УДК 517.95+517.929+519.863
№ держреєстрації 0106U008365
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ЧНУ ім. Ю.Федьковича
58000, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
тел. (0372) 52-61-42, nd-office@chnu.edu.ua

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
Проректор з наукової роботи
професор ________ Ушенко О.Г
13 грудня 2010 р.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

(заключний)

Керівник НДР
зав. кафедрою
математичного моделювання
д.ф.-м.н., професор ________ Черевко І.М.

2010

С П И С О К   А В Т О Р І В

1. Завідувач кафедри, доктор фіз.-мат. наук, професор	____________	Черевко І.М. (реферат, вступ, 2.1, 4.1-4.4, 5.1, висновки)
2. Професор кафедри, доктор фіз.-мат. наук, професор	____________	Івасишен С.Д. (1.1.1, 1.1.2, 1.2.1, 1.2.2, 1.3)
3. Доцент кафедри, доктор фіз.-мат. наук, доцент	____________	Літовченко В.А. (3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2)
4. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Клевчук І.І. (2.2)
5. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Кушнірчук В.Й. (5.3.2)
6. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Готинчан Т.І. (3.1.4)
7. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Пасічник Г.С. (1.1.3, 1.2.2)
8. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Піддубна Л.А. (4.3)
9. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Фратавчан Т.М. (1.2.1)
10. Доцент кафедри, кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Лавренчук В.П. (1.2.1)

11. Доцент кафедри кандидат фіз.-мат. наук, доцент	____________	Івасюк Г.П. (1.3)
12. Асистент кафедри кандидат фіз.-мат. наук, асистент	____________	Лаюк В.В. (1.1.1, 1.1.2)
13. Асистент кафедри кандидат фіз.-мат. наук, асистент	____________	Матвій О.В. (4.1, 4.2, 5.1)
14. Асистент кафедри	____________	Перцов А.С. (5.2)
15. Асистент кафедри	____________	Строєв О.М. (5.3)
16. Аспірант кафедри	____________	Пернай С.А. (4.4)
17. Аспірант кафедри	____________	Спіжавка Д.І. (3.1.3, 3.2.3)
18. Асистент кафедри	____________	Сачко А.В. (5.1.2)

Нормоконтролер	____________	Холодницька Л.М.

Р Е Ф Е Р А Т

Звіт про НДР: 142 с., 122 джерела.

Об'єкт дослідження – рівняння та системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу, диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння, математичні моделі процесів із запізненням та випадковостями.

Мета роботи – дослідження коректної розв'язності і властивостей розв'язків задачі Коші та багатоточкової задачі для нових класів параболічних рівнянь і систем рівнянь; вивчення асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь та побудова схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь; математичне моделювання процесів із запізненням та випадковостями.

Для параболічних систем з виродженням і зростаючими коефіцієнтами, а також ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова досліджені властивості фундаментальних розв'язків та описані класи коректності задачі Коші. Одержано явний вираз ФРЗК для параболічних рівнянь другого порядку, встановлено коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Означено нові класи параболічних псевдодиференціальних систем та побудовано для цих класів теорію коректної розв'язності задачі Коші в просторах нескінченно диференційованих функцій Здійснено розщеплення лінійної сингулярно збуреної системи із запізненням на незалежні підсистеми, досліджено стійкість системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням. Побудовані схеми апроксимації систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів. Встановлені умови розв'язності крайових задач із запізненням, досліджено їх апроксимацію системами звичайних диференціальних рівнянь та здійснено комп'ютерне моделювання. Побудована та досліджена динамічна модель теорії ризиків з неоднорідністю та перестрахуванням.

Усі наведені в звіті результати є новими. Вони можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях так і при обґрунтуванні методик розв'язання та наближеній побудові розв'язків конкретних прикладних задач.

ПАРАБОЛІЧНІ, УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ, ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ВИРОДЖЕННЯ, СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ, ЗАДАЧА КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, КОРЕКТНА, ЦІЛКОВИТА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, ІНТЕГРАЛЬНИЙ МНОГОВИД, МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ, МІНІМАКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ, СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ І СКОРОЧЕНЬ

$\mathbb{N}_m$	— сукупність послідовних натуральних чисел від 1 до m;
$\mathbb{Z}_+^m$	— множина всіх m-вимірних мультиіндексів;
$\mathbb{C}^m$	— комплексний m-вимірний простір;
i	— уявна одиниця;
n_1, n_2, n_3	— натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$;
n	$:= n_1 + n_2 + n_3$ або задане натуральне число;
k_s	$:= (k_{s1}, ..., k_{sn_s})$ — елемент множини $\mathbb{Z}_+^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$;
k	$:= (k_1, k_2, k_3)$ — елемент множини $\mathbb{Z}_+^n$;
$\lvert k_s \rvert$	$:= k_{s1} + ... + k_{sn_s}$, якщо $k_s \subset \mathbb{Z}_+^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$;
∂_t, ∂_y	— операції диференціювання першого порядку відповідно за одновимірними змінними t, y;
∂_y^k	— операція диференціювання порядку $k > 0$ за змінною $y \in \mathbb{R}$;
∂_x^k	$:= \partial_{x_1}^{k} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}$, якщо $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$;
Π_H^m	$:= \{(t, x) \in \mathbb{R}^{m+1} \,\vert\, t \in H,\, x \in \mathbb{R}^m\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$;
Π_H	$:= \Pi_H^n$;
$\mathbf{\Phi}$	$:= \Phi^m$ – декартовий степінь простору Φ з показником m і покомпонентною збіжністю в Φ;
$\mathrm{P}(\Phi)$	– сукупність усіх квадратних матриць порядку m, стовпці яких є елементами $\mathbf{\Phi}$, з поелементною збіжністю в Φ;
S	– простір Шварца;
Φ'	– простір, топологічно спряжений з Φ;
$C^\infty(L)$	– сукупність усіх нескінченно диференційовних на L функцій;
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}$	– простір усіх фінітних функцій з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
$L_p(\mathcal{L})$	– простір Лебега інтегровних на $\mathcal{L}$ функцій зі степенем p;

$\Pi^n_{\tau,T}$	$:= \{(t,x)\,	\, t \in (\tau, T],\, x \in \mathbb{R}^n\};$
$\langle f, \varphi\rangle$	– результат дії узагальненої функції f на основну функцію φ;
$f * \varphi$	– операція згортки f з φ;
$\lvert\cdot\rvert$	$:= \sqrt{(\mathrm{Re}(\cdot))^2 + (\mathrm{Im}(\cdot))^2};$
$\lvert\mathcal{A}\rvert$	$:= \max\limits_{k\in\mathbb{N}_n\, l\in\mathbb{N}_m} \lvert a_{kl}\rvert$ у випадку, коли $\mathcal{A} = (a_{kl})^{n,m}_{k=1,l=1}$ – матриця;
$\overrightarrow{0}$	$:= (0;\ldots;0) \subset \mathbb{Z}^n_+;$
$\overrightarrow{1}$	$:= (1;\ldots;1) \subset \mathbb{Z}^n_+;$
$1/\overrightarrow{\alpha}$	$:= (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n);$
$\lvert q\rvert_*$	$:= \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert q_j\rvert$, де $q = (q_1, \ldots, q_n)$;
$\lvert x\rvert_*^{\overrightarrow{\alpha}}$	$:= \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert x_j\rvert^{\alpha_j},\ x \in \mathbb{R}^n;$
$q^{q\overrightarrow{\alpha}}$	$:= \prod\limits_{j=1}^{n} q_j^{q_j\alpha_j},\ q \in \mathbb{Z}^n_+;$
x^k	$:= \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{k_j},\ x \in \mathbb{C}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n_+;$
$[a;b]^r$	– куб у просторі $\mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}$, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$;
ФМР	– фундаментальна матриця розв'язків;
ФРЗК	– фундаментальний розв'язок задачі Коші;
ПДО	– псевдодиференціальний оператор;
ПДР	– псевдодиференціальне рівняння;
ПДС	– псевдодиференціальна система;
ДРР	– диференціально-різницеве рівняння;
ДФР	– диференціально-функціональне рівняння.

ВСТУП

У звіті наведені результати, які одержані протягом 2006-2010 рр. співробітниками кафедри математичного моделювання ЧНУ при виконанні НДР "Якісне дослідження та математичне моделювання процесів, що описуються диференціальними та диференціально-функціональними рівняннями". Ці дослідження є продовженням виконаної в 2001-2005 рр. кафедрою математичного моделювання НДР "Дослідження математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями з особливостями та виродженнями".

У звіті представлені в основному результати, що стосуються нових класів параболічних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь і систем рівнянь, асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, побудови схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь, а також математичному моделюванню процесів з післядією та випадковостями. Наведені результати стосуються вивчення опису класів коректності задачі Коші і багатоточкової задачі для нових класів параболічних та еволюційних рівнянь і систем рівнянь, застосуванню методів інтегральних многовидів, усереднення та схем апроксимації до систем диференціально-різницевих рівнянь, а також математичного моделювання процесів із запізненням, мінімаксного оцінювання функціоналів та аналізу граничних теорем теорії ризиків.

Звіт складається з 5 розділів.

Результати, що представлені в першому розділі, стосуються вивчення фундаментальних розвязків задачі Коші та опису класів коректності задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова, рівнянь з оператором Бесселя, рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова та систем параболічних рівнянь Солонникова-Ейдельмана.

Другий розділ містить результати застосування методу інтегральних многовидів для лінійних сингулярно збурених систем із запізненням та дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь методом усереднення.

У третьому розділі наведено результати, пов'язані з означенням нових класів параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем рівнянь як з гладкими, так і точково-негладкими символами псевдодиференціювання, залежними лише від часового параметра, та описом якомога ширших множин їх гладких розв'язків, які стосовно просторової змінної мають властивості, що є характерними для їх фундаментальних розв'язків, а також з розвиненням теорії просторів основних і узагальнених функцій типу Фреше, як середовища дослідження задачі Коші та багатоточкової задачі для таких рівнянь і систем.

У четвертому розділі наводяться результати дослідження схем апроксимації систем ДРР запізнюючого та нейтрального типів, а також системи диференціально-різницевого та різницевого рівняння з багатьма запізненнями.

П'ятий розділ присвячений математичному моделюванню крайових задач із запізненням, отриманню мінімаксних оцінок функціоналів та дослідженню динамічної моделі теорії ризиків.

Дослідження, результати яких увійшли до звіту, використовуються при виконанні студентами курсових, дипломних і магістерських робіт. За їх матеріалами захищено кандидатські дисертації Г.П. Івасюк (2008 р., науковий керівник С.Д. Івасишен), В.В. Лаюком (2009 р., науковий керівник С.Д. Івасишен), О.В. Матвієм (2009 р., науковий керівник І.М. Черевко) та докторську дисертацію В.А. Літовченком (2009 р., науковий консультант С.Д. Івасишен).

Виконавці НДР брали активну участь у роботі міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Ними зроблено – 38 доповідей.

1 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ОСОБЛИВОСТЯМИ ТА ВИРОДЖЕННЯМИ

У цьому розділі наводяться результати, що стосуються класів $\mathbf{E_1^B}$—$\mathbf{E_3^B}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова; двох класів $\mathbf{E_4}$ та $\mathbf{E_5}$ параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти груп молодших членів яких можуть необмежено зростати за просторовими змінними на нескінченності; класу $\mathbf{E_6}$ систем параболічних рівнянь Солонникова–Ейдельмана.

Результати підрозділу, крім пункту 1.1.3, належать С.Д. Івасишену та В.В. Лаюку [2-12], пункт 1.1.3 – Г.С. Пасічник [13, 14]; результати пункту 1.2.1 належать С.Д. Івасишену, Т.М. Фратавчан, В.П. Лавренчуку [15-19], а пункту 1.2.2 – С.Д. Івасишену та Г.С. Пасічник [20-22]; результати підрозділу 1.3 належать С.Д. Івасишену та Г.П. Івасюк [25-32].

1.1 Класи $\mathbf{E_1^B}$—$\mathbf{E_3^B}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова

У підрозділі означуються нові класи рівнянь $\mathbf{E_1^B}$—$\mathbf{E_3^B}$, вказується на зв'язок класів рівнянь $\mathbf{E_1^B}$— $\mathbf{E_3^B}$ з класами $\mathbf{E_{21}}$— $\mathbf{E_{23}}$ та досліджується питання існування та властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для рівнянь із класів $\mathbf{E_1^B}$— $\mathbf{E_3^B}$, застосуванню результатів про ФРЗК для рівнянь із класів $\mathbf{E_1^B}$—$\mathbf{E_3^B}$ до встановлення для них коректної розв'язності задачі Коші та інтегрального зображення розв'язків.

Крім того сформульовано деякі додаткові результати для рівнянь із класу $\mathbf{E_2^B}$, окремо розглядається випадок рівняння, коефіцієнти якого можуть зростати.

1.1.1 Фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівнянь із класів $\mathbf{E_1^B}$— $\mathbf{E_3^B}$. Крім позначень, що входять до загального списку позначень, у цьому підрозділі використовуються специфічні позначення, які будемо наводити за потребою їх вживання.

Нехай n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, \ldots, x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно з цим мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записується у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_s := (k_{s1}, \ldots, k_{sn_s}) \in \mathbb{Z}_+^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$. Далі T — задане додатне число, $\Pi_{(0,T]} := \{(t, x)|t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$, $\Pi_{[0,T]} := \{(t, x)|t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$.

