,x)$ *– слабкий інфінітезимальний оператор, визначений формулою* (6.48).

Тоді $v_k \in V$, $k \ge 0$, *можна задати у вигляді*

$$v_k(t,x) = \mathbf{E}_{t_k,x_k} \left\{ \int_t^T G(s,x,u(s,x))ds \right\},\ t \in [t_k,T].$$

Теорема 6.3. [157] *Нехай:*

1) $\exists$ *сильний розв'язок задачі* (6.45)-(6.47)*;*

2) *існують послідовність функцій* $v_k \in V,\ k \geq 0,$ *і керування* $u_k^0 \in U,$ $k \geq 0,$ *які задовольняють при всіх* $t \in [t_k, T]$ *і всіх допустимих керуваннях* $u_k \in U,\ \ k \geq 0,$ *рівняння*

$$\mathrm{L}v_k(t,x) + G(t,x,u_k^0(t,x)) = 0 \tag{6.52}$$

з крайовою умовою

$$v_k(T,x) = F(x(T)); \tag{6.53}$$

3) $\forall\, t \in [0,T],\ \forall\, u_k \in U,\ \ k \geq 0,$ *справедлива нерівність*

$$\mathrm{L}v_k(t,x) + G(t,x,u_k(t,x)) \geq 0,$$

де $\mathrm{L} = \mathrm{L}(t,x,u)$ *– слабкий інфінітезимальний оператор* (6.48) *на розв'язках задачі* (6.45)-(6.47). *Тоді керування* $u_k^0(t,x)$ *є оптимальним у розумінні критерию якості* $I^{u_k^0}(0,x_0)$, *тобто* $\forall\, t \in [t_0,T]$ *маємо*

$$I^{u_k^0}(t,x) = \inf_{u\in U} I^u(t,x) = v_k(t,x).$$

Послідовність функцій $v_k(t,x)$ назвемо вартістю керування, або функцією Беллмана, а рівняння (6.52) можна записати у вигляді рівняння Беллмана

$$\inf_{u\in U} [\mathrm{L}(t,x_k,u)v_k(t,x_k) + G(t,x_k,u)] = 0.$$

6.3.2 Загальний розв'язок задачі оптимального керування

Згідно з [141], [142], [156], слабкий інфінітезимальний оператор (6.48) в силу системи (6.45)–(6.47) має вигляд

$$\mathrm{L}v_k(t,\ x) = \frac{\partial v_k(t,\ x)}{\partial t} + (\nabla v_k(t,\ x),\ a(t,\ y,\ x,\ u)) +$$

$$+\frac{1}{2}Sp(b^T(t,\ y,\ x,\ u)\cdot \nabla^2 v_k(t,\ x)\cdot b(t,\ y,\ x,\ u)) +$$

$$+\int_{\mathbf{R}^m} [v_k(t,\ x + c(t,y,x,u,z)) - v_k(t,\ x) - (\nabla v_k(t,\ x))^T \cdot c(t,y,x,u,z)]\Pi(dz) +$$

$$+\sum_{j\neq i}^{N} \left[\int_{\mathbf{R}^m} v_j(t,x)p_{ij}(t,z/x)dz - v_i(t,x)\right] q_{ij}, \tag{6.54}$$

де $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$– скалярний добуток, $(\nabla v_k) := \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_1},\, ...,\, \frac{\partial v_k}{\partial x_m}\right)^T$, $(\nabla^2 v_k) := \left[\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^m$, $k \geq 0$, ; T – знак транспонування, Sp – слід матриці, $p_{ij}\,(t,\, z/x)$ – умовна щільність

$$P\{x(\tau) \in [z,\, z+dz]\;/\,x(\tau-0) = x\} = p_{ij}(\tau, z/x)dz + o(dz)$$

в припущенні, що в момент τ зміни параметра ξ системи (6.45) відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(\tau-0) = x$, $x(\tau) = z$ и $y_i \to y_j$.

Перше рівняння для $v_k^0(t,\ x)$, $k \geq 0$, можна отримати, підставивши (6.54) в (6.52). Тоді шукане рівняння в точках $(t_k,\, y_i,\, x,\, h)$ набуде вигляду

$$\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^T \cdot a(t, y_i, x, u) +$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left(b^T(t,\, y_i,\, x,\, u) \cdot \frac{\partial^2 v_k^0(t,x)}{\partial x^2} \cdot b(t,\, y_i,\, x,\, u)\right) +$$

$$+\int_{\mathbf{R}^m} [v_k^0(t,\ x + c(t, y_i, x, u, z)) - v_k^0(t,\ x) - \left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^T \cdot c(t, y_i, x, u, z)]\Pi(dz) +$$

$$+\sum_{j\neq i}^{N}\left[\int_{\mathbf{R}^m} v_j^0(t,x)p_{ij}(t, z/x)dz - v_i^0(t,x)\right] q_{ij} + G(t,x,u) = 0 \qquad (6.55)$$

з крайовою умовою

$$v_k^0(T,x) = F(x(T)).$$

Друге рівняння для оптимального керування $u_k^0(t,\ x)$ ожержимо з (6.55) диференціюванням за змінною u, оскільки $u = u_k^0$, $k \geq 0$, забезпечує мінімум лівої частини (6.55):

$$\left[\left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{\partial a(t, y_i, x, u)}{\partial u} +\right.$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left[\left(\frac{\partial b(t, y_i, x, u)}{\partial u}\right)^T \cdot \frac{\partial^2 v_k^0(t,x)}{\partial x^2} \cdot b(t, y_i, x, u) +\right.$$

$$\left.+b^T(t, y_i, x, u) \cdot \frac{\partial^2 v_k^0(t,x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial b(t, y_i, x, u)}{\partial u}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left[\int_{\mathbf{R}^m}[v_k^0(t,\ x+c(t,y_i,x,u,z))-v_k^0(t,\ x)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^T\cdot c(t,y_i,x,u,z)]\Pi(dz)\right]$$

$$\left.+\left(\frac{\partial G(t,x,u)}{\partial u}\right)^T\right]\Bigg|_{u=u_k^0}=0, \tag{6.56}$$

де $\frac{\partial a}{\partial u}$ – $m\times m$-матриця Якобі, складена з елементів $\left\{\frac{\partial a_n}{\partial u_s},\ n=\overline{1,m},\ s=\overline{1,m}\right\}$ ($\frac{\partial b}{\partial u}$ – аналогічно), $\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)\equiv\left(\frac{\partial G}{\partial u_1},\ ...,\ \frac{\partial G}{\partial u_r}\right)$, $k\geq 0$, нижній індекс біля a і u позначає вдповідну координату елемента m-вимірного простору.

6.3.3 Оптимальне керування лінійних стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями

Розглянемо задачу оптимального керування лінійною стохастичною динамічной системою випадкової структури, заданою стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx(t)=[A(t,\xi(t))x(t)+B(t,\xi(t))u(t)]dt+\sigma(t,\xi(t))x(t)dw(t)+$$

$$+\int_{\mathbf{R}^m}C(t,\xi(t),z)x(t)\tilde{\nu}(dz,dt),t\in\mathbf{R}_+\backslash K, \tag{6.57}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\,|_{t=t_k}=g(t_k-,\xi(\ t_k-),\eta_k,x(t_k-)), \tag{6.58}$$

і початковими умовами

$$x(0)=x_0\in\mathbf{R}^m,\xi(0)=y\in\mathbf{Y},\ \eta_0=h\in\mathbf{H}. \tag{6.59}$$

Тут A, B, σ, C – кусково-неперервні та інтегровні матричні функції відповідних розмірностей.

Задача оптимального керування системою (6.57)–(6.59) полягає в знаходженні керування u_{ik}^0, $i\in\{1,...N\}$, $k\geq 0$, з множини допустимих керувань

U такого, яке б мінімізувало функціонал

$$I(u_{ik}) := I^{u_{ik}}(t,x) := \sum_{k=0}^{\bar{N}} \mathbf{E}_{t_k,x_k} \left\{ x^T(T) M_0(\xi(t),\eta_k) x(T) + \right.$$

$$\left. + \int_t^T [u^T(s) M_1(s,\xi(s),\eta_k) u(s) + x^T(s) M_2(s,\xi(s),\eta_k) x(s)] ds \right\}, \qquad (6.60)$$

де $m \times m$-матриця $M_1(t,\xi(t),\eta_k)$ рівномірно додатно визначена за $t \in [0,T]$, $m \times m$-матриці $M_0(\xi(t),\eta_k)$, $M_2(t,\xi(t),\eta_k)$ – невід'ємно визначені.

Для спрощення записів введемо позначення

$$A_i(t) := A(t,y_i), B_i(t) := B(t,y_i), \sigma_i(t) := \sigma(t,y_i), C_i(t,z) := C(t,y_i,z),$$

$$M_{0ik} := M_0(y_i,\eta_k), M_{1ik}(t) := M_1(t,y_i,\eta_k), M_{2ik}(t) := M_2(t,y_i,\eta_k).$$

Теорема 6.4. [157] *Оптимальне керування для задачі* (6.57)–(6.60) *знаходиться за формулою*

$$u^0_{ik}(t,x) = -M^{-1}_{1ik}(t) B^T_i(t) P_{ik}(t) x(t), \qquad (6.61)$$

де невід'ємно визначена $m \times m$-матриця $P_{ik}(t) := P(t,\xi(t),\eta_k)$ входить в функціонал Беллмана

$$v^0_{ik}(t,x) = x^T(t) P_{ik}(t) x(t),$$

$$v^0_{ik}(T,x) = x^T(t_k) M_{0ik} x(t_k). \qquad (6.62)$$

6.3.4 Побудова рівняння Беллмана

Теорема 6.6. [157] *Якщо вартість керування знаходимо у вигляді* (6.60) *для системи* (6.57)–(6.59), *то система диференціальних рівнянь для знаходження матриць $P_{ik}(t)$, $t \in [t_k,t_{k+1})$, $i \in \{1,...N\}$, $k \geq 0$ має вигляд*

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} + A^T_i(t) P_{ik}(t) + P_{ik}(t) A_i(t) - B_i(t) M^{-1}_{1ik}(t) B^T_i(t) P_{ik}(t) +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^m} C_i(t,z) P_{ik}(t) C^T_i(t,z) \Pi(dz) +$$

$$+\sum_{j\neq i}^{N}(P_{jk}(t)-P_{ik}(t))q_{ij}+[M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)P_{ik}(t)]^T B_i^T(t)P_{ik}(t)+M_{2ik}(t)=0, \tag{6.63}$$

$$Sp(\sigma_i^T(t)P_{ik}(t)\sigma_i(t))=0, \tag{6.64}$$

з крайовими умовами

$$P_{ik}(T)=M_{0ik}. \tag{6.65}$$

Далі слід вирішити питання про існування розв'язку крайової задачі (6.63)–(6.65).

Теорема 6.6. [157] *Наближений розв'язок задачі синтезу оптимального керування для задачі* (6.57)–(6.60) *здійснюється за допомогою метода послідовних наближень Беллмана, при якому n-е наближення керування і функціонала Беллмана для кожного інтервала $[t_k,t_{k+1})$, $k\geq 0$, знаходять за формулами*

$$u_n(t,x)=-M_1^{-1}(t)B^T(t)P_n(t)x(t),$$

$$v_n(t,x)=x^T(t)P_n(t)x(t),$$

$$v_n(T,x)=x^T(t_k)M_0x(t_k), \tag{6.66}$$

де $P_n(t)$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, – розв'язок крайової задачі (6.63)–(6.65) *при $T:=t_{k+1}$, причому похибка оцінюється нерівністю*

$$\max_{t\in[t_k,t_{k+1})}\|P(t)-P_n(t)\|\leq\frac{C}{n!},\quad C<\infty,\ k\geq 1. \tag{6.67}$$

Модельний приклад. Обмежуючись для простоти викладок скалярним випадком і двома станами для ланцюгів Маркова ξ и η: $\xi=[1,\ 2]$, $\eta=[\eta_1,\ \eta_2]$, задамо для системи (6.57) наступні вихідні дані:

$$1)\xi=1,A_1(t)=3,B_1(t)=1,\sigma_1(t)=0.1,C_1(t,z)=z^2;$$

$$2)\xi=2,A_2(t)=4,B_2(t)=1,\sigma_2(t)=0.2,C_2(t,z)=z^3.$$

Перехідні ймовірності приймемо $q_{12}=q_{21}=0.5$.

Далі, M_0, M_1 и M_2, які входять в функціонал якості (6.60) задамо у вигляді

$$M_{011} = M_{021} = M_{012} = M_{022} = 8,$$

$$M_{111} = 0.7, M_{112} = 0.8, M_{121} = 0.9, M_{122} = 0.4,$$

$$M_{211} = 0.5, M_{212} = 0.4, M_{221} = 1, M_{222} = 0.9.$$

Функціонал Беллмана розглянемо у вигляді $v^0_{ik}(t,x) = P_{ik}x^2(t)$, $i,k \in \{1,\ 2\}$.