Розглядаються рівняння вигляду

$$(S - A_s(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.1$_s$}$$

де $s \in \mathbb{N}_3$,

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}, \tag{1.2}$$

$$A_1(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \leq 2b} a_{k_1}(t, x)\partial_{x_1}^{k_1}, \tag{1.3}$$

$$A_2(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t, x), \tag{1.4}$$

$$A_3(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t, x)\partial_{x_1}^{k_1}. \tag{1.5}$$

У виразі (1.3) b — задане число з $\mathbb{N}$ і $|k_1| := \sum\limits_{j=1}^{n_1} k_{1j}$, у (1.5) b — найменше спільне кратне заданих чисел b_1,...,b_{n_1} з $\mathbb{N}$ і $\|k_1\| := \sum\limits_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$, де $m_j := b/b_j$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$. Змінні t і x_1 називаються основними.

Нехай $A_s^0(t, x, \partial_{x_1})$ — головна частина виразу $A_s(t, x, \partial_{x_1})$, тобто при $s = 1$ сума членів із (1.3), для яких $|k_1| = 2b$, при $s = 2$ перша сума з (1.4) і при $s = 3$ сума членів із (1.5), для яких $\|k_1\| = 2b$.

Означення 1.1. 1) Рівняння (1.1$_s$) називається *виродженим рівнянням типу Колмогорова*, якщо диференціальний вираз $L_s := \partial_t - A_s(t, x, \partial_{x_1})$ є в тому чи іншому сенсі параболічним за основними змінними.

2) Якщо диференціальні вирази L_1 і L_2 є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}$ параболічними за Петровським за основними змінними, то рівняння (1.1$_1$) називається *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова порядку* $2b$, а рівняння (1.1$_2$) — *ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова.*

3) Якщо ж вираз L_3 є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}$ $\overrightarrow{2b} := (2b_1, ..., 2b_{n_1})$-параболічним за Ейдельманом, то рівняння (1.1$_3$) називається *виродженим рівнянням типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основними змінними.*

Клас рівнянь, означених у пункті 1), у монографії [1] позначається через $\mathbf{E_2}$, в пункті 2) — відповідно через $\mathbf{E_{21}}$ і $\mathbf{E_{22}}$, в пункті 3) — через $\mathbf{E_{23}}$. Рівняння із класів $\mathbf{E_{21}}$ і $\mathbf{E_{23}}$ природно називати ще *ультрапараболічними рівняннями довільних порядків.*

Розглядатимемо далі рівняння вигляду

$$(S_B - A_s(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.6$_s$}$$

де $s \in \mathbb{N}_3$;

$$S_B := \partial_t - (x, BD_x) := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s} \right) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} \right) \partial_{x_{3j}}, \tag{1.7}$$

B — матриця розміру $n \times n$, яка має вигляд

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

B^1, B^2 — матриці, складені відповідно з дійсних чисел b_{sj}^1, $s \in \mathbb{N}_{n_1}$, $j \in \mathbb{N}_{n_2}$, b_{sj}^2, $s \in \mathbb{N}_{n_2}$, $j \in \mathbb{N}_{n_3}$, O — нульові матриці відповідних розмірів, $D_x :=$ col $(\partial_{x_{11}}, ..., \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, ..., \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, ..., \partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$; $A_s(t,x,\partial_{x_1})$ — вирази, визначені в (1.3)—(1.5).

Для рівнянь (1.6$_s$) припускаються виконаними такі умови:

$\boldsymbol{\alpha_1}$**)** матриця (1.8), в якій блоки B^1 і B^2 записані відповідно у вигляді $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix}$, де B_1^1, B_2^1, B_1^2 і B_2^2 — матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$, задовольняє умови $\det B_1^j \neq 0$, $j \in \mathbb{N}_2$;

$\boldsymbol{\alpha_{2s}}$**)** існує така стала $\delta > 0$, що для кожної точки $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\; A_s^0(t,x,i\sigma_1) \leq -\delta K_s(\sigma_1), \tag{1.9}$$

де i — уявна одиниця, а $K_s(\sigma_1) := \sum\limits_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{r_{sj}}$, $r_{1j} = 2b$, $r_{2j} = 2$, $r_{3j} = 2b_j$.

Класи рівнянь (1.6$_s$), які задовольняють умову $\boldsymbol{\alpha_1}$ та відповідно умови $\boldsymbol{\alpha_{21}}$, $\boldsymbol{\alpha_{22}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{23}}$, позначаються через $\mathbf{E_1^B}$, $\mathbf{E_2^B}$ і $\mathbf{E_3^B}$.

Припущення щодо гладкості коефіцієнтів виразів A_1—A_3, які наведемо нижче, гарантують лише існування розв'язків рівнянь із класів $\mathbf{E_1^B}$ — $\mathbf{E_3^B}$ у певному послабленому сенсі.

Означення 1.2. Функція u називається *диференційовною за Лі* в точці (t,x) відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом (1.7), якщо існує скінченна границя

$$(S_B^L u)(t,x) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(u(\gamma(t,x,h)) - u(\gamma(t,x,0))),$$

де $\gamma(t,x,h) := (t-h,(e^{hB'}x')')$, $h\in\mathbb{R}^n$, — інтегральна крива заданого векторного поля, яка проходить через точку (t,x) (тут і далі штрих означає транспонування матриці). Границя $(S_B^L u)(t,x)$ називається *похідною Лі* від функції u в точці (t,x) відносно заданого векторного поля.

Відзначимо, що якщо існують похідні $\partial_t u$, $\partial_{x_{2j}} u$ і $\partial_{x_{3j}} u$ в точці (t,x), то $(S_B^L u)(t,x) = (S_B u)(t,x)$.

Означення 1.3. Функція u називається *L-розв'язком рівняння* (1.6_s) в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_B^L u$ та звичайні похідні за x_1, які входять у вираз A_s, і в кожній точці $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$ задовольняється рівняння

$$(S_B^L - A_s(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x).$$

Надалі в цьому розділі під розв'язками рівнянь (1.6_s) розуміються L-розв'язки, а під виразом $S_B u$ — похідна Лі $S_B^L u$.

Зауважимо, що коли коефіцієнти виразів $A_1 - A_3$ не залежать від просторових змінних, L-розв'язки є класичними розв'язками.

Використовуючи структуру матриці B, описану в умові $\boldsymbol{\alpha_1}$, маємо

$$(e^{hB'}x')' = X(h) := (X_1(h), X_2(h), X_3(h)),$$

$$X_s(h) := (X_{s1}(h), ..., X_{sn_s}(h)), \quad s\in\mathbb{N}_3,$$

$$X_{1j}(h) := x_{1j},\ j\in\mathbb{N}_{n_1},\ X_{2j}(h) := x_{2j} + h\sum_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k},\ j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$X_{3j}(h) := x_{3j} + h\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{ks}^1 x_{1k}, \quad j\in\mathbb{N}_{n_3},$$

$$\gamma(t,x,h) = (t-h, X(h)), \quad h\in\mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Щоб сформулювати наступні припущення щодо коефіцієнтів виразів A_1—A_3, вводяться відповідні поняття гельдерових функцій. Для цього розглядаються спеціальні відстані між точками x і ξ, (t,x) і (τ,ξ), де $\{t,\tau\}\subset\mathbb{R}$, $\{x := (x_1,x_2,x_3),\ \xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s := (x_{s1},...,x_{sn_s}),\ \xi_s := (\xi_{s1},...,\xi_{sn_s})\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$. Приймається, що $d_s(x,\xi)$ дорівнює $\sum\limits_{l=1}^{3}|x_l-\xi_l|^{1/(2b(l-1)+1)}$ для $s=1$, $\sum\limits_{l=1}^{3}|x_l-\xi_l|^{1/(2l-1)}$ для $s=2$ і $\sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l}|x_{lj}-\xi_{lj}|^{1/(2b(l-1)+m_j)}$ для $s=3$, а

$$d_s(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/r_s} + d_s(x,\xi), \quad s\in\mathbb{N}_3, \tag{1.11}$$

де $r_1 := 2b$, $r_2 := 2$ і $r_3 := 2b$.

Для приростів функцій використовуються позначення типу

$$\Delta_x^{\xi} f(\cdot, x) := f(\cdot, x) - f(\cdot, \xi), \quad \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} f(t, x, \cdot) := f(t, x, \cdot) - f(\tau, \xi, \cdot).$$

Означення 1.4. Функція $f(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, називається *B_s-гельдеровою* з показником $\alpha \in (0,1]$ в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $H_s > 0$, що для будь-яких $\{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}$ виконується нерівність

$$|\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} f(t,x)| \le H_s \left(d_s(t, X(t-\tau); \tau, \xi)\right)^{\alpha},$$

де $s \in \{1,2,3\}$, $X(t-\tau)$ означено формулами (1.10), а d_s — формулами (1.11).

Крім умов $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, використовуються ще такі умови:

$\boldsymbol{\alpha_{3s}}$) коефіцієнти виразу $A_s(t,x,\partial_{x_1})$ обмежені та B_s-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$;

$\boldsymbol{\alpha_{4s}}$) коефіцієнти виразу $A_s(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені та B_s-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того самого вигляду, при яких вони стоять.

Вкажемо на зв'язок класів рівнянь $\mathbf{E_1^B}$— $\mathbf{E_3^B}$ з класами $\mathbf{E_{21}}$— $\mathbf{E_{23}}$. У рівняннях (1.6_s) здійснюється заміна змінних

$$\hat{x}_{1j} := \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n_2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n_1} b_{ks}^1 x_{1k} \right) b_{sj}^2, & j \in \mathbb{N}_{n_3}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k}, & j \in \{n_3+1, \ldots, n_2\}, \\ x_{1j}, & j \in \{n_2+1, \ldots, n_1\}; \end{cases}$$

$$\hat{x}_{2j} := \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s}, & j \in \mathbb{N}_{n_3}, \\ x_{2j}, & j \in \{n_3+1, \ldots, n_2\}; \end{cases} \qquad \hat{x}_{3j} := x_{3j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

яка коротко записується у вигляді

$$\hat{x}' = Ux', \quad U := \begin{pmatrix} U_1 & O & O \\ O & U_2 & O \\ O & O & U_3 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

де U_s — матриця розміру $n_s \times n_s$, а O — нульові матриці відповідних розмірів. На підставі умови $\boldsymbol{\alpha_1}$ ця заміна є невиродженою.

Після реалізації заміни (1.12) рівняння (1.6_s) переходять у рівняння

$$(S_{\hat{B}} - \hat{A}_s(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t,\hat{x}) = \hat{f}(t,\hat{x}), \quad (t,\hat{x}) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.13_s}$$

в яких

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} O & \hat{B}_1 & O \\ O & O & \hat{B}_2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_1 := \begin{pmatrix} I_{n_2} \\ O \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 := \begin{pmatrix} I_{n_3} \\ O \end{pmatrix}$$

(I_r — одинична матриця порядку r); $\hat{A}_s(t,\hat{x},\partial_{\hat{x}_1})$ — диференціальні вирази того самого вигляду, що й вирази $A_s(t,x,\partial_{x_1})$, їхні коефіцієнти $\hat{a}_{k_1}$, $\hat{a}_{js}$, $\hat{a}_j$ і $\hat{a}_0$ виражаються через виражені в нових змінних $\hat{x}$ коефіцієнти a_{k_1}, a_{js}, a_j і a_0 та елементи матриць B^1 і B^2. При цьому з умов $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$ випливають для рівнянь (1.13_s) відповідно умови $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{2s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{3s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{4s}}$, які відрізняються від попередніх лише тим, що в них $X(h)$ замінено на $\hat{X}(h) := (UX'(h))'$, де

$$\hat{X}_l(h) := (U_l X_l'(h))', \quad \hat{X}_{lj}(h) := \sum_{r=0}^{l-1} \frac{1}{r!} h^r \hat{x}_{(l-r)j}, \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Отже, за допомогою заміни (1.12) рівняння (1.6_s), для яких виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$, зводяться до рівнянь (1.13_s), які задовольняють умови $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{2s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{3s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{4s}}$. Останні рівняння належать до класів $\mathbf{E_{2s}}$, $s \in \mathbb{N}_3$.

Сформулюємо результати про ФРЗК для рівнянь (1.6_s), $s \in \mathbb{N}_3$. Щоб їх навести, запровадимо такі позначення:

$$M_1 := \sum_{l=1}^{3}(l-1+1/(2b))n_l, \;\; M_2 := \sum_{l=1}^{3}(l-1/2)n_l, \;\; M_3 := \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(l-1+1/(2b_j));$$

$$\|k_1\|_s := \begin{cases} |k_1| & \text{для } s \in \mathbb{N}_2, \\ \|k_1\| & \text{для } s = 3, \end{cases} \qquad k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1};$$

$$E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\{-c\sum_{l=1}^{3}(t-\tau)^{1-ql}|X_l(t-\tau)-\xi_l|^q\},$$

$$E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q\}\sum_{l=0}^{\infty}(\hat{C}\Gamma(\alpha/(2b))\times$$

$$\times(t-\tau)^{\alpha/(2b)})^l(\Gamma(l\alpha/(2b)))^{-1}E_{c\delta_0^l}^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\left\{-c\sum_{l=1}^{3}(t-\tau)^{1-2l}|X_l(t-\tau)-\xi_l|^2\right\},$$

$$E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\{-c\sum_{k=1}^{n_1}(t-\tau)^{1-q_k}|x_{1k}-\xi_{1k}|^{q_k}\}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}(\hat{C}\Gamma(\alpha/(2b))(t-\tau)^{\alpha/(2b)})^l(\Gamma(l\alpha/(2b)))^{-1}E_{c\delta_0^l}^{(3,1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$E_c^{(3,1)}(t,x_1;\tau,\xi_1) := \exp\{-c\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{n_l}(t-\tau)^{1-q_k l}|X_{lk}(t-\tau)-\xi_{lk}|^{q_k}\},$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$; c, $\hat{C}$ і δ_0 — деякі додатні сталі, причому $\delta_0 < 1$; число α з умови $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$; Γ — гамма-функція Ейлера; $q := 2b/(2b-1)$, $q_k := 2b_k/(2b_k - 1)$.