Система (6.63) для знаходження P_{ik}, $i,k \in \{1,\ 2\}$, набуде вигляду

$$2A_iP_{ik} - B_i^2M_{1ik}^{-1}P_{ik} + \sum_{j\neq i}^{2}(P_{jk} - P_{ik})q_{ij} + M_{1ik}^{-1}B_i^2P_{ik}^2 + M_{2ik} = 0, \qquad i,k \in \{1,\ 2\}.$$

Підставляючи конкретні значення A, B, M_0, M_1, M_2 одержимо

$$P_{11} = -3,356, P_{12} = 0,163, P_{21} = -5,854, P_{22} = -2,255.$$

Таким чином, оптимальне керування в нашому випадку має вигляд

$$u^0(t,x) = \begin{cases} 4,794x(t), & \xi = 1,\ \eta = \eta_1, \\ -0,204x(t), & \xi = 1,\ \eta = \eta_2, \\ 6,504x(t), & \xi = 2,\ \eta = \eta_1, \\ 5,637x(t), & \xi = 2,\ \eta = \eta_2. \end{cases}$$

6.4 Застосування методу стохастичних функціоналів Ляпунова–Красовського до реальних задач з марковськими перемиканнями

У даному пункті встановлено достатні та необхідні умови експоненційної стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з марковськими перемиканнями. Досліджено декілька модельних прикладів, що ілюструють застосування теорем про експоненціальну стійкість

Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset R^n$ стохастичним диференціально-функціональним рівнянням

$$dx(t) = A(t,\xi(t))x_tdt + B(t,\xi(t))x_tdw(t),\ \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{6.68}$$

за початковими умовами

$$x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-h, 0],\ h > 0, \tag{6.69}$$

де $[x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^n$, $\forall t \geq t_0 \geq 0$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\}$, $\{\xi(t) \equiv \xi(t,\omega), t \geq 0\} \subset Y$ – однорідний марковський процес зі скінченою кількістю станів $Y = \{y_1, ..., y_k\}$ та з матрицею перехідних ймовірностей [125]

$$P(\tau) = P\left\{\xi(t+\tau) = y_j | \xi(t) = y_i\right\} = e^{\pi\tau}, \tag{6.70}$$

де $\pi = [q_{ij}]$ і виконуються співвідношення

$$q_{ij} \geq 0,\ j \neq i,\ q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij};$$

$A, B : R_+ \times Y \to M_n(R)$ – матриці, елементами яких є обмежені та неперервні по t функції для кожного $y \in Y$.

Нехай для довільного $y \in Y$ маємо функціонал $v : R_+ \times C_n([-h, 0], R^n) \times Y \to R^1$.

Теорема 6.7 (пряма теорема Ляпунова). *Нехай існує функціонал Ляпунова-Красовського $v(t, \varphi, y)$, для якого справедлива оцінка*

$$c_1 |\varphi(0)|^2 \leq v(t, \varphi, y) \leq c_2 \|\varphi\|^2 \tag{6.71}$$

для $c_1, c_2 > 0$, $t \in R_+$, $y \in Y$, $\varphi \in C_n([-h, 0], R^n)$ та для деякої $c_3 > 0$ виконується нерівність

$$(\mathcal{L}v)(t, \varphi, y) \leq -c_3 \left|\varphi(0)\right|^2, \tag{6.72}$$

$\forall t \geq 0$, $y \in Y$ та $\forall \varphi \in C_n([-h, 0], R^n)$.

Тоді тривіальний розв'язок задачі (6.68), (6.69) *є експоненційно стійким у середньому квадратичному.*

Теорема 6.8 (обернена теорема Ляпунова). *Якщо тривіальний розв'язок задачі* (6.68), (6.69) *експоненційно стійкий у середньому квадратичному, то існує функціонал Ляпунова-Красовського $v(t, \varphi, y)$, для якого справедливі умови* (6.71), (6.72).

Модельна задача 1. Нехай на ймовірнісному базисі задано одновимірне рівняння випадкової структури [139]

$$dx(t) \equiv a(\xi(t))x(t)dt + b(\xi(t))x(t)d\omega(t), \tag{6.73}$$

де $x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^1$ – одновимірний випадковий процес з неперервними реалізація; $\xi(t) \in Y \equiv \{\overline{1,k}\}$ і перехідними ймовірностями (6.70); $w(t) \equiv w(t,\omega)$ – скалярний вінерів процес.

Знайдено достатні умови експоненційної стійкості у $l.i.m.$

Умова

$$a_i - \frac{b_i^2}{2} < -\varepsilon,\ \forall i = \overline{1,k} \tag{6.74}$$

є достатньою умовою для експоненційної стійкості у $l.i.m$ рівняння (6.73) для кожного фіксованого $\xi(t) = i$; $i = \overline{1,k}$.

А умова

$$\alpha_i \equiv \sum_{j>i}^{k} (j-i)q_{ij} < \frac{\beta_i}{2}\varepsilon,\ i = \overline{1,k-1} \tag{6.75}$$

забезпечує експоненційну стійкість у $l.i.m$ системи випадкової структури.

Модельна задача 2. Створимо стохастичну модель роботи електронної схеми (рисунок 6.1), в режимі якої працюють більшість елементів релейних контактних схем [174]. Аналогічні схеми описують зміни електричного струму у аварійних режимах.

Рисунок 6.1

Позначимо через $i_1(t)$ – струм у гілці генератора (див. ліву сторону рисунка 1), через $i_2(t)$ – струм у гілці катушки L_2.

Нехай процес замикання і розмикання ключа K є простим ланцюгом Маркова $y(t) \in Y \equiv (y_1, y_2)$ з двома станами $y_1 = 0$ (ключ замкнений), $y_2 = 1$ (ключ розімкнутий) з інтенсивностями q_{12}, q_{21}.

Висновок 6.1. Робота електричної схеми (рисунок 6.1) визначається системою випадкової структури

$$
\begin{aligned}
&(L_1 + y(t)L_2)\frac{di_1}{dt} + (r_1 + y(t)r_2)i_1 = U;\\
&(L_2 + y(t)L_1)\frac{di_2}{dt} + (r_2 + y(t)r_1)i_2 = y(t)U.
\end{aligned}
\tag{6.76}
$$

При цьому початкові дані для кожної з структур слід задавати умовами

$$
i_1(\tau) = i_2(\tau) = i_1(\tau - 0) = i_2(\tau - 0). \tag{6.77}
$$

$$
i_1(\tau) = i_2(\tau) = \frac{L_1 i_1(\tau - 0) + L_2 i_2(\tau - 0)}{L_1 + L_2}. \tag{6.78}
$$

Висновок 6.2. Для електронної схеми (рисунок 6.1) при замиканні ключа струми $i_1(\tau), i_2(\tau)$ змінюються неперервно, а при замиканні, ці струми змінюються стрибком.

У роботі [175] отримано достатні умови експоненційної стійкості у середньому квадратичному.

ВИСНОВКИ

Основними результатами, наведеними в звіті, є такі:

– у просторах обмежених функцій доведено теореми про розв'язність задачі Коші для одного ультрапараболічного рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині;

– у явному вигляді знайдено фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння з нескінченно зростаючими молодшими коефіцієнтами та виродженнями;

– запропоновано схему декомпозиції лінійних сингулярно збурених систем з багатьма малими параметрами, що базується на ідеях теорії інтегральних многовидів повільних та швидких змінних;

– для лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами обґрунтовано принцип зведення для дослідження стійкості та запропоновано можливість використання наближеного інтегрального многовиду при дослідженні стійкості нульового розв'язку;

– доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією;

– вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння брюсселятора із малою дифузією. Встановлено існування та стійкість біжучих хвиль рівняння спінового горіння;

– досліджено достатні коефіцієнтні умови існування розв'язку крайової задачі для лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями, які є зручними для практичної перевірки;

– встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу;

– застосовано метод сплайн-функцій дефекту 2 для апроксимації розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненнями а нейтрального типу;

– одержані достатні умови збіжності ітераційного процесу для знаходження наближених розв'язків лінійної крайової задачі для диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями та нейтрального типу з урахуванням можливих розривів їхніх похідних;

– досліджено схеми апроксимації систем лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Розглянуто їх застосування для наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів, дослідження стійкості розв'язків та побудови коефіцієнтних областей стійкості лінійних рівнянь із запізненням;

– одержано необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному сильних розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з частинними похідними з попарно незалежними зовнішніми випадковими збуреннями типу випадкових величин;

– встановлено умови розв'язності системи матричних диференціальних рівнянь Ріккаті, що дає змогу розв'язати задачу синтезу оптимального курування для лінійної стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями;

– досліджено асимптотичну поведінку сильного розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто-Скорохода в частинних похідних у відповідному просторі з випадковими параметрами. Доведено існування та отримано достатні умови для асимптотичної стійкості й середньоквадратичної нестійкості сильного розв'язку такого рівняння;

– запропонована стохастична модель складних систем для врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу, але й випадкові збурення інших типів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Івасишен С. Д. Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, Г. С. Пасічник // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4, № 3–4. – С. 57–68.

2. Івасишен С. Д. Параболічні моделі з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних / С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, Г. С. Пасічник // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доп. VII міжнар. наук. конф., 21–22.04.2016, Кам'янець-Подільський. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т. ім. Івана Огієнка, 2016. – С. 83–84.

3. Івасишен С. Д. Про задачу Коші для одного ультрапараболічного рівняння зі зростаючими в групі молодших членів коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // XVII Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука, 19–20.05.2016, Київ : Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К. : НТУУ "КПІ", 2016. – С. 129–130.

4. Івасишен С. Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині / Степан Івасишен, Ігор Мединський, Галина Пасічник // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування : матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 80-річчю від дня народження проф. В. І. Фодчука (1936–1992), 28–30.09.2016. – Чернівці : Чернівецький ун-т. ім. Юрія Федьковича, 2016. – С. 50–51.

5. Пасічник Г. С. Про властивості об'ємного потенціалу для одного ультрапараболічного рівняння зі зростаючими в групі групі молодших членів членівкоефіцієнтами / Г. С. Пасічник // Диференціальні рівняння та їх застосування : матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 75-річчю від дня народження доктора фіз.-мат. наук, лауреата держ. премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942–1996), 19–21.05.2017. – Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2017. – С. 95–96.

6. Івасишен С. Параболічні рівняння з різними особливостями та виродженнями / Степан Івасишен, Ігор Мединський, Галина Пасічник // Некласичні задачі теорії диференц. рівнянь : зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника / Під заг. ред. Кушніра Р. М., Пелиха В. О. – Львів : ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 68–76.

7. Івасишен С. Д. Знаходження, властивості та деякі застосування фундаментального розв'язку задачу Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // XVIII Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука, 7–10.10.2017, Луцьк – Київ : Матеріали конф. Т. 1. – К. : НТУУ "КПІ", 2017. – С. 64–66.

8. Івасишен С. Про задачу Коші для ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині / Степан Івасишен, Галина Пасічник / Сучасні проблеми механіка та математики : зб. наук. праць у 3-х томах // Під заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. – ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. – Т. 3. – С. 120.

9. Пасічник Г. Про інтегральні зображення розв'язків ультрапараболічного рівняння з необмежено зростаючими молодшими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині / Галина Пасічник // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях : Матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, 17–19.09.2018. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т., 2018. – С. 89.

10. Івасишен С. Д. Ультрапараболічні рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів і виродженнями на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – Т. 61, № 1. – С. 31–46.

11. Ivasyshen S. D. Ultraparabolic Equations with Infinitely Increasing Coefficients in the Group of Lowest Terms and Degenerations in the Initial Hyperplane / S. D. Ivasyshen, H. S. Pasichnyk // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 249, Iss. 3. – P. 333–354.

12. Пасічник Г. Про задачу Коші для ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів та слабким виродженням на початковій гіперплощині / Галина Пасічник // Диференціальні рівняння та їх застосування : Матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 100-річчю С. Д. Ейдельмана, 16–19.09.2020 [Електронний ресурс]. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т., 2020. – С. 179–180.

13. Pasichnyk H. On the Cauchy problem for a ultraparabolic equations with infinitely increasing coefficients in the group of lowest terms and strongly degenerations in the initial hyperplane / Halyna Pasichnyk // 11th International Skorobohatko Mathematical Conference, 26–33.10.2020, Lviv [Електронний ресурс]. – ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2020. – С. 88.

14. Івасюк Г. Про спряжені оператори Гріна задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем / Галина Івасюк, Тоня Фратавчан // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування : матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 80-річчю від дня народження проф. В. І. Фодчука (1936–1992), 28–30.09.2016. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. – С. 51.

15. Івасюк Г. Про коректну розв'язність задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем у негативних просторах Гельдера / Г. П. Івасюк, Т. М. Фратавчан // Міжнародна наукова конференція, присвячена 80-річчю від дня народження М. П. Ленюка, 28–30 жовтня 2016 р., Чернівці : матеріали конференції. – Чернівці, 2016. – С. 134–136.

16. Івасюк Г. Про властивості прямих та спряжених операторів Гріна задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем / Галина Івасюк, Тоня

Фратавчан // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях : Матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівець. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, 17–19.09.2018. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т., 2018. – С. 68.

17. Коренюк Н. Про модельну $2\vec{b}$-параболічну крайову задачу без початкових умов і теореми типу Ліувілля / Наталія Коренюк, Тоня Фратавчан, Галина Івасюк // Диференціальні рівняння та їх застосування : Матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 100-річчю С. Д. Ейдельмана, 16–19.09.2020 [Електронний ресурс]. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т., 2020. – С. 145.

18. Пуанкаре А. Новые методы небесной механіки. Т.1 / Анрі Пуанкаре. – М. : Наука, 1972. – 772 С.

19. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – М. ГоС. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. – 471 С.

20. Лыкова О. Б. О принципе сведения в теории устойчивости движения / О. Б. Лыкова // Український математичний журнал. – 1993. – Т. 45, № 12. – С. 1653–1660.

21. Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения / В. А. Плисс // Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:6. – 1964. – С. 1297—1324.

22. Kelley A. The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds / A. Kelley // J. Diff. Egs. – 1967. – Vol. 3. – P. 546–570.