Спочатку розглядаються рівняння

$$(S_B - A_s(t, \partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.14$_s$}$$

в яких $s \in \mathbb{N}_3$, а коефіцієнти не залежать від просторових змінних і задовольняють таку умову:

$\boldsymbol{\beta_s}$) коефіцієнти виразу $A_s(t, \partial_{x_1})$ неперервні на $[0,T]$ та існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $t \in [0,T]$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність (1.9), в якій $A_s^0(t, x, i\sigma_1)$ замінено на $A_s^0(t, i\sigma_1)$.

Щоб сформулювати відповідну теорему 1.1 про повне аналітичне описання ФРЗК для рівнянь (1.14$_s$), запровадимо ще такі позначення:

$$M_{kl}^{(s)} := \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{3}(2b(r-1)+1)(|k_r| + |l_r|)/(2b) & \text{для } s = 1, \\ \sum\limits_{r=1}^{3}(2r-1)(|k_r| + |l_r|)/2 & \text{для } s = 2, \\ \sum\limits_{r=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_r}(2b(r-1)+m_j)(k_{rj} + l_{rj})/(2b) & \text{для } s = 3, \end{cases}$$

якщо $\{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $k := (k_1, k_2, k_3)$, $l := (l_1, l_2, l_3)$, $k_r := (k_{r1}, ..., k_{rn_r})$, $l_r := (l_{r1}, ..., l_{rn_r})$, $r \in \mathbb{N}_3$;

$$x_t^{(s)} := \begin{cases} (t^{-1/(2b)}x_1, t^{-1-1/(2b)}x_2, t^{-2-1/(2b)}x_3) & \text{для } s = 1, \\ (t^{-1/2}x_1, t^{-3/2}x_2, t^{-5/2}x_3) & \text{для } s = 2, \\ (t^{-1/(2b_1)}x_{11}, ..., t^{-1/(2b_{n_1})}x_{1n_1}, t^{-1-1/(2b_1)}x_{21}, ..., t^{-1-1/(2b_{n_2})}x_{2n_2}, \\ t^{-2-1/(2b_1)}x_{31}, ..., t^{-2-1/(2b_{n_3})}x_{3n_3}) & \text{для } s = 3, \end{cases}$$

якщо $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $x_r := (x_{r1}, ..., x_{rn_r})$, $r \in \mathbb{N}_3$; $Y(t)$ — точка, побудована за змінною y так само, як точка $X(t)$ за змінною x у (1.10);

$$\hat{E}_c^{(s)}(t, x; \tau, \xi) := \begin{cases} E_c^{(1,1)}(t, x; \tau, \xi) & \text{для } s = 1, \\ E_c^{(2)}(t, x; \tau, \xi) & \text{для } s = 2, \\ E_c^{(3,1)}(t, x; \tau, \xi) & \text{для } s = 3. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Нехай $s \in \mathbb{N}_3$ і виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\beta_s}$, тоді є правильними такі твердження:*

1) для рівняння (1.14$_s$) існує єдиний ФРЗК G_s;

2) функція G_s та її похідні допускають продовження в комплексний простір $\mathbb{C}^n$ і для цих продовжень є правильними формули

$$\partial_x^k \partial_\xi^l G_s(t, x+iy; \tau, \xi+i\eta) = (t-\tau)^{-M_s - M_{kl}^{(s)}} \times$$

$$\times \Omega_{kl}^{(s)}(t,\tau,z)\big|_{z=(X(t-\tau)-\xi)_{t-\tau}^{(s)} + i(Y(t-\tau)-\eta)_{t-\tau}^{(s)}},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, y, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{k,\, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

в яких $\Omega_{kl}^{(s)}(t,\tau,z)$, $z := (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, при фіксованих t і τ є цілими функціями від $z_1, ..., z_n$ порядків зростання відповідно $q_1^{(s)}, ..., q_n^{(s)}$ і цих самих порядків спадання при $z = x \in \mathbb{R}^n$, при цьому $q_j^{(1)} = q$, $q_j^{(2)} = 2$ і $q_j^{(3)} = p_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, де $p_j = q_j$ для $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, $p_j = q_r$, якщо $j = n_1 + r$, $r \in \mathbb{N}_{n_2}$, і $p_j = q_r$, коли $j = n_1 + n_2 + r$, $r \in \mathbb{N}_{n_3}$;

3) справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k \partial_\xi^l G_s(t, x; \tau, \xi)\right| \le C_{kl}(t-\tau)^{-M_s - M_{kl}^{(s)}} \hat{E}_c^{(s)}(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{k,\, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \qquad (1.15_s)$$

де C_{kl} і c — додатні сталі, які залежать тільки від чисел n_1, n_2, n_3, b (тільки для $s = 1$), $b_1, ..., b_n$ (тільки для $s = 3$), T, максимумів модулів коефіцієнтів диференціального виразу A_s, сталої δ з умови $\boldsymbol{\beta_s}$ та коефіцієнтів матриць B^1 і B^2.

Для рівнянь (1.6_s) основною є наступна теорема.

Теорема 1.2. *Нехай $s \in \mathbb{N}_3$ і виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$. Тоді для рівняння (1.6_s) існує ФРЗК Z_s, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z_s(t, x; \tau, \xi)| \le C(t-\tau)^{-M_s - \|k_1\|_s / r_s} E_c^{(s)}(t, x; \tau, \xi), \quad \|k_1\|_s \le r_s,$$

$$|S_B Z_s(t, x; \tau, \xi)| \le C(t-\tau)^{-M_s - 1} E_c^{(s)}(t, x; \tau, \xi),$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z_s(t, x; \tau, \xi)| \le C(d_s(x; x'))^\alpha (t-\tau)^{-M_s - (\|k_1\|_s + \alpha)/r_s} \times$$

$$\times (E_c^{(s)}(t, x; \tau, \xi) + E_c^{(s)}(t, x'; \tau, \xi)), \quad \|k_1\|_s \le r_s,$$

$$|\Delta_x^{x'} S_B Z_s(t, x; \tau, \xi)| \le C(d_s(x; x'))^\alpha (t-\tau)^{-M_s - 1 - \alpha/r_s} \times$$

$$\times (E_c^{(s)}(t, x; \tau, \xi) + E_c^{(s)}(t, x'; \tau, \xi)),$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_s(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-(\|k_1\|_s - \alpha)/r_s}, \quad 0 < \|k_1\|_s \le r_s,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} S_B Z_s(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-1 + \alpha/r_s}, \qquad (1.16)$$

в яких $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, C *і* c *— додатні сталі,* r_s *таке саме, як в (1.11).*

Якщо додатково виконується умова $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$, *то для спряженого рівняння*

$$(S_B^* - A_s^*(\tau, \xi, \partial_{\xi_1}))v(\tau, \xi) = g(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)},$$

де вирази S_B^* *і* $A_s^*(\tau, \xi, \partial_{\xi_1})$ *є спряженими відповідно до* S_B *і* $A_s(t, x, \partial_{x_1})$, *існує ФРЗК* Z_s^*, *який зв'язаний із* Z_s *рівністю*

$$Z_s^*(\tau, \xi; t, x) = \overline{Z_s(t, x; \tau, \xi)}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$$

(риска означає комплексне спряження), і для Z_s *є правильною формула згортки*

$$Z_s(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_s(t, x; \lambda, y) Z_s(\lambda, y; \tau, \xi) dy,$$

$$0 \le \tau < \lambda < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.17}$$

1.1.2 Задача Коші для рівнянь із класів $\mathbf{E_1^B}$— $\mathbf{E_3^B}$. Результати про ФРЗК для рівнянь (1.6_s) і (1.14_s), $s \in \mathbb{N}_3$, дозволяють дослідити властивості відповідних потенціалів і на їх основі довести різноманітні теореми про коректну розв'язність задачі Коші для таких рівнянь. При цьому найточніші результати одержуються для рівнянь (1.14_s), $s \in \mathbb{N}_3$, та (1.6_2), бо оцінки ФРЗК для таких рівнянь є найточнішими.

Означимо потенціали, норми і просторіви. Спочатку розглядаються однорідні рівняння

$$(S_B - A_s(t, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad s \in \mathbb{N}_3, \tag{1.18_s}$$

та рівняння (1.6_2). Згідно з теоремами 1.1 і 1.2 для цих рівнянь існують ФРЗК G_s і Z_2, для яких справджуються відповідно оцінки (1.15_s) і (1.16).

ФРЗК G_s і Z_2 породжують узагальнені теплові потенціали: інтеграли Пуассона функції φ

$$(P_s\varphi)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_s(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi) d\xi,$$

$$(P\varphi)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_2(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.19}$$

інтеграли Пуассона узагальненої міри μ

$$(P_{s0}\mu)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_s(t,x;0,\xi)d\mu(\xi),$$

$$(P_0\mu)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{1.20}$$

та об'ємний потенціал густини f

$$(Vf)(t,x) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{1.21}$$

Оскільки при $|x|\to\infty$ функції G_s і Z_2 прямують до нуля, то густини потенціалів (1.19) — (1.21) можуть відповідно зростати. При цьому самі потенціали, а отже, і розв'язки можуть експоненціально зростати при $|x|\to\infty$. Як відомо з монографії [1] в аналогічних випадках, порядки такого зростання визначаються порядками рівнянь, а типи зростання описуються спеціальними функціями від t. Для рівнянь (1.18_s) і (1.6_2) будуються такі функції і з їх допомогою означуються необхідні норми та простори.

Розглянемо набори функцій $\vec{k}(t,\vec{a})$ і $\vec{l}(t)$, $t\in[0,T]$, які означуються таким способом: для рівняння (1.18_1)

$$\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1),k_2(t,a_2),k_3(t,a_3)), \quad \vec{l}(t) := (l_1(t),l_2(t),l_3(t));$$
$$k_s(t,a_s) := c_0a_s(c_0^{2b-1}-a_s^{2b-1}t^{2b(s-1)+1})^{1-q}, \quad s\in\mathbb{N}_3;$$
$$l_1(t) := k_1(t,a_1)+2^{q-1}t^q\|B^1\|^qk_2(t,a_2)+2^{q-1}t^{2q}(\|B^1\|\|B^2\|)^qk_3(t,a_3),$$
$$l_2(t) := 2^{q-1}k_2(t,a_2)+4^{q-1}t^q\|B^2\|^qk_3(t,a_3), \quad l_3(t) := 4^{q-1}k_3(t,a_3), \tag{1.22}$$

де $c_0\in(0,c)$, c — стала з оцінок (1.15_1), $\vec{a} := (a_1,a_2,a_3)$ — набір таких невід'ємних чисел, що $T<\min\limits_{s\in\mathbb{N}_3}(c_0/a_s)^{(2b-1)/(2b(s-1)+1)}$, $\|B^1\|$ і $\|B^2\|$ — норми матриць B^1 і B^2 відповідно; для рівнянь (1.18_2) і (1.6_2) $\vec{k}(t,\vec{a})$ і $\vec{l}(t)$ визначаються формулами (1.22), в яких $2b=q=2$, а c — стала з оцінок (1.15_2) або (1.16); для рівняння (1.18_3)

$$\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_{11}(t,a_{11}),...,k_{1n_1}(t,a_{1n_1}),k_{21}(t,a_{21}),...,k_{2n_2}(t,a_{2n_2}),$$
$$k_{31}(t,a_{31}),...,k_{3n_3}(t,a_{3n_3})),$$
$$\vec{l}(t) := (l_{11}(t),...,l_{1n_1}(t),l_{21}(t),...,l_{2n_2}(t),l_{31}(t),...,l_{3n_3}(t));$$
$$k_{sj}(t,a_{sj}) := c_0a_{sj}(c_0^{2b_j-1}-a_{sj}^{2b_j-1}t^{2b_j(s-1)+1})^{1-q_j},$$

$$j \in \mathbb{N}_{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3;$$

$$l_{1j}(t) := k_{1j}(t, a_{1j}) + 2^{q_j-1}\theta(n_2 - j)t^{q_j}\|B^1\|^{q_j}k_{2j}(t, a_{2j}) +$$
$$+2^{q_j-2}\theta(n_3 - j)t^{2q_j}(\|B^1\|\|B^2\|)^{q_j}k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \mathbb{N}_{n_1};$$
$$l_{2j}(t) := 2^{q_j-1}k_{2j}(t, a_{2j}) + 4^{q_j-1}\theta(n_3 - j)t^{q_j}\|B^2\|^{q_j}k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \mathbb{N}_{n_2};$$
$$l_{3j}(t) := 4^{q_j-1}k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}, \tag{1.22$'$}$$

де $c_0 \in (0, c)$, c — стала з оцінок (1.15_3), $\vec{a} := (a_{11}, ..., a_{1n_1}, a_{21}, ..., a_{2n_2}, a_{31}, ..., a_{3n_3})$ — набір таких невід'ємних чисел, що

$$T < \min_{j \in \mathbb{N}_{n_3},\, s \in \mathbb{N}_3} (c_0/a_{sj})^{(2b_j-1)/(2b_j(s-1)+1)},$$

$\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$.

Далі для $t \geq 0$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ використовується позначення

$$[\vec{k}(t, \vec{a}), \xi] := \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} k_s(t, a_s)|\xi_s|^q & \text{для рівняння } (1.18_1), \\ \sum\limits_{s=1}^{3} k_s(t, a_s)|\xi_s|^2 & \text{для рівнянь } (1.18_2) \text{ і } (1.6_2), \\ \sum\limits_{s=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_s} k_{sj}(t, a_{sj})|\xi_{sj}|^{q_j} & \text{для рівняння } (1.18_3). \end{cases}$$

Нехай $p \in [1, \infty]$ і $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, — задана комплекснозначна функція, вимірна за x при будь-якому $t \in [0, T]$. Для кожного $t \in [0, T]$ означено норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} := \|u(t, x)\exp\{-[\vec{k}(t, \vec{a}), X(t)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} := \|u(t, x)\exp\{-[\vec{l}(t), x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимуться такі простори:

$L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $t \in [0, T]$, $p \in [1, \infty]$, — простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$; $L_p^{\vec{a}} := L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$;

$M^{\vec{a}}$ — простір зліченно адитивних функцій $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\vec{a}} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[\vec{a}, x]\}d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борельових множин в $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ — повна варіація μ;

$L_1^{-\vec{l}(T)}$ — простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\vec{l}(T)} := \|\psi(x)\exp\{[\vec{l}(T), x]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\vec{l}(T)}$ — простір таких неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, що $|\psi(x)|\exp\{[\vec{l}(T), x]\} \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Сформулюємо основні теореми. Наведемо спочатку теореми для рівнянь (1.18_s), $s \in \mathbb{N}_3$, і (1.6_2). При цьому для правої частини рівняння (1.6_2) використовуватимемо умови

$\boldsymbol{\gamma_p}$**)** функція $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ неперервна, локально гельдерова за x відносно відстані $d_2(x,\xi)$ рівномірно щодо t та для будь-якого $t \in (0,T]$ є скінченними величини $\|f(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $F_p(t) := \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} d\tau$, де $p \in [1,\infty]$.

Теорема 1.3. *Нехай $s \in \mathbb{N}_3$, $p \in [1,\infty]$ та виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\beta_s}$. Для будь-яких функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ та узагальненої міри $\mu \in M^{\vec{a}}$ формули*

$$u_s(t,x) = (P_s\varphi)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.23}$$

$$u_{s0}(t,x) = (P_{s0}\mu)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.24}$$

визначають єдині класичні розв'язки рівняння (1.18_s) в шарі $\Pi_{(0,T]}$, які мають такі властивості: існує стала $C > 0$, не залежна від φ та μ і така, що для довільного $t \in (0,T]$

$$\|u_s(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad \|u_{s0}(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\mu\|^{\vec{a}};$$

при $p \in [1,\infty)$ $\lim\limits_{t\to 0}\|u_s(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} = 0$, а при $p = \infty$ і для функції (1.24) $u_s(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ і $u_{s0}(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ слабко, тобто для будь-яких ψ відповідно з просторів $L_1^{-\vec{l}(T)}$ і $C_0^{-\vec{l}(T)}$ виконуються співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u_s(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx$$

і

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u_{s0}(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 1.3.

Теорема 1.4. *Нехай $s \in \mathbb{N}_3$, виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\beta_s}$ і u — класичний розв'язок в $\Pi_{(0,T]}$ рівняння (1.18_s), який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C, \quad t \in (0,T], \tag{1.25}$$

з деякими сталими $C > 0$ і $p \in [1,\infty]$. Тоді при $p \in (1,\infty]$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, а при $p = 1$ — єдина узагальнена міра $\mu \in M^{\vec{a}}$ такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді (1.23) і (1.24).

Для неоднорідного рівняння (1.6_2) теореми, аналогічні до теорем 1.3 і 1.4, формулюються так.

Теорема 1.5. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_{22}}$—$\boldsymbol{\alpha_{42}}$. *Тоді є правильними такі твердження:*

1) для довільної функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ *та будь-якої функції* f, *яка задовольняє умову* $\boldsymbol{\gamma_p}$, $p \in [1, \infty]$, *формула*

$$u(t,x) = (P\varphi)(t,x) + (Vf)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.26}$$

визначає єдиний L*-розв'язок рівняння* (1.6_2), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C(\|\varphi\|_p^{\vec{a}} + F_p(t)), \quad t \in (0,T],$$

при $p \in [1, \infty)$ — *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} = 0, \tag{1.27}$$

а при $p = \infty$ — *для довільної функції* $\psi \in L_1^{-\vec{l}(T)}$ *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx; \tag{1.28}$$

2) для будь-якої узагальненої міри $\mu \in M^{\vec{a}}$ *і функції* f, *що задовольняє умову* $\boldsymbol{\gamma_1}$, *формулою*

$$u(t,x) = (P_0\mu)(t,x) + (Vf)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.29}$$

визначається єдиний L*-розв'язок рівняння* (1.6_2), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C(\|\mu\|^{\vec{a}} + F_1(t)), \quad t \in (0,T],$$

і для довільної функції $\psi \in C_0^{-\vec{l}(T)}$ *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x). \tag{1.30}$$

Теорема 1.6. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.6_2) *виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_{22}}$—$\boldsymbol{\alpha_{42}}$, *для його правої частини* f — *умова* $\boldsymbol{\gamma_p}$, *а для його* L*-розв'язку* u, *визначеного в* $\Pi_{(0,T]}$, *справджується нерівність*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C, \quad t \in (0,T], \tag{1.31}$$

з деякими сталими $C > 0$ і $p \in [1, \infty]$. Тоді при $p \in (1, \infty]$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, а при $p = 1$ — єдина узагальнена міра $\mu \in M^{\vec{a}}$ такі, що L-розв'язок u зображується відповідно у вигляді (1.26) і (1.29).

Наслідок 1.1. Нехай $s \in \mathbb{N}_3$, $p \in [1, \infty]$, виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\beta_s}$, U_{ps} – класи всіх класичних розв'язків рівняння (1.18_s), які належать до просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ як функції x при кожному фіксованому $t \in (0, T]$ і для яких виконується умова (1.25). З теорем 1.3 і 1.4 випливають такі твердження:

1) множинами початкових значень розв'язків із класів U_{ps}, $p \in (1, \infty]$, та U_{1s} є відповідно простори $L_p^{\vec{a}}$ та $M^{\vec{a}}$ і тільки вони;

2) класи U_{ps}, $p \in (1, \infty]$, і U_{1s} є множинами значень операторів Пуассона P_s і P_{s0}, визначених формулами (1.19) і (1.20) на відповідно просторах $L_p^{\vec{a}}$ і $M^{\vec{a}}$, причому ці оператори є ізоморфізмами.

Наслідок 1.2. З теорем 1.5 і 1.6 випливають такі твердження: за умов на коефіцієнти та праву частину f рівняння (1.6_2) із цих теорем

1) простори $L_p^{\vec{a}}$ і $M^{\vec{a}}$ є множинами початкових значень L-розв'язків рівняння (1.6_2) тоді й тільки тоді, коли ці розв'язки задовольняють умову (1.31) при $p \in (1, \infty]$ і $p = 1$ відповідно;

2) для зображення L-розв'язків рівняння (1.6_2) у вигляді (1.26) чи (1.29) з $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ і $\mu \in M^{\vec{a}}$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова (1.31);

3) L-розв'язки рівняння (1.6_2), для яких виконується умова (1.31), задовольняють початкові умови при $t = 0$ в сенсі (1.27), (1.28) і (1.30).

1.1.3 ФРЗК для дисипативних рівнянь із класу $\mathbf{E_2^B}$. Розглянемо рівняння

$$(Lu)(t,x) := \Bigg(S_B - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} -$$

$$-a_0(t,x)\Bigg) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.32}$$

припускаючи його дисипативним згідно з наступним означенням, яке є аналогом відповідного означення для невироджених параболічних рівнянь (див. [1]).

Означення 1.5. Рівняння (1.32) називається *дисипативним* із класу $\mathbf{E_2^B}$ в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$;

2) функції $a_{js}(t,x)$, $\{j,s\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, $\tilde{a}_j(t,x) := a_j(t,x)(D(x))^{-1}, j \in \mathbb{N}_{n_1}$, та $\tilde{a}_0(t,x) := a_0(t,x)(D(x))^{-2}$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, обмежені;

3) рівняння

$$(\partial_t - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\partial_{x_{1j}x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_j(t,x)\partial_{x_{1j}}(-i\partial_y) - \tilde{a}_0(t,x)(-i\partial_y)^2)v(t,x,y) = 0 \tag{1.33}$$

з обмеженими коефіцієнтами та додатковою просторовою змінною y є рівномірно на $\Pi_{[0,T]} \times \mathbb{R}$ параболічним за Петровським за основними змінними t, x_1, y. Функція D при цьому називається характеристикою дисипації рівняння (1.34)

Щоб сформулювати результати про ФРЗК для дисипативного рівняння (1.32), наведемо припущення на коефіцієнти a_{js}, a_j, $\{j,s\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, та a_0.

$\boldsymbol{\varepsilon_1}$**)** Рівняння (1.32) є дисипативним із класу $\mathbf{E_2^B}$ у $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D.

$\boldsymbol{\varepsilon_2}$**)** Існують неперервні похідні $\partial_{x_1}^k a_{js}$, $\partial_{x_1}^k a_j$, $\{j,s\} \subset \mathbb{N}_1$, $\partial_{x_1}^k a_0$, $|k| \le 2$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^k a_{js}(t,x)| \le C(D(x))^{|k|(1-\varepsilon)},$$

$$|\partial_{x_1}^k a_j(t,x)| \le C(D(x))^{1+|k|(1-\varepsilon)},$$

$$|\partial_{x_1}^l a_0(t,x)| \le C(D(x))^{2+|k|(1-\varepsilon)}, \quad |k| \le 2, \tag{1.34}$$

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$; функції $a_{js}, \tilde{a}_j$, $\tilde{}a_0$, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_1$, є неперервними за t рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$.

$\boldsymbol{\varepsilon_3}$**)** Похідні $\partial_{x_1}^k a_{js}$, $\partial_{x_1}^k a_j$, $\{j,s\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, $\partial_{x_1}^k a_0$, $|k| \le 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за x відносно відстані $d_2(x,\xi)$ рівномірно щодо $t \in [0,T]$.

Для дисипативного рівняння (1.32) із класу $\mathbf{E_2^B}$ основною є така теорема.

Теорема 1.7. *Нехай для рівняння (1.32) виконуються умови* $\boldsymbol{\varepsilon_1} - \boldsymbol{\varepsilon_3}$. *Тоді для рівняння (1.32) існує ФРЗК* $Z_2(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3+|k_1|}{2}} E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \le C\sum_{j=0}^{|k_1|}(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3+|k_1|-j}{2}}(D(x))^{j(1-\varepsilon)} E_c^{(2)}(t,,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k_1| \le 2, \tag{1.35}$$

де $E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi)$ означено в пункті 1.1.1.

1.2 Деякі класи параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами

Підрозділ містить результати досліджень задачі Коші для двох класів параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти груп молодших членів яких можуть необмежено зростати за просторовими змінними на нескінченності.

Для класу $\mathbf{E_4}$ рівнянь з оператором Бесселяі та класу $\mathbf{E_5}$ рівнянь Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів наводяться результати про ФРЗК, теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків.

1.2.1 Клас $\mathbf{E_4}$ рівнянь з оператором Бесселя. Класом $\mathbf{E_4}$ назвемо клас рівнянь вигляду

$$\partial_t u(t,X) = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}u(t,X) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_j u(t,X)) + B_y u(t,X), \quad t>0, \quad X\in\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{1.36}$$

де $X := (x,y)$, $x := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}$; $a_{jl}\in\mathbb{R}$, причому матриця $A := (a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична й додатно визначена; $B_y := \partial_y^2 + ((2\nu+1)/y)\partial_y$ — оператор Бесселя, $\nu\geq 0$, $y>0$; $\mathbb{R}_+^{n+1} := \{X\in\mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, y>0\}$.

Рівняння (1.36) містять виродження, що спричинені, по-перше, наявністю в них оператора Бесселя за змінною y, коефіцієнт якого необмежений в околі точки $y=0$, і, по-друге, коефіцієнти рівнянь необмежені на нескінченності.