23. Самойленко А. М. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия / А. М. Самойленко // Изв. АН СССР. Сер. матем., 30:5. – 1966. – С. 1047–1072.

24. Барис Я. С. Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. I / Я. С. Барис, О. Б. Ликова // Український математичний журнал. – 1989. – Т. 41, № 12. – С. 1607–1613.

25. Задирака К. В. О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы / К. В. Задирака // Український математичний журнал. – 1965. – Т. 17, № 1. – С. 47–63.

26. Задирака К. В. Об интегральном многообразии системы дифференциальных уравнених, содержащей малый параметр / К. В. Задирака // ДАН СССР. – 1957. – Т. 115, № 4. – С. 646–649.

27. Abed E.H. Decomposition and stability of multiparameter singular perturbation problems / E. H. Abed // IEEE Automat. Contr. – 1986. – Vol. 31, No. 10. – P. 925–933.

28. Клевчук І. І. Інтегральні многовиди та розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням / І. І. Клевчук // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 4. – С. 70–73.

29. Kokotovic P. V. Singular perturbation Methods in Control : Analysis and Design. Academic Press / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly. – 1986. – P. 371.

30. Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В. В. Стрыгин, В. А. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 256 С.

31. Черевко І. М. Про асимптотику інтегральних многовидів сингулярно збурених систем із запізненням / І. М. Черевко // Український математичний журнал. – 1999. – Т. 51, № 8. – С. 1105–1111.

32. Fridman E. Decomposition of linear optimal singularly perturbed systems with time delay / E. Fridman // Automation and remote control. – 1990. – Vol. 51. – P. 1518–1527.

33. Fridman E. Decoupling transformation of singularly perturbed systems with small delays and its applications / E. Fridman // Z. Angew. Math. Mech. Berlin. – 1996. – Vol. 76, No 2. – P. 201–204.

34. Осипова О. В. Про розщеплення та декомпозицію лінійних стаціонарних сингулярно збурених диференціальних рівнянь / О. В. Осипова, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Т. 7, № 2. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2019. – С. 76–85.

35. Воропаева Н. В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 С.

36. Sobolev V. A. Decomposition of linear singularly perturbed systems / V. A. Sobolev // Acta Math. Hung. – 1987. – Vol. 49, N 3–4. – P. 365–376.

37. Сельський С. С. Інтегральні многовиди та розщеплення систем лінійних сингулярно збурених рівнянь з двома малими параметрами / С. С. Сельський, І. М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту, серія «Математика». – 2011. – Т. 1, N. 3. – С. 104-107.

38. Филатов А. Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А. Н. Филатов, Л. В. Шарова. – М. : Наука, 1976. – 156 С.

39. Sobolev V. A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system / V. A. Sobolev // Syst. and Contr. Left. – 1984. – Vol. 5. – P. 169–179.

40. Осипова О. В. Декомпозиція та стійкість сингулярно збурених лінійних систем / О. В. Осипова // Міжнар. мат. конф. "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (12 – 14 червня 2013 р., Слов'янськ) : Матеріали конференції. – Слов'янськ : ДДПУ, 2013. – С. 24.

41. Осипова О. В. Про розщеплення та декомпозицію лінійних сингулярно збурених багато темпових систем / О. В. Осипова, А. С. Перцов, І. М. Черевко // Тези доповідей IX міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. – С. 20—21.

42. Cherevko I.M. Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems / I. M. Cherevko, O. B. Osypova // Диференціальні рівняння та їх застосування : Тези доп. Міжнар. наук. конф., присвяч. 70-річчю акад. НАН України М. О. Перестюка (19-21 травня 2016 р., Ужгород). – Ужгород : Вид. УжНУ "Говерла", 2016. – С. 19.

43. I. Cherevko. Decomposition of multiparameter linear singularly perturbed systems / I. Cherevko, O. Osypova // The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova : dedicated to the centenary of Vladivir Andrunachievici (1917-1997, June 28-July 2 2017, Chisinau, Moldova : Proceedings CMSM. – Chisinau : Institute of Mathematics and Computer Science, Acad. of Sciences of Moldova, 2017. – P. 259–262.

44. Осипова О.В. Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами / О. В. Осипова, І. М. Черевко // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" 24-17 вересня 2019 р., Львів. – С. 127–131.

45. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М. : Мир, 1984. – 421 с.

46. Фодчук В. И. Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений / В. И. Фодчук, И. И. Клевчук // Український математичний журнал. – 1982. – Т. 34, № 3. – С. 334–340.

47. Клевчук И. И. О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа / И. И. Клевчук // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 464–472.

48. Клевчук І. І. Інтегральні многовиди і принцип зведення для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу / І. І. Клевчук // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4, № 1-2. – С. 70–76.

49. Клевчук І.І. Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням / І. І. Клевчук // Український математичний журнал. – 2002. – Т. 54, № 4. – С. 563–567.

50. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 502 С. Hale J. K. Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter / J. K. Hale // J. Different. Equat. – 1966. – Т. 2, № 1. – P. 57–73.

51. Клевчук И. И. Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений / И. И. Клевчук, В. И. Фодчук // Український математичний журнал. – 1986. – Т. 38, № 3. – С. 324–330.

52. Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations / J. Wu. – New York : Springer-Verlag, 1996. – 431 p.

53. Васильева А. Б. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А. Б. Васильева, С. А. Кащенко, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов // Мат. сб. – 1986. – Т. 130, № 4. – С. 488–499.

54. Белан Е. П. Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения / Е. П. Белан, А. М. Самойленко // Український математичний журнал. – 2013. – Т. 65, № 1. – С. 21–43.

55. Мищенко Е. Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. – М. : Физматлит, 2005. – 430 С.

56. Клевчук И. И. Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом / И. И. Клевчук // Український математичний журнал. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1342–1351.

57. Клевчук І. І. Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 71–78.

58. Клевчук І. І. Біфуркація автоколивань параболічних систем із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією / І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2016. – Т. 19, № 3. – С. 390–398.

59. Дорош А. Б. Застосування сплайн-функцій до побудови наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – С. 64–65.

60. Дорош А. Б. Існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Чернівці : Чернівецький ун-т, 2016. – Т. 4, № 3-4. –С. 43–46.

61. I. Cherevko. Existence and approximation of a solution of the boundary value problems for neutral delay integro-differential equations / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 25rd Conference On Applied and Industrial Mathematics, Iasi, Romania, September 14-17, 2017 : Proceedings CAIM 2017. – Iasi : Alexandru Ioan Cuza" University, 2017. – P. 14–15.

62. Дорош А. Б. Апроксимація розв'язків крайових задач для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями / А. Б. Дорош,

І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Т. 5, № 3-4. – Чернівці : Чернівецький ун-т, 2017. – С. 77–81.

63. Дорош А. Б. Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (19-21 травня 2017 р.). – Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2017. – С. 37–38.