За допомогою методу Фур'є-Бесселя і методу характеристик знайдена така явна формула для ФРЗК для рівняння (1.36):

$$G(t,x;\tau,\Xi) := (2\pi\alpha(t-\tau))^{-n/2}2^{-2\nu-1}(\Gamma(\nu+1))^{-1}(\det A)^{-1/2}(t-\tau)^{-\nu-1}\times$$

$$\times\exp\{-\sum_{j,l=1}^{n} a'_{jl}(x_j - e^{-(t-\tau)}\xi_j)(x_l - e^{-(t-\tau)}\xi_l)\times$$

$$\times(2\alpha(t-\tau))^{-1}\}T_y^{\eta}[\exp\{-y^2/(4(t-\tau))\}],$$

$$t<\tau, \quad (X,\Xi)\subset\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{1.37}$$

де $\Xi := (\xi,\eta)$, $\alpha(t) := 1-e^{-2t}$; a'_{jl}, $\{j,l\}\subset\mathbb{N}_n$, — елементи матриці, оберненої до A; T_y^{η} — оператор узагальненого зсуву; Γ — гамма-функція Ейлера.

З формули (1.37) виведено оцінки

$$|\partial_x^k \partial_y^l \partial_\xi^m \partial_\eta^r G(t,X;\tau,\Xi)| \le C_{klmr}\beta(t-\tau)\times$$
$$\times(\alpha(t-\tau))^{-(|k|+|m|)/2}(t-\tau)^{-(l+r)/2}E(t-\tau,X,\Xi)\times$$
$$\times\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t-\tau,X,\Xi), \quad t>\tau, \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}_+^{n+1},$$
$$\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \{l,r\}\subset\mathbb{Z}_+, \tag{1.38}$$

в яких $\beta(t) := (\alpha(t))^{-n/2}t^{-\nu-1}$,

$$E(t,X,\Xi) := \exp\{-c_1|x-e^{-t}\xi|^2/\alpha(t) - c_2(y-\eta)^2/t\},$$
$$\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi) := \exp\{-\hat{c}_1|x-e^{-t}\xi|^2/\alpha(t)\}T_y^\eta[\exp\{-\hat{c}_2 y^2/t\}],$$

$c_1>0$, $\hat{c}_1>0$, $c_2\in(0,1/4)$, $\hat{c}_2 := \frac{1}{4}-c_2$. Крім того, встановлено властивість нормальності ФРЗК G і таку формулу згортки:

$$G(t,X;\tau,\Xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;\beta,\Sigma)G(\beta,\Sigma;\tau,\Xi)\zeta^{2\nu+1}d\sigma d\zeta,$$
$$\tau<\beta<t, \quad \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}_+^{n+1},$$

де $\Sigma := (\sigma,\zeta)$.

Зауваження 1.1. До рівнянь із класу $\mathbf{E_4}$ зводяться, зокрема, рівняння вигляду

$$\partial_t v(t,X) - \sum_{j=1}^n\Big(\partial_{x_j}^2 + 2b_j(x_j)\partial_{x_j} + \big(\frac{1}{2} - \frac{x_j^2}{4} + b_j^2(x_j) + b_j'(x_j)\big)\Big)v(t,X) -$$
$$-B_y v(t,X) = 0, \quad t>0, \quad X\in\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{1.39}$$

де b_j, $j\in\mathbb{N}_2$ — неперервно диференційовні функції в $\mathbb{R}$ і b_j' — похідна від b_j. Справді, якщо перейти від невідомої функції v до нової функції u за допомогою заміни

$$v(t,X) = \exp\{-\sum_{j=1}^n (P_j(x_j) - x_j^2/4)\}u(t,X),$$
$$t>\tau, X\in\mathbb{R}_+^{n+1},$$

де P_j — первісна функції b_j, то для функції u одержимо рівняння (1.36), в якому $a_{jl} = \delta_{jl}$, $\{j,l\}\subset\mathbb{N}_n$, δ_{jl} — символ Кронекера. Ця обставина дозволяє одержати таку формулу для ФРЗК Z для рівняння (1.39):

$$Z(t,X;\tau,\Xi) = \exp\{\sum_{j=1}^n(-P_j(x_j) + P_j(\xi_j) + (x_j^2-\xi_j^2)/4)\}G(t,X;\tau,\Xi),$$

$$t > \tau, \quad \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{1.40}$$

де G — ФРЗК для рівняння (1.36), в якому $a_{jl} = \delta_{jl}$, $\{j, l\} \subset \mathbb{N}_n$.

Наведемо теореми про коректну розв'язність задачі Коші для рівнянь (1.36) і (1.39) та інтегральні зображення розв'язків цих рівнянь.

Означимо сім'ї спеціальних банахових просторів функцій, які швидко зростають з ростом просторових змінних. Належністю до цих просторів характеризується еволюція в часі розв'язків розглядуваних рівнянь.

Нехай a_1, a_2 і T — фіксовані числа такі, що $a_j > 0$, $j \in \mathbb{N}_2$, $0 < T < \min(\frac{1}{2}\ln\frac{c_1+a_1}{a_1}, \frac{c_2}{a_2})$; $\Pi := (0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}_+$;

$$k_1(t, a_1) := \frac{c_1 a_1 e^{2t}}{c_1 - a_1 e^{2t}\alpha(t)}, k_2(t, a_2) := \frac{c_2 a_2}{c_2 - a_2 t},$$

$$\Phi_r(t, X) := \exp\{r(k_1(t, a_1)|x|^2 + k_2(t, a_2)y^2)\},$$
$$r \in \{-1, 1\}, t \geq 0, X \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Нехай $u(t, X)$, $(t, X) \in \overline{\Pi}$, — задана комплекснозначна функція, вимірна за Лебегом при кожному $t \in [0, T]$. Для $t \in [0, T]$ і $1 \leq p \leq \infty$ означимо норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{k(t,a)} := \|u(t, \cdot)\Phi_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \lambda)},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{k(t,a),P} := \left\| u(t, X) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} P_j(x_j) - \frac{|x|^2}{4} \right\} \Phi_{-1}(t, X) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \lambda)},$$

де $k(t, a) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2))$, $L_p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \lambda)$ — L_p-простір функцій φ: $\mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{C}$ відносно міри λ, пов'язаної з мірою Лебега рівністю

$$\lambda(A) = \int\limits_A y^{2\nu+1} dx dy.$$

Зауважимо при цьому, що для $1 \leq p < \infty$

$$\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \lambda)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\varphi(X)|^p d\lambda(X) \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\varphi(x, y)|^p y^{2\nu+1} dx dy \right)^{1/p}.$$

Позначимо через $L_p^{k(t,a)}$ і $L_p^{k(t,a),P}$ простори всіх вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій $\varphi(X)$, $X \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, для яких скінченні відповідно норми $\|\varphi\|_p^{k(t,a)}$ і $\|\varphi\|_p^{k(t,a),P}$.

Нехай $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борельових множин півпростору $\mathbb{R}_+^{n+1}$, а M — сукупність усіх зліченно адитивних функцій ν: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Якщо для ν ввести норму за формулою $\|\nu\| := |\nu|(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то M стане банаховим простором, який можна ототожнити з простором, спряженим до простору $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ усіх таких неперервних функцій $\varphi(X)$, $X \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, що $|\varphi(X)| \to 0$ при $|X| \to \infty$, з рівномірною нормою. Через $M^{k(0,a)}$ позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір μ: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int\limits_A \Phi_{-1}(0,X)d\mu(X), \quad A \in \mathcal{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^{k(0,a)}$

$$\|\mu\|^{k(0,a)} := \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Phi_{-1}(0,X)d|\mu|(X) < \infty.$$

Використовуватимемо ще такі простори:

$M^{k(0,a),P}$ — сукупність усіх узагальнених борельових мір μ: $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$ таких, що

$$\|\mu\|^{k(0,a),P} := \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \exp\left\{\sum_{j=1}^n P_j(x_j) - \frac{|x|^2}{4}\right\} \Phi_{-1}(0,X)d|\mu|(X) < \infty;$$

$L_1^{-k(T,a)}$ і $L_1^{-k(T,a),-P}$ — множини всіх вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій $\eta(X)$, $X \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|\eta(X)\Phi_1(T,X)\|_{L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}$$

і

$$\left\|\eta(X)\exp\left\{-\sum_{j=1}^n P_j(x_j) + \frac{|x|^2}{4}\right\}\Phi_1(T,X)\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)};$$

$C_0^{-k(T,a)}$ і $C_0^{-k(T,a),-P}$ — простори неперервних комплекснозначних функцій $\eta(X)$, $X \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, таких, що при $|X| \to \infty$ відповідно $\Phi_1(T,X)|\eta(X)| \to 0$ і

$$\exp\left\{-\sum_{j=1}^n P_j(x_j) + \frac{|x|^2}{4}\right\}\Phi_1(T,X)|\eta(X)| \to 0.$$

Сформулюємо теореми про коректну розв'язність задачі Коші для рівнянь (1.36) і (1.39).

Теорема 1.8. *Для довільної функції* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$, *та узагальненої міри* $\mu \in M^{k(0,a)}$ *формули*

$$u(t,X) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi), \tag{1.41}$$

$$u_0(t,X) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi), \tag{1.42}$$

$$(t,X) \in \Pi,$$

визначають єдині розв'язки рівняння (1.36) в Π, *які задовольняють умову*

$$\partial_y u(t,X)|_{y=0} = 0, \quad t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.43}$$

і мають такі властивості: існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* φ *та* μ *і така, що для будь-якого* $t \in (0,T]$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \leq C\|\varphi\|_p^{k(0,a)}, \quad \|u_0(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \leq C\|\mu\|^{k(0,a)};$$

при $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t,a)} = 0, \tag{1.44}$$

а при $p = \infty$ *і для функції (1.42)* $u(t,\cdot) \to \varphi$, $u_0(t,\cdot) \to \mu$, $t \to 0$, *слабко, тобто для довільних* η *відповідно із просторів* $L_1^{-k(T,a)}$ *і* $C_0^{-k(T,a)}$ *правильні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)u(t,X)d\lambda(X) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)\varphi(X)d\lambda(X), \tag{1.45}$$

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)u_0(t,X)d\lambda(X) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)d\mu(X). \tag{1.46}$$

Теорема 1.9. *Нехай* $\varphi \in L_p^{k(0,a),P}$, $1 \leq p \leq \infty$, *і* $\mu \in M^{k(0,a),P}$. *Тоді функції*

$$v(t,X) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi), \tag{1.47}$$

$$v_0(t,X) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi), \tag{1.48}$$

$$(t, X) \in \Pi,$$

є единими розв'язками рівняння (1.39) в Π*, які задовольняють умову (1.43) та умови: для будь-якого* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|v(t,\cdot)\|_p^{k(t,a),P} \leq C\|\varphi\|_p^{k(0,a),P}, \quad \|v_0(t,\cdot)\|_1^{k(t,a),P} \leq C\|\mu\|^{k(0,a),P};$$

при $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{t\to 0}\|v(t,\cdot)-\varphi\|_p^{k(t,a),P} = 0,$$

а при $p = \infty$ *і для* v_0 *правильні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)v(t,X)d\lambda(X) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)\varphi(X)d\lambda(X),$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)v_0(t,X)d\lambda(X) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)d\mu(X),$$

в яких η *— довільна функція відповідно із просторів* $L_1^{-k(T,a),-P}$ *і* $C_0^{-k(T,a),-P}$.

Інтеграли із (1.41), (1.47) та (1.42), (1.48) називаються *інтегралами Пуассона* відповідно функції φ та узагальненої міри μ.

Із теорем 1.8 і 1.9 випливає, що розв'язки (1.41) і (1.42) при кожному фіксованому $t \in (0,T]$ належать відповідно до просторів $L_p^{k(t,a)}$ і $L_1^{k(t,a)}$, а розв'язки (1.47) і (1.48) — відповідно до просторів $L_p^{k(t,a),P}$ і $L_1^{k(t,a),P}$.

Далі доведемо теореми про зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші та розв'язків, визначених у відкритому півшарі, для рівнянь (1.36) і (1.39).

Теорема 1.10. *Нехай* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$, *і* $\mu \in M^{k(0,a)}$. *Тоді правильні такі твердження:*

1) розв'язок u *рівняння (1.36), який задовольняє умову (1.43) та умову*

$$\exists C > 0 \ \forall t \in (0,T] : \ \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \leq C, \tag{1.49$_p$}$$

при $1 \leq p < \infty$ *виконується співвідношення (1.44), а при* $p = \infty$ *— співвідношення (1.45), зображується у вигляді (1.41);*

2) для розв'язку u *рівняння (1.36), для якого виконуються умова (1.43), нерівність* (1.49_1) *і співвідношення (1.46), правильне зображення (1.42).*

Теорема 1.11. *Нехай* u *— розв'язок рівняння (1.36) в* Π*, який задовольняє умову (1.43) та умову*

$$\exists C > 0 \ \exists p \in [1,\infty] \ \forall t \in (0,T] :$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C. \tag{1.50}$$

Тоді при $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$*, а при* $p = 1$ *— єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{k(0,a)}$ *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді (1.41) і (1.42).*

Теорема 1.12. *Якщо* v *— розв'язок рівняння (1.39), який задовольняє умову (1.43) та умову*

$$\exists C > 0 \;\; \exists p \in [1,\infty] \;\; \forall t \in (0,T] : \|v(t,\cdot)\|_p^{k(t,a),P} \le C,$$

то при $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{k(0,a),P}$*, а при* $p = 1$ *— єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{k(0,a),P}$ *такі, що розв'язок* v *зображується відповідно у вигляді (1.47) і (1.48).*

Наслідок 1.3. З теорем 1.16 і 1.19 випливає, що простори $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \le \infty$, і $M^{k(0,a)}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (1.36), які задовольняють умову (1.43), тоді й тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (1.50) відповідно з $1 < p \le \infty$ і $p = 1$. Ця умова є необхідною та достатньою для зображуваності розв'язків у вигляді (1.41) або (1.42).

З теорем 1.8 і 1.12 випливають аналогічні твердження для просторів $L_p^{k(0,a),P}$ і $M^{k(0,a),P}$.

1.2.2 Клас E_5 рівнянь Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів. У книзі [23, с.177–179] розглянуто n-вимірний марковський процес $\{x(t) := (x_1(t), ..., x_n(t)),\ t \ge 0\}$, який заданий системою лінійних стохастичних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} x_k(t) + n_j(t), \quad t \ge 0, \;\; j \in \mathbb{N}_n,$$

де β_{jk} — сталі коефіцієнти, а $\{n_j(t),\ t \ge 0\}$ – нормальні білі шуми з нульовими середніми значеннями та дельтавидними кореляційними функціями

$$< n_j(t_1) n_k(t_2) >= \frac{1}{2} R_{jk} \sqrt{N_j N_k}\, \delta(t_2 - t_1), \quad R_{jk} = 1, \;\; j = k,$$

$$t_1 \ge 0, \;\; t_2 \ge 0, \;\; \{j,k\} \in \mathbb{N}_n,$$

R_{jk} і N_j — сталі.

Рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова цього процесу має вигляд

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j} \partial_{x_k} (\alpha_{jk} u) + b \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k u \right), \tag{1.51}$$

де запроваджено позначення

$$\alpha_{jk} := \frac{1}{2} R_{jk} \sqrt{N_j N_k}, \quad b_{jk} := \frac{\beta_{jk}}{b}, \quad b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Припускаючи, що матриці $(\alpha_{jk})_{j,k-1}^n$ і $(b_{jk})_{j,k-1}^n$ є симетричними та додатно визначеними, за допомогою лінійної заміни незалежних змінних рівняння (1.51) можна звести до вигляду

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} u(t,x) - b \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \Bigg(x_j u(t,x) \Bigg),$$

$$t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.52}$$

де $A := (a_{jk})_{j,k-1}^n$ — додатно визначена матриця зі сталими дійсними елементами. Рівняння (1.52) є, таким чином, параболічним за Петровським рівнянням з необмежено зростаючими при $|x| \longrightarrow \infty$ коефіцієнтами при похідних від u першого порядку.

Клас рівнянь вигляду (1.52) назвемо класом $\boldsymbol{E_5}$. Фактично цей клас аналогічний класу рівнянь $\boldsymbol{E_4}$, якщо в них відсутній член з оператором Бесселя.

Так само, як для рівнянь із класу $\boldsymbol{E_4}$, знаходиться такий явний вираз для ФРЗК Z для рівняння (1.52):

$$Z(t,x;\tau,\xi) := \frac{|b|^{n/2}}{\Bigg(\pi |1 - e^{2b(t-\tau)}|\Bigg)^{n/2} \sqrt{\det A}} \times$$

$$\times \exp \Bigg\{ -|b| \sum_{k,l=1}^{n} \frac{a'_{kl}(x_k - \xi_k e^{-b(t-\tau)})(x_l - \xi_l e^{-b(t-\tau)})}{|1 - e^{-2b(t-\tau)}|} \Bigg\},$$

$$t > \tau, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.53}$$

де a'_{kl} — елементи оберненої до A матриці.

Використовуючи формулу (1.53), неважко переконатися в правильності рівностей

$$(LZ)(t,x;\tau,\xi) = 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) d\xi = |b|^{n/2} e^{nb(t-\tau)}, \quad t > \tau, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

та оцінок

$$|\partial_x^k \partial_\xi^m Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C_{km} |1 - e^{-2b(t-\tau)}|^{-(n+|k|+|m|)/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-|m|b(t-\tau) - c\frac{|x-\xi e^{-b(t-\tau)}|^2}{|1-e^{-2b(t-\tau)}|}\right\},$$

$$t > \tau, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \tag{1.54}$$

де C_{km} і c — додатні сталі.

Аналогічно знаходиться ФРЗК $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $\tau < t$, $\{\xi,x\} \subset \mathbb{R}^n$, для спряженого до (1.52) рівняння

$$\left(-\partial_\tau - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_k} + b\sum_{j=1}^{n}\xi_j\partial_{\xi_j}\right)v(\tau,\xi) = 0,$$

$$\tau \geq 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.55}$$

ФРЗК Z має наступні властивості.

1^0. Нормальність ФРЗК. *Якщо Z і Z^* — ФРЗК відповідно для рівнянь (1.52) і (1.55), то є правильною рівність*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z^*(\tau,\xi;t,x), \quad \tau < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

ФРЗК Z, для якого справджується ця рівність, називається нормальним ФРЗК.

2^0. Формула згортки. *Справджується рівність*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\gamma,y)Z(\gamma,y;\tau,\xi)dy, \quad \tau < \gamma < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ця рівність містить у собі інформацію про те, що розглядуваний процес є марковським.

3^0. Єдиність нормального ФРЗК. *Для рівняння (1.52) існує тільки один нормальний ФРЗК.*

4^0. Зображення елементів матриці дифузії через ФРЗК. *Правильними є формули*

$$a_{jk} = (n-2)|b|^{1-n/2}\lim_{\tau\to t}\Bigg(|e^{(n-2)b(t-\tau)}-1|^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_n}(x_j - y_j e^{-b(t-\tau)})(x_k - y_k e^{-b(t-\tau)})Z(t,x;\tau,\xi)\,dy\Bigg), \quad n \neq 2,$$

$$a_{jk} = (n-2)|b|^{-1}\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_n}(x_j - y_j e^{-b(t-\tau)})(x_k - y_k e^{-b(t-\tau)})Z(t,x;\tau,\xi)\,dy\right),$$

$$n = 2, \quad \{j, k\} \subset \mathbb{N}_n.$$

Сформулюємо основні результати, що стосуються коректної розв'язності задачі Коші та інтегрального зображення розв'язків для рівняння (1.52). Для цього спочатку введемо необхідні норми та простори.

Нехай c_0 — додатна стала така, що $c_0 < c$, де c — стала з оцінок (1.54); a і T — фіксовані числа такі, що $a \geq 0$ і $0 < T < T_b$, де $T_b := \frac{1}{2b} \ln \frac{a+c_0}{a}$ для $b > 0$ і $T_b := \frac{1}{2b} \ln \frac{a-c_0}{a}$ для $b < 0$; $\Pi := (0; T] \times \mathbb{R}^n$.

Розглянемо функції

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 - e^{-2bt}, \ b > 0 \\ e^{-2bt} - 1, \ b < 0 \end{cases} \quad i \quad k(t, a) := \frac{c_0 a e^{2bt}}{c_0 - a e^{2bt} \alpha(t)};$$

$$E_c(t, x, \xi) := \exp\left\{ -c \frac{|x - \xi e^{-bt}|^2}{\alpha(t)} \right\}; \quad \Phi_r(t, x) := \exp\{ r k(t, a) |x|^2 \},$$

де $t \in [0, T]$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $c > 0$, $r \in \{-1; 1\}$.

Нехай $u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{\Pi}$, — задана комплекснозначна функція, яка є вимірною за Лебегом при кожному $t \in [0, T]$. Для $t \in [0, T]$ і $1 \leq p \leq \infty$ означимо норму

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{k(t,a)} := \|u(t, \cdot) \Phi_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Позначимо через $L_p^{k(t,a)}$ і L_p^a простори всіх комплекснозначних функцій $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для яких є скінченними відповідно норми $\|\varphi\|_p^{k(t,a)}$ і $\|\varphi\|_p^a := \|\varphi\|_p^{k(0,a)}$. Говоритимемо, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi$, належить до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$, якщо $u(t, \cdot) \in L_p^{k(t,a)}$ для кожного $t \in (0, T]$.

Нехай $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а M — сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через M^a позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int\limits_A \Phi_{-1}(0, x) d\mu(x), \quad A \in \mathcal{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^a$

$$\|\mu\|^a := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0, x) d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ — повна варіація μ.

Використовуватимемо ще такі простори: $L_1^{-k(T,a)}$ — множина всіх вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій $\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для яких скінченною є норма

$$\|\eta(\cdot)\Phi_1(T,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

$C_0^{-k(T,a)}$ — множина всіх неперервних комплекснозначних функцій $\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, таких, що

$$\Phi_1(T,x)|\eta(x)| \to 0 \qquad |x| \to \infty.$$

Теорема 1.13. *Нехай $\varphi \in L_p^a$, $1 \le p \le \infty$, і $\mu \in M^a$. Тоді формули*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{1.56}$$

$$u_0(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi), \tag{1.57}$$

$$(t,x) \in \Pi.$$

визначають єдині розв'язки рівняння (1.52) в Π, які мають такі властивості:

1) існує така стала $C > 0$, що для довільних $t \in (0,T]$ справджуються нерівності

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\|\varphi\|_p^a, \quad \|u_0(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\|\mu\|^a;$$

2) при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0}\|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t,a)} = 0;$$

3) при $p = \infty$ і для функції (1.57) $u(t,\cdot) \longrightarrow \varphi$, $u_0(t,\cdot) \longrightarrow \mu$, коли $t \to 0$, слабко, тобто для довільних η з просторів $L_1^{-k(T,a)}$ і $C_0^{-k(T,a)}$ виконуються співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\varphi(x)dx,$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)u_0(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному розумінні оберненою до теореми 1.19.

Теорема 1.14. *Нехай u — розв'язок рівняння (1.52) в Π, який задовольняє умову: існують такі сталі $C > 0$ і $p \in [1,\infty]$, що для всіх $t \in (0,T]$ справджується нерівність*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C. \tag{1.58}$$

Тоді при $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^a$, *а при* $p = 1$ — *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^a$ *такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді (1.56) і (1.57).*

Наслідок 1.4. З теорем 1.13 і 1.14 випливають такі твердження:

1) розв'язки рівняння (1.52), які визначаються формулами (1.56) і (1.57), належать відповідно до просторів $L_p^{-k(\cdot,a)}$ і $L_1^{-k(\cdot,a)}$;

2) умова (1.58) є необхідною і достатньою для того, щоб простори L_p^a і M^a були множинами початкових значень розв'язків рівняння (1.52);

3) ця умова є також необхідною і достатньою для того, щоб розв'язки рівняння (1.52) зображувалися у вигляді інтегралів Пуассона (1.56) і (1.57).

1.3 Клас $\mathbf{E_6}$ систем параболічних рівнянь Солонникова–Ейдельмана

Підрозділ містить результати досліджень початкової задачі для нового класу $\mathbf{E_6}$ систем рівнянь із частинними похідними, які поєднують у собі структури систем, параболічних за Солонниковим і за Ейдельманом.

Для цього класу наводяться основні результати, які стосуються коректної розв'язності початкових задач для таких систем.

1.3.1 Параболічні початкові задачі Солонникова–Ейдельмана.

У цьому підрозділі використовуватимемо ще такі позначення. Нехай n, N, $b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа, b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $M := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$; i – уявна одиниця; $A(t, x, \partial_t, \partial_x) := (A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{k,j=1}^N$; $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$, $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$ – невідома та задана вектор-функції; $\Pi_H := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \Big| t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T – задане додатне число.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує $s_k + t_j$ (якщо $s_k + t_j < 0$, то $A_{kj} := 0$) і $\sum\limits_{k=1}^{N} (s_k + t_k) = 2br$, де r – степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 := (A^0_{kj})_{k,j=1}^N$ – головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j} A^0_{kj}(t, x, p, i\sigma)$.

Розглянемо систему

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{1.59}$$

Означення 1.6. Система рівнянь (1.59) називається *рівномірно параболічною системою Солонникова–Ейдельмана* на множині $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t, x, p, i\sigma) = 0$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\, p(t, x, \sigma) \leq -\delta \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}.$$

Числа t_j і s_k визначаються неоднозначно, бо ті самі умови будуть задовольняти і числа $t_j - a$ і $s_k + a$, але такі числа завжди існують. Їхній вибір фіксуватимемо умовою $\max\limits_{k\in\{1,\dots,N\}} s_k = 0$.

Частинними випадками вищеозначених систем є системи, параболічні за Петровським ($m_k = 1$, $k \in \{1,\dots,n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,\dots,N\}$), $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k > 1$ для принаймні одного $k \in \{1,\dots,n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $j \in \{1,\dots,N\}$) і параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k = 1$, $k \in \{1,\dots,n\}$).

Вважатимемо, що виконується умова

A) *система (1.59) є рівномірно параболічною в* $\Pi_{[0,T]}$ *зі сталою* $\delta > 0$ *згідно з вищенаведеним означенням.*

Для систем (1.59) задавати початкові умови так, як для систем Петровського, взагалі кажучи, не можна. Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [24].

Нехай $B(x,\partial_t,\partial_x) \equiv (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$ – матричний диференціальний вираз, $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ – задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ не перевищує $p_k + t_j$, а якщо $p_k + t_j < 0$, то $B_{kl} := 0$. Тут t_j – ті самі, що й у системі (1). Головною частиною виразу B назвемо вираз $B^0 \equiv (B^0_{kj})_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j} B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$.