64. Cherevko I. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays / I. Cherevko, A. Dorosh // Carpathian Math. Publ. – 2018. – Vol. 10, Iss. 1. – P. 65–70.

65. Cherevko I. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Delays / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 26th Conference On Applied And Industrial Mathematics, Chisinau, Moldova, September 20-23, 2018 : Proceedings CAIM 2018. – Chisinau : Technical University of Moldova, 2018. – P. 58.

66. Cherevko I. Modeling of Boundary Value Problems For Delay Integro-Differential Equations / I. Cherevko, A. Dorosh, T. Drin // Proceeding of the Seventh International Conference on Informatics and Computer Technics Problems, Chernivtsi, Ukraine, October 11-14, 2018 : Proceedings PICT-2018. – Chernivtsi : Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2018. – P. 39–40.

67. Ihor Cherevko. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays / Ihor Cherevko, Andrew Dorosh // The 27th Conference On Applied and Industrial Mathematics, Targoviste, Romania, September 19-22, 2019 : Proceedings CAIM 2019. – Targoviste : "Valahia" University, 2019. – P. 18–19.

68. Гаюк І. М. Моделювання крайових задач для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням / І. М. Гаюк, А. Б. Дорош, Л. А. Піддубна // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні

проблеми прикладної математики та інформатики" 24-27 вересня 2019, Львів. – Львів : Вид-во Тараса Сороки, 2019. – С. 57–61.

69. Dorosh A. Boundary Value Problem for Linear Integro-Differential Equations with Many Delays / A. Dorosh, I. Haiuk // XIX International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation", Kyiv, Ukraine, May 22–24, 2019 : Proceedings of Conference Reports. – Kyiv : Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2019. – P. 149–150.

70. Гаюк І. М. Моделювання нелінійних крайових задач із запізненням / І. М. Гаюк, А. Б. Дорош, Л. А. Піддубна // Тези доповідей IX міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". –Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. – С. 41–42.

71. A. Dorosh. Boundary value problems for delay integro-differential equations / A. Dorosh, I. Haiuk, A. Pertsov // Матеріали доповідей міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування", присвяченої 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, 16-19 вересня 2020 р. Чернівці, Чернівецький нац. ун-т, 2020. – С. 27–28.

72. Grim L. J. Boundary Value Problems for Delay Differential Equations / L. J. Grim, K. Schmitt // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 74, Iss. 5. – P. 997–1000.

73. Каменский Г. А. Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 2171–2179.

74. Hartman F. Ordinary Differential Equations / F. Hartman. – Philadelphia : The Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

75. Alberg J. The theory of splines and their applications / J. Alberg, E. Nilson, J. Walsh. – New York : Academic, 1967. – 296 p.

76. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженным постоянно действующим возмущениям / М. Е. Салуквадзе // Автоматика и телемеханика. – 1962. – Т. 23, № 2. – С. 1595–1600.

77. Репин Ю. М. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах / Ю. М. Репин, В. Е. Третьяков // Автоматика и телемеханика. – 1963. – Т. 24, № 6. – С. 738–743.

78. Красовский Н. Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием / Н. Н. Красовский // ПММ. – 1964. – Т. 28, № 4. – С. 716–725.

79. Матвій О. В. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Нелінійні коливання. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 208–216.

80. Матвій О. В. Про стійкість лінійних систем із запізненням / О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2008. – Вип. 421 : Математика. – С. 66–70.

81. Матвій О. В. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями / О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці, 2010. – Вип. 501 : Математика. – С. 69–73.

82. Клевчук І.І. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь / І. І. Клевчук, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28–34.

83. Cherevko I. M. On the approximation of systems with delay and them stability / I. M. Cherevko, L. A. Piddubna, S. A. Ilika // Междунар. науч. конф. "Динамические системы : устойчивость, управление, оптимизация" к 100-летию со дня рождения Е. А. Барбашина (24-29 сентября 2018 г., Минск, Белоруссия). – Минск, 2018. – С. 12–14.

84. Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями / Ю. М. Репин // ПММ. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 226–245.

85. Іліка С.А. Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування / С. А. Іліка, О. В. Матвій, Л. А. Піддубна, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Т. 2, № 2–3. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2014. – С. 92–96.

86. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М. : Гостехиздат, 1959. – 212 С.

87. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. – М. : Наука, 1971. – 296 С.

88. Маник О. Моделювання на ЕОМ лінійних диференціальних рівнянь із запізненням / О. Маник,І. М. Черевко // Матеріали студентської наукової конференції Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (25-27 квітня 2017 р.). Математичні науки. – Чернівці : ЧНУ, 2017. – С. 39–40.

89. Хусаинов Д. Я. Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом / Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова // Украинский математический журнал. – 1983. – Т. 35, № 2. – С. 261–264.

90. Cruz M.A. Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type / M. A. Cruz, J. K. Hale // Journal Of Differential Equations. – 1970. – Vol. 7.

– P. 334–355.

91. Yang Kuang. Delay differential equations: with applications in population dynamics/ Yang Kuang. – Academic Press, 1993. – 398 p.

92. Черевко І. М. Про апроксимацію системи різницевих рівнянь / І. М. Черевко, О. В. Матвій, Л. В. Стельмащук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2007. – Вип. 349. Математика. – С. 88–94.

93. Беллман Р. Е. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Е. Беллман, К. Л. Кук. – М. : Мир, 1967. – 548 С.

94. Матвій О. В. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями / О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : Зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2010. – Вип. 501. Математика. – С. 69–73.

95. Матвій О. В. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, № 3. — С. 329–335.

96. Про апроксимацію неасимптотичних коренів квазіполіномів для систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : Зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2004. – Вип. 191–192. Математика. – С.119–122.

97. Іліка С. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями / С. Іліка, О. Матвій, Л. Піддубна // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування : Матеріали міжнар. наук, конф., присвяченої 80-річчю від дня народження проф. В. І. Фодчука (1936–1992) (28–30 вересня 2016 р., Чернівці). – Чернівці, 2016. – С. 52.

98. Піддубна Л. А. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування / Л. А. Піддубна, І. І. Тузик, І. М. Черевко // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій" (Рівне, 2–4 березня 2018 р.). Матеріали конференції. – Рівне, 2018. – С. 80–81.

99. Іліка С. Про збереження стійкості лінійних систем із запізненням / С. Іліка, Л. Піддубна // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнар. наук. конф., присвяч. 50-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ (17–19 вересня 2018 р.). – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 69.

100. Черевко І. М. Схеми апроксимації диференіально-функціональних рівнянь та їх застосування / І. М. Черевко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнар. наук. конф., присвяч. 50-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ (17–19 вересня 2018 р.). – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 108–109.

101. Іліка С. А. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування / С. А. Іліка, І. І. Тузик, Л. А. Піддубна, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал, 2018. – Т. 6, № 3-4. – С. 80–83.

102. Ihor Cherevko. Approximation schemes of differentialfunctional equations and theirs application / Ihor Cherevko, Iryna Tuzyk // The 27th Conference On Applied and Industrial Mathematics, Targoviste, Romania, September 19–22, 2019 : Proceedings CAIM 2019. – Targoviste : "Valahia" University, 2019. – P. 20–21.

103. Cherevko I. Approximation schemes of systems with delay and their applications / I. Cherevko, I. Tuzyk // International Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Differential Equations and Numerical

Mathematics IV", Dedicated to the 100th anniversary of V. K. Dzyadyk (1919–1998) (Svityaz, June 20–26, 2019).

104. Іліка С. Про апроксимацію нелінійних систем диференціально-функціональних / С. Іліка, Л. Піддубна // Матеріали доповідей міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування", присвяченої 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана (16–19 вересня 2020 р.). – Чернівці : Чернівецький. ун-т, 2020. – С. 134–135.

105. Матвій О. Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування / О. Матвій, І. Тузик, І. Черевко // Матеріали доповідей міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування", присвяченої 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана (16–19 вересня 2020 р. – Чернівці : Чернівецький. ун-т, 2020. – С. 159–160.

106. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет. – М. : Наука, 1992. – 333 с.

107. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. – М. : Наука, 1977. – 352 с.

108. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – К. : Наук. думка, 1980. – 612 с.

109. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр. / / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – К. : Ин-т математики АН УССР. – 1981. – С. 25–59.

110. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.– М. : Наука, 1974. –541 с.

111. Перун Г. М. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя / Г. М. Перун, В. К. Ясинский // Кибернетика и вычисл. математика. – 1991. – № 83. – С. 19–25.

112. Перун Г. М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г. М. Перун, В. К. Ясинский // Український математичний журнал. – 1993. – Т. 45, № 9. – С. 1773–1781.

113. Свердан М. Л. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений / М. Л. Свердан, Л. И. Ясинская, В. К. Ясинский // Кибернетика и вычислительная техника. – 1988. – № 81. – С. 7–12.

114. Станжицкий А. Н. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа / А. Н. Станжицкий, А. О. Цуканова // Нелінійні коливання. – 2016. – Т. 3, № 3. – С. 408–430.

115. Tsukanova A. O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space / A. O. Tsukanova // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4, № 3–4. – С. 179–189.

116. Tessitore G. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations / G. Tessitore, J. Zabczyk // Probability and Mathematical Statistics. – 1998. – Т. 18. – P. 271–287.

117. Zabczyk J. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems / J. Zabczyk, G. Da Prato // Dynamic Systems and Applications. – Cambridge University Press. – 1996. – 449 p.

118. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1997. – 495 с.

119. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Наука, 1978. – 521 с.

120. Гулинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Гулинский, А. Н. Ширяев. – М. : Физматлит, 2005. – 408 с.

121. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 3 : Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. – Чернівці : Вид-во "Золоті литаври", 2009. – 798 с.

122. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. – Рига : Ориентир, 1992. – 301 с.

123. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Є. Ф. Царков. – Рига : Зинатне, 1989. – 421 с.

124. Дороговцев А. Я. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части / А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, А. Г. Кукуш // Український математичний журнал. – 1985. – Т. 37, № 1. – С. 13–20.

125. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. – М. : Физматгиз, 1969. – 859 С.

126. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 1. : Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. – Чернівці : Золоті литаври, 2007. – 444 с.

127. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. – М. : Наука, 1969. – 367 с.

128. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. – М. : Наука, 1964. – 445 с.

129. Donez N. P. Mean Square Behavior of the Strong Solution of a Linear non-Autonomous Stochastic Partial Differential Equation with Markov Parameters / N. P. Donez, I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy // Cybernetics and System Analysis. – 2014. – Vol. 50, Iss. 6. – P. 930–939.

130. Koroliuk V. S. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side / V. S. Koroliuk, I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol. 51, Iss. 1. – P. 56–63.

131. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – М. : Физматлит, 2005. – 402 с.

132. Korolyuk V. S. Stochastic models of systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk. – Kluwer, Boston, USA, 1999.

133. Long F. Stochastic stabilization of Ito stochastic systems with Markov jumping and linear fractional uncertainty / F. Long, H. Huang, A. Ding // Journal of Control Science and Engineering. – 2013. – 14 p.

134. Bujorianu M. Toward a general theory of stochastic hybrid systems / M. Bujorianu, J. Lygeros // Lecture Notes in Control and Information Sciences (LNCIS). – 2006. – Vol. 337(2006). – P. 3–30.

135. Hu L. Stochastic stability and robust control for sampled-data systems with Markovian jump parameter / L. Hu, P. Shi, B. Huang // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – Vol. 313. – P. 504–517.

136. Aliyu M. D. S. Robust H_∞ control for Markovian jump nonlinear systems / M. D. S. Aliyu, E. K. Boukas // IMA J. Math. Control Inform. – 2000. – Vol. 17. – P. 295–308.

137. Dragan V. The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems With Multiplicative White Noise and Markovian Jumping / V. Dragan, T. Morozan // IEEE TRANSLATION ON AUTOMATIC CONTROL. – 2004. – Vol. 49, Iss. 55. – P. 665–675.

138. Benjelloun K. H_∞-control for linear time-delay systems with Markovian jumping parameters / K. Benjelloun, E. K. Boukas, O. L. Costa // J. Optim. Theory Appl. – 2000. – Vol. 105, Iss 1. – P. 73–95.

139. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. – Екатеринбург : УГАПС, 1998. – 222 с.

140. Свердан М. Л. Устойчивость стохастических импульсных систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. – Рига : РТУ, 1994. – 300 с.

141. Lukashiv T. O. Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. I. General theorems on the stability of stochastic impulse systems / T. O. Lukashiv, I. V. Yurchenko, V. K. Yasinskii // Cybernetics and Systems Analysis. – 2009. – Vol. 45, Iss. 2. – P. 281–290.

142. Lukashiv T. O. Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. II. First-approximation stability of stochastic impulse systems with markov parameters / T. O. Lukashiv, I. V. Yurchenko, V. K. Yasinskii // Cybernetics and Systems Analysis. – 2009. – Vol. 45, Iss. 3. – P. 464–476.

143. Lukashiv T. O. Stabilization of Stochastic Diffusive Dynamical Systems with Impulse Markov Switchings and Parameters. Part I. Stability of Impulse Stochastic Systems with Markov Parameters / T. O. Lukashiv, V. K. Yasinskiy, E. V. Yasinskiy // Journal of Automation and Information Sciences. – 2009. – Vol. 41, Iss. 2. – P. 1–24.

144. Lukashiv T. O. Stabilization of Stochastic Diffusive Dynamical Systems with Impulse Markov Switchings and Parameters. Part II. Stabilization of Dynamical Systems of Random Structure with External Markov Switchings / T. O. Lukashiv, L. I. Yasinskaya, V. K. Yasinskiy // Journal of Automation and Information Sciences. – 2009. – Vol. 41, Iss. 4. – P. 26–42.