Початкові умови для системи (1.59) задамо у вигляді

$$B(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.60}$$

Для забезпечення коректності задачі з умовою (1.60) матричний вираз B повинен задовольняти таку умову доповняльності типу відомої умови Лопатинського: рядки матриці

$$C(x,p) := B^0(x,p,0)\widehat{A^0}(0,x,p,0),$$

де $\widehat{A^0} := \det A^0 (A^0)^{-1}$ – матриця, взаємна для A^0, лінійно незалежні за модулем одночлена p^r в кожній точці $x \in \mathbb{R}^n$.

Ця умова дозволяє, як і в [24], для кожної системи (1.59) визначити числа p_k і з точністю до деяких алгебричних перетворень побудувати матрицю $B^0(x,p,0)$. Матриця $B'(x,p,i\sigma) := B^0(x,p,i\sigma) - B^0(x,p,0)$ відіграє роль молодшого члена, для її елементів повинна виконуватися лише одна умова: степінь відносно λ многочлена $B'_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ дорівнює $p_k + t_j$.

Так само, як у праці [24], доводяться такі твердження:

1) умова доповняльності рівносильна умові

$$\det H^{(p')}(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.61}$$

для будь-якої матриці $H^{(p')}$, визначеної в [24, с. 15, 24];

2) якщо компоненти u_j вектор-функції u, коефіцієнти диференціальних виразів A і B, а також компоненти f_k і φ_s вектор-функцій f і φ є досить гладкими функціями своїх аргументів, то при виконанні умови (1.61) система (1.59) і початкова умова (1.60) дають можливість за допомогою операції диференціювання та розв'язування лінійних алгебраїчних систем визначити значення при $t = 0$ будь-якої похідної від кожної із своїх функцій u_j через f_k і φ_s та їх похідні.

Припускатимемо, що виконується рівномірний варіант умови доповняльності, а саме умова

B) *існує така стала $\delta_1 > 0$, що для всіх матриць $H^{(\rho)}$, $H^{(\rho^{(k)})}$ і точок $x \in \mathbb{R}^n$ справджуються нерівності*

$$|\det H^{(\rho)}(x)| \geq \delta_1, \quad |\det H^{(\rho^{(k)})}(x)| \geq \delta_1.$$

Задачу (1.59), (1.60), для якої виконуються умови **A** і **B**, називатимемо *параболічною початковою задачею Солонникова–Ейдельмана.*

1.3.2 Коректна розв'язність в просторах Гельдера зростаючих функцій. Наведемо означення потрібних просторів Гельдера обмежених і зростаючих функцій. Функції з цих просторів можуть зростати при $|x| \to \infty$ не швидше, ніж функція

$$\Psi(t, x) := \exp\{\sum_{j=1}^{n} k_j(t, a_j)|x_j|^{q_j}\}, \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]},$$

в якій $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $k_j(t, a_j) := c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{1-q_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, де c_0, a_1, …, a_n – задані числа такі, що $0 < c_0 < c$ (c – стала з оцінок (12) із [25] для фундаментального розв'язку рівняння $\det A^0(\beta, y, \partial_t, \partial_x)u = 0$), $a_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $T < \min\limits_j (c_0/a_j)^{2b_j-1}$.

Крім вищевведених позначень, будемо використовувати ще такі:
$\overrightarrow{a} := (a_1, \ldots, a_n)$, $\overrightarrow{k}(t, \overrightarrow{a}) := (k_1(t, a_1), \ldots, k_n(t, a_n))$;
$\Delta_t^{\beta} f(t, \cdot) := f(t, \cdot) - f(\beta, \cdot)$, $\Delta_{x_j}^{y_j} f(\cdot, x) := f(\cdot, x) - f(\cdot, x(y_j))$,
$x(y_j) := (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$;
$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha}$, $\partial_x^{\alpha} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha) \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n+1}$, $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Нехай l і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0, 1)$. Будемо користовуватися такими просторами:

$H_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ – простір функцій u: $\Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які мають неперервні похідні

$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u$, $\|\overline{\alpha}\| \le l$, і скінченну норму

$$\|u\|_{l+\lambda,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \ll u \gg_{l+\lambda,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} + \sum_{j=0}^{l} <u>_{j,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

де

$$\ll u \gg_{l+\lambda,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{j=1}^{n} <u>_{(l+\lambda)/m_j, x_j,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} + <u>_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

$$<u>_{(l+\lambda)/m_j, x_j,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{0 \le l-\|\overline{\alpha}\| < m_j} < \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u >_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_j,\, x_j,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

$$<u>_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{0 \le l-\|\overline{\alpha}\| < 2b} < \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u >_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

$$<u>_{\lambda, x_j,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sup_{\substack{(t,x)\in \Pi_{[0,T]} \\ y_j \in \mathbb{R},\, x_j \ne y_j}} (|\Delta_{x_j}^{y_j} u(t,x)| |x_j - y_j|^{-\lambda} (\Psi(t,x) + \Psi(t, x(y_j)))^{-1}),$$

$$<u>_{\lambda,t,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\, t\ne\beta \\ x\in\mathbb{R}^n}} (|\Delta_t^{\beta} u(t,x)|\, |t-\beta|^{-\lambda} (\Psi(t,x) + \Psi(\beta,x))^{-1}),$$

$$<u>_{j,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} (|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| (\Psi(t,x))^{-1});$$

$C_{l+\lambda}^{\vec{a}}$ – простір функцій v: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких існують неперервні похідні $\partial_x^{\alpha} v$, $\|\alpha\| \le l$, і є скінченною норма

$$|v|_{l+\lambda}^{\vec{a}} := [v]_{l+\lambda}^{\vec{a}} + \sum_{j=0}^{l} < v >_j^{\vec{a}},$$

де

$$[v]_{l+\lambda}^{\vec{a}} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \le l-\|\alpha\| < m_j} < \partial_x^{\alpha} v >_{(l-\|\alpha\|+\lambda)/m_j,\, x_j}^{\vec{a}},$$

$$< v >_{\lambda, x_j}^{\vec{a}} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ y_j\in\mathbb{R},\, x_j\ne y_j}} (|\Delta_{x_j}^{y_j} v(x)| |x_j - y_j|^{-\lambda} (\Psi(0,x) + \Psi(0, x(y_j)))^{-1}),$$

$$<v>_j^{\vec{a}} := \sum_{\|\alpha\|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|\partial_x^{\alpha} v(x)| (\Psi(0,x))^{-1});$$

$H_{l+\lambda,[0,T]} := H_{l+\lambda,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{0})}$, $C_{l+\lambda} := C_{l+\lambda}^{\vec{0}}$, де $\overrightarrow{0} := (0,\ldots,0)$;

$\overset{\circ}{H}{}_{l+\lambda,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ – підпростір простору $H_{l+\lambda,[0,T]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, елементи якого разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулеві при $t = 0$;

$\prod\limits_{j=1}^{N} H^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{r_j+\lambda,[0,T]}$, $\prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{r_j+\lambda,[0,T]}$ і $\prod\limits_{j=1}^{r} C^{\vec{a}}_{r_j+\lambda}$ – декартові добутки відповідних просторів з індексами $r_j \in \mathbb{Z}^1_+$.

Зауважимо, що всі вищеозначені простори є банаховими.

Сформулюємо основні результати, що стосуються параболічної початкової задачі Солонникова–Ейдельмана (1.59), (1.60) в просторах Гельдера відповідним чином зростаючих функцій. Крім умов **A** та **B** припискатимемо виконання умови

C) *коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj} і B_{sj} належать відповідно до просторів $H_{l-s_k+\lambda,[0,T]}$ і $C_{l-p_s+\lambda}$, $\{k,j\} \subset \{1,\dots,N\}$, $s \in \{1,\dots,r\}$.*

Теорема 1.15. *Нехай l і λ – задані числа із множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Якщо виконуються умови **A**, **B** та **C**), то для будь-яких $f \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]}$ і $\varphi \in \prod\limits_{s=1}^{r} C^{\vec{a}}_{l-p_s+\lambda}$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1.59), (1.60), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leq C\left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]} + \sum_{s=1}^{r} |\varphi_s|^{\vec{a}}_{l-p_s+\lambda}\right), \tag{1.62}$$

*де стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов **A** і **B** та чисел n, N, b_j, t_k, s_k, p_s, l, λ і T.*

З теореми 1.15 випливає, що умова параболічності системи (1.59) є достатньою, щоб справджувалась оцінка (1.62) для будь-якого розв'язку $u \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1.59), (1.60). Виявляється, що ця умова є необхідною, так що правильною є така теорема.

Теорема 1.16. *Нехай система (1.59) має структуру параболічної системи Солонникова–Ейдельмана з параметрами b_j, t_k, s_k, p_s і r, число початкових умов (1.60) дорівнює r і диференціальний вираз $B(x,\partial_t,\partial_x)$ задовольняє умову **B**, коефіцієнти диференціальних виразів A і B задовольняють умову **C** з деякими числами $l \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda \in (0,1)$. Для того, щоб система (1.59) задовольняла умову **A**, необхідно й досить, щоб існувала така стала $C > 0$, що для всіх вектор-функцій $u \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$*

справджується нерівність

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \le C \left(\sum_{k,j=1}^{N} \|A_{kj}u_j\|^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l-s_k+\lambda,[0,T]} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}u_j|_{t=0}|^{\vec{a}}_{l-p_k+\lambda} \right). \tag{1.63}$$

Доведення теореми 1.15 проводиться за схемою доведення в [24] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем. Центральним моментом доведення є вивчення такої задачі з нульовими початковими даними в шарі $\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}$, $0 \le t_0 < t_0+\tau \le T$:

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)v(t,x) = g(t,x), \ \ (t,x) \in \Pi_{[t_0,t_0+\tau]}, \ \ v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \tag{1.64}$$

де $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$. Для цієї задачі доводиться наступна теорема.

Теорема 1.17. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *і* $\boldsymbol{C}$. *Тоді існує таке число* τ_0, *що для будь-якого числа* $\tau \le \tau_0$ *задача (1.64) однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|v_j\|^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \le C \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]},$$

в якій стала C *залишається обмеженою при* $\tau \to 0$.

За допомогою цієї теореми та теореми 1 із [25] про зведення задачі (1.59), (1.60) до задачі з нульовими початковими даними вже легко доводиться теорема 1.23.

Щоб довести теорему 1.25, треба побудувати так званий регуляризатор задачі та дослідити його властивості. Для задачі (1.64) регуляризатор будується за допомогою операторів, які розв'язують відповідні модельні задачі. Останні детально досліджені в [25].

1.3.3 Коректна розв'язність в узагальнених просторах Соболєва. У цьому пункті для одного вужчого класу параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана наводиться теорема про їх коректну розв'язність у відповідних узагальнених просторах Соболєва.

Розглянемо параболічну початкову задачу Солонникова–Ейдельмана (1.59), (1.60) для випадку, коли s_k, t_j і p_k діляться на $2b$.

Наведемо означення потрібних функціональних просторів. Нехай l – невід'ємне ціле число кратне $2b$, s – додатне число і число $p > 1$.

Через $W_p^l(\Pi_{[0;T]})$ позначимо замикання множини гладких і фінітних по x функцій $u:\Pi_{[0;T]}\to\mathbb{C}$ за нормою

$$\|\, u\,\|_{p,\, l}^{\Pi_{[0;T]}} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|\le l} \langle\, \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u\,\rangle_{p,\, 0}^{\Pi_{[0;T]}},$$

де

$$\langle\, u\,\rangle_{p,\, 0}^{\Pi_{[0;T]}} := \left(\int\limits_{\Pi_{[0;T]}} |\, u(t,x)\,|^p dtdx\right)^{1/p}.$$

Диференціальні властивості "слідів"при $t=\tau$ функцій із простору $W_p^l(\Pi_{[0;T]})$ описуються в термінах простору $B_p^s(\mathbb{R}^n)$, який означується як замикання множини гладких і фінітних функцій $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ за нормою

$$\|\, v\,\|_{p,\, s}^{\mathbb{R}^n} := \sum_{\|\alpha\|<s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\, \partial_x^\alpha v(x)\,|^p dtdx\right)^{1/p} + [\, v\,]_{p,\, s}^{\mathbb{R}^n},$$

де

$$[\, v\,]_{p,\, s}^{\mathbb{R}^n} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0\le s-\|\alpha\|<m_j} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\, \Delta_{x_j}^{y_j}\partial_x^\alpha v(x)\,|^p}{|x_j-y_j|^{1+p(s-\|\alpha\|)/m_j}} dy_j\right)^{1/p},$$

якщо s – дробове число, і

$$[\, v\,]_{p,\, s}^{\mathbb{R}^n} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{\|\alpha\|=s-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\, (\Delta^2)_{x_j}^{y_j}\partial_x^\alpha v(x)\,|^p}{|x_j-y_j|^{1+p}} dy_j\right)^{1/p},$$

якщо s є цілим числом. Тут $(\Delta^2)_{x_j}^{y_j} f(x) := f(x) - 2f(x(\frac{x_j+y_j}{2})) + f(x(y_j))$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Множину елементів $u\in W_p^l(\Pi_{[0;T]})$, які задовольняють нульові початкові умови

$$\partial_t^j u|_{t=0} = 0,\ j\in\{0,1,\ldots,\frac{l}{2b}-1\},$$

назвемо простором $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Pi_{[0;T]})$.