145. Lukashiv T. Existence and uniqueness of solution of stochastic dynamic systems with Markov switching and concentration points / T. Lukashiv, I. Malyk // International Journal of Differential Equations. – 2017. – Vol. 2017. – 5 p.

146. Tsarkov Ye. F. Stability in impulsive systems with Markov perturbations in averaging scheme. I. Averaging principle for impulsive Markov systems / Ye. F. Tsarkov, V. K. Yasinsky, I. V. Malyk // Cybernetics and system analysis. – 2010. – Vol. 46, Iss. 6. – P. 975–985.

147. Tsarkov Ye. F. Stability in impulsive systems with Markov perturbations in averaging scheme. 3. Weak convergence of solutions / Ye. F. Tsarkov, V. K. Yasinsky, I. V. Malyk // Cybernetics and Systems Analysis. – 2011. – Vol. 47, Iss. 3. – P. 442–458.

148. Gikhman I. I. Controlled stochastic processes / I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. – Springer Verlag, USA, 1979.

149. Bellman R. Dynamic Programming / R. Bellman. – Princeton University Press, Princeton, USA, 1972.

150. Andreeva E. A. Control of hereditary systems / E. A. Andreeva, V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet. – Nauka, Moskow, Russia, 1992.

151. Lukashiv T. O. Synthesis of the Optimal Control for Linear Stochastic Dynamical Systems with Finite Aftereffect and Poisson Disturbances / T. O. Lukashiv, L. I. Yasinskaya, V. K. Yasinskiy // Journal of Automation and Information Sciences. – 2008. – Vol. 40, Iss. 10. – P. 22–37.

152. Lukashiv T. O. Sufficient Optimality Conditions for Stochastic Dynamical Systems of Random Structure with Markovian Switchings / T. O. Lukashiv, I. V. Malyk // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – Vol. 48, Iss. 6. – P. 60–67.

153. Das A. Synthesis of optimal control of stochastic dynamic systems of random structure with Markov switchings / A. Das, T. O. Lukashiv, I. V. Malyk //

Journal of Automation and Information Sciences. – 2017. – Vol. 4, Iss. 49. – P. 37–47.

154. Malyk I. V. Compensating operator and weak convergence of semi-Markov process to the diffusion process without balance condition / I. V. Malyk // Journal of Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 2015. – 7 p.

155. Oksendal B. Stochastic Differential Equations / B. Oksendal. – Springer, New York, NY, USA, 2013.

156. Lukashiv T. One Form of Lyapunov Operator for Stochastic Dynamic System with Markov Parameters / T. Lukashiv // Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 2016. – P. 5.

157. Optimal Control of Stochastic Dynamic Systems of a Random Structure with Poisson Switches and Markov Switching / S. V. Antonyuk, M. F. Byrka, M. Y. Gorbatenko, T. O. Lukashiv, I. V. Malyk // Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 2020. – P. 9.

158. Yurchenko I. V. On stability of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential equation with random parameters / I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy // SWorld Journal. – Scientific world, Ivanovo, 2017. – Iss. 12 – P. 343–356.

159. Ясинський В. К. Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішних збурень / В. К. Ясинський, І. В. Юрченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2017. – № 2. – С. 103–114.

160. Юрченко І. В. Стохастичне прогнозування. Навч. посібник. 2-е видання / І. В. Юрченко. – Чернівці : Видавничий дім "Родовід", 2017. – 78 с.

161. Ясинський В. К. Існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими

збуреннями / В. К. Ясинський, І. В. Юрченко, У. М. Кисілюк // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2017. – Вип. №1 (30). – С. 143–153.

162. Ясинський В. К. Асимптотика другого моменту розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних із зовнішними випадковими збуреннями / В. К. Ясинський, І. В. Юрченко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. – Вип. 16. – С. 181–192.

163. Юрченко И. В. Существование функционалов Ляпунова-Красовского для стохастических дифференциально-функциональных уравнений Ито-Скорохода при условии устойчивости решений по вероятности с конечным последействием / И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – Т. 54, № 6. – С. 119–133.

164. Yurchenko I. V. The existence of Lyapunov-Krasovskii functionals for stochastic differential-functional Ito-Skorokhod equations under the condition of the solutions stability on probability with finite aftereffect / I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy // Cybernetics and Systems Analysis. – 2018. – Vol. 54, Iss. 6. – P. 957–970.

165. Yurchenko I. V. Stability of the solution of stochastic partial differential equation with random parameters / I. V. Yurchenko, V. S. Sikora // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. – 2018. – VI(18), Iss. 158. – P. 21–24.

166. Yurchenko I. V. On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito-Skorokhod equation with random parameters / I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy // System Research and Information Technologies. – 2018. – № 3. – P. 80–90.

167. Ясинський В. Достатні умови існування функціонала Ляпунова-Красовського для стохастичної динамічної системи випадкової структури зі скінченною післядією / В. Ясинський, І. Юрченко, І. Дорошенко, Т. Лукашів // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р. – Чернівці : ЧНУ, 2018. – С. 115.

168. Yurchenko I. V. On existence of solution of the Cauchy problem for one class of stochastic partial differential-difference equations with random external perturbations / I. V. Yurchenko, V. S. Sikora // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. – 2019. – VII(23), Iss. 193. – P. 89–92.

169. Ясинський В. К. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Монографія. Видання друге, доповнене / В. К. Ясинський, І. В. Юрченко. – Чернівці : Технодрук, 2019. – 258 с.

170. Юрченко І. В. Дослідження задач дискретної оптимізації на комп'ютері / І. В. Юрченко, Д. В. Бляхер // Научный взгляд в будущее. – Вып. 15. Том 1. – Одесса : Куприенко СВ, 2019. – С. 82–88.

171. Yurchenko I. V. Research of discrete optimization problems on computer / I. V. Yurchenko, D. V. Blyacher // International conference "The Future of Mankind in the Results of Today's Scientific Research '2019" (Ukraine, Odessa, 11–12 November, 2019). – [Електронний ресурс]

172. Лукашів Т. О. Про необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь у частинних похідних під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин / Т. О. Лукашів, І. В. Юрченко, В. К. Ясинський // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 157–165.

173. Lukashiv T. O. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables / T. O. Lukashiv, I. V. Yurchenko, V. K. Yasynskyy // Cybernetics and System Analysis. – 2020. – Vol. 56, Iss. 2. – P. 303–311.

174. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. В 3-х частях. Ч. 1 / К. М. Поливанов. – Энергия, 1965. – 358 с.

175. Дорошенко І. В. Застосування методу стохастичних функціоналів Ляпунова-Красовського до реальних задач з марковськими перемиканнями / І. В. Дорошенко, Н. В. Циба // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія : Комп'ютерні системи та компоненти. – Т. 8, № 2. – Чернівці : ЧНУ, 2017. – С. 73–76.