Через $\prod\limits_{j=1}^{N} W_p^{l_j}(\Pi_{[0;T]})$, $\prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l_j}(\Pi_{[0;T]})$ і $\prod\limits_{j=1}^{r} B_p^{r_j}(\mathbb{R}^n)$ будемо позначати декартові добутки відповідних просторів з цілими невід'ємними індексами l_j, кратними $2b$, і додатними індексами r_j.

Для дробового додатного числа s користуватимемось просторами Гельдера обмежених функцій $C_s(\mathbb{R}^n)$.

Сформулюємо основні результати, що стосуються коректної розв'язності параболічної початкової задачі Солонникова–Ейдельмана (1.59), (1.60) в узагальнених просторах Соболєва для випадку, коли s_k, t_j і p_k діляться на $2b$.

Теорема 1.18. *Нехай l – невід'ємне ціле число, кратне $2b$; виконуються умови $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$; коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj}, $\{k,j\} \subset \{1,\dots,N\}$, мають неперервні та обмежені похідні узагальненого порядку $l - s_k$, а коефіцієнти диференціальних виразів B_{kj}, $k \in \{1,\dots,r\}$, $j \in \{1,\dots,N\}$, належать до просторів $C_{l-p_k-2b/p+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, де ε – досить мале додатне число. Тоді для будь-яких $f \in \prod_{j=1}^{N} W_p^{l-s_j}(\Pi_{[0;T]})$ і $\varphi \in \prod_{j=1}^{r} B_p^{l-p_j-2b/p}(\mathbb{R}^n)$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod_{j=1}^{N} W_p^{l+t_j}(\Pi_{[0;T]})$ задачі (1.59), (1.60), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{p,\, l+t_j}^{\Pi_{[0;T]}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{p,\, l-s_j}^{\Pi_{[0;T]}} + \sum_{j=1}^{r} \|\varphi_j\|_{p,\, l-p_j-2b/p}^{\mathbb{R}^n} \right),$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ та чисел n, N, b_j, t_j, s_k, p_k, l і T.

Доведення теореми 1.18 проводиться за схемою доведення в [24] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем та доведення теореми 1.15 для параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана в просторах Гельдера. Центральним моментом доведення є вивчення задачі з нульовими початковими даними в шарі $\Pi_{[0;\tau]}$ малої товщини $\tau > 0$:

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)v(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0;\tau]},$$

$$v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l+t_j}(\Pi_{[0;\tau]}), \tag{1.65}$$

де $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l-s_j}(\Pi_{[0;\tau]})$. Для цієї задачі доводиться наступна теорема.

Теорема 1.19. *Нехай виконуються умови теореми 1.26. Тоді існує таке число $\tau_0 > 0$, що для будь-якого $\tau \in (0,\tau_0]$ задача (1.65) однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|v_j\|_{p,\, l+t_j}^{\Pi_{[0;\tau]}} \leq C \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_{p,\, l-s_j}^{\Pi_{[0;\tau]}},$$

в якій стала C залишається обмеженою при $\tau \to 0$.

Зауваження 1.2. Правильною є аналогічна до теореми 1.19 теорема про коректну розв'язність задачі типу (1.65) в $\Pi_{[t_0, t_0+\tau]}$ з нульовими початковими даними, поставленими при $t = t_0$, де $0 \le t_0 < t_0 + \tau \le T$. При цьому величину τ_0 можна брати не залежною від t_0 .

2 ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ ТА МЕТОДОМ УСЕРЕДНЕННЯ

Розділ містить результати застосування методу інтегральних многовидів для лінійних сингулярно збурених систем із запізненням та дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь методом усереднення.

2.1 Інтегральні многовиди лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

У цьому підрозділі наведено результати дослідження лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь методом інтегральних многовидів у випадку, коли запізнення є тільки у швидких змінних. Результати належать І.М. Черевку та опубліковані в [33-37].

Дослідження умов існування інтегральних многовидів лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь із малим запізненням вперше здійснено А. Халанаєм [38]. Існування стійких інтегральних многовидів встановлено в праці [39]. У праці [40] одержано узагальнення леми А. Халаная на лінійні диференціально-функціональні рівняння, що дозволило поширити метод інтегральних многовидів на сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння [41, 42].

У цьому підрозділі досліджуються умови існування інтегральних многовидів повільних змінних, алгоритм побудови асимптотичних розкладів многовидів систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь, та здійснюється розщеплення лінійних систем із запізненням на незалежні підсистеми [33-37].

2.1.1 Існування інтегральних многовидів повільних змінних. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + L_1(t)y_t,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)x(t) + L_2(t)y_t, \tag{2.1}$$

де $x \in R^n$, $y \in R^m$, $y_t = y(t+\theta)$, $t \in R$, $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$, $A(t), B(t)$ — матриці розмірностей $n \times n$, $n \times m$, L_1, L_2 — лінійні оператори зі значеннями в R^n і R^m відповідно, $\Delta > 0$, ε — малий додатний параметр.

Згідно з теоремою Ріса [43], оператори L_1, L_2 можна представити у вигляді інтегралів Стільтьєса

$$L_i(t)\varphi = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta_i(t,\theta)]\varphi(\theta),$$

де $\eta_i(t,\theta)$ — матриці розмірностей $n \times n, n \times m$ відповідно, елементи яких є функціями обмеженої варіації по θ для кожного t і неперервними по t рівномірно відносно θ.

Припустимо, що

$$|L_i(t)\varphi| \leq m_i(t)|\varphi|, \quad i = 1, 2 \tag{2.2}$$

для всіх $t \in R, \varphi \in C$.

Нехай для системи (2.1) справджуються умови:

I) матриці A, B та функції m_1, m_2 обмежені при $t \in R$ деякою додатною сталою M;

II) всі корені характеристичного рівняння

$$\Phi(\lambda) = \det\left(\lambda E - \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta_2(t,\theta)]e^{\lambda\theta}\right) = 0$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\mu < 0$ для всіх $t \in R$.

При виконанні умови II для фундаментальної матриці $Y(t,s)$ укороченого рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = L_2(t)y_t, \tag{2.3}$$

згідно з [40], справджується нерівність

$$|Y(t,s)| \leq Ke^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}, \quad t \geq s, \quad K > 0. \tag{2.4}$$

Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (2.3)

$$T(t,s) : C[-\varepsilon\Delta, 0] \to C[-\varepsilon\Delta, 0], \quad t \geq s$$

співвідношенням

$$T(t,s)\varphi(\theta) = y(t+\theta, s, \varphi) = y_t(s,\varphi),$$

де $y_t(s,\varphi)$ — розв'язок рівняння (2.3) з початковою функцією $\varphi(\theta)$ при $t = s$.

Тоді справджується рівність

$$Y_t(\theta, s) = T(t,s)Y_0(\theta),$$

де $Y_0(\theta) = 0$ для $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $Y_0(0) = E$, а з умови II випливає оцінка

$$|T(t,s)\varphi| \le K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}|\varphi|, \quad K_1 > 0, \quad \varphi \in C. \tag{2.5}$$

Запишемо систему (2.1) в еквівалентній інтегро-диференціальній формі [44]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + L_1(t)y_t,$$

$$y_t = T(t,t_0)y_{t_0} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} T(t,s)Y_0B(s)x(s)ds, \tag{2.6}$$

де інтеграл розуміємо як інтеграл у R^m для кожного $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$.

Означення 2.1. *Неперервна рівномірно обмежена матриця* P_t , $t \in R$, $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$ *описує інтегральний многовид повільних змінних системи (2.6), якщо для довільних* t_0, x_0 *і розв'язку системи*

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + L_1(t)P_t(\theta)]x(t)$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ *функції* $x(t)$, $y_t = P_t(\theta)x(t)$ *задовольняють друге рівняння системи (2.6).*

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови I, II. Тоді існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що для всіх* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *існує інтегральний многовид системи (2.6), який можна представити у вигляді*

$$y_t = P_t(\theta)x(t). \tag{2.7}$$

Доведення. Розглянемо ітераційний процес

$$P_t^0 = 0, \quad P_t^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)X_n(s,t)ds, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.8}$$

де $X_n(t,s)$ — фундаментальна матриця рівняння

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + L_1(t)P_t^n]x(t). \tag{2.9}$$

На підставі припущення I маємо, що фундаментальна матриця $X_0(t,s)$ задовольняє нерівність

$$|X_0(t,s)| \le K_0 e^{\alpha|t-s|}, \quad K_0 > 0, \quad \alpha \ge 0. \tag{2.10}$$

Тоді із (2.5), (2.8), (2.10) дістаємо

$$|P_t^1| \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} M K_0 e^{\alpha(t-s)} ds \le \frac{2K_0K_1M}{\mu} = K_2,$$

при $\varepsilon < \dfrac{\mu}{2\alpha}$.

Нехай P_t^n визначено і для нього справедлива оцінка

$$|P_t^n| \le K_2.$$

Тоді з (2.9) одержуємо

$$|X_n(t,s)| \le K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)|t-s|}, \quad \beta \ge 0. \tag{2.11}$$

Враховуючи нерівності (2.5), (2.11), дістаємо оцінку

$$|P_t^{n+1}| \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} M K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)(t-s)} ds \le$$

$$\le \frac{K_0K_1M}{\mu - \varepsilon(\alpha+\beta K_2)} \le K_2, \tag{2.12}$$

при $\varepsilon < \dfrac{\mu}{2(\alpha+\beta K_2)}$.

Отже, послідовність P_t^n визначена і рівномірно обмежена сталою K_2 для всіх $n = 0, 1, ...$ при $\varepsilon \le \varepsilon_1 < \dfrac{\mu}{2(\alpha+\beta K_2)}$.

Розглянемо різницю

$$P_t^{n+1} - P_t^n = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s) Y_0 B(s)[X_n(s,t) - X_{n-1}(s,t)] ds. \tag{2.13}$$

Для різниці $X_n(t,s) - X_{n-1}(t,s)$ запишемо рівняння

$$\frac{d}{dt}[X_n(t,s) - X_{n-1}(t,s)] = [A(t) + L_1(t)P_t^n][X_n(t,s) - X_{n-1}(t,s)]+$$

$$+L_1(t)(P_t^n - P_t^{n-1})X_{n-1}(t,s).$$

Враховуючи, що $X_n(s,s) = X_{n-1}(s,s) = E$, маємо

$$X_n(t,t_0) - X_{n-1}(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} X_n(t,s) L_1(s)(P_s^n - P_s^{n-1}) X_{n-1}(s,t_0) ds.$$

При $t \le t_0$ дістаємо оцінку

$$|X_n(t,t_0) - X_{n-1}(t,t_0)| \le \int\limits_t^{t_0} K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)(s-t)} M \sup_{s,\theta} |P_s^n - P_s^{n-1}| K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)(t_0-s)} ds =$$

$$= K_0^2 M \sup_{s,\theta} |P_s^n - P_s^{n-1}| e^{(\alpha+\beta K_2)(t_0-t)} (t_0 - t). \tag{2.14}$$

Позначимо

$$\delta_{n+1} = \sup_{t,\theta} |P_t^{n+1}(\theta) - P_t^n(\theta)|.$$

Тоді з (2.13), враховуючи нерівність (2.14), одержимо

$$\delta_{n+1} \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} M K_0^2 \delta_n e^{(\alpha+\beta K_2)(t-s)} (t-s) ds.$$

Після інтегрування остання нерівність набуває вигляду

$$\delta_{n+1} \le \frac{\varepsilon M^2 K_0^2 K}{[\mu - \varepsilon(\alpha + \beta K_2)]} \delta_n.$$

Вибираючи $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\mu^2}{8M^2K_0^2K}\right\}$, дістаємо

$$\delta_{n+1} \le \frac{1}{2} \delta_n.$$

Отже, послідовність P_t^n рівномірно збіжна при $n \to \infty$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Покладемо

$$P_t(\theta) = \lim_{n\to\infty} P_t^n(\theta).$$

На основі нерівності (2.12) маємо

$$|P_t(\theta)| \le K_2.$$

Покажемо, що співвідношення (2.7) визначає інтегральний многовид системи (2.6). Нехай $X(t,t_0)$ — фундаментальна матриця системи

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + L_1(t) P_t] x(t). \tag{2.15}$$

Тоді дістаємо

$$X(t,t_0) = \lim_{n\to\infty} X_n(t,t_0),$$

$$P_t(\theta) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s) Y_0 B(s) X(s,t) ds. \tag{2.16}$$

Нехай $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ розв'язок рівняння (2.15) такий, що $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Представимо його у вигляді

$$x(t) = X(t, t_0) x_0.$$

Позначаючи $y_t = P_t(\theta) x(t)$, одержимо

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s) Y_0 B(s) X(s,t) ds \cdot x(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s) Y_0 B(s) x(s) ds. \tag{2.17}$$

Враховуючи півгрупову властивість оператора T

$$T(t,s) = T(t,t_0) T(t_0, s),$$

перепишемо рівність (2.17) у вигляді

$$y_t = T(t,t_0) \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t_0} T(t_0,s) Y_0 B(s) x(s) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t} T(t,s) Y_0 B(s) x(s) ds.$$

Із співвідношення (2.17) маємо

$$y_t = T(t,t_0) y_{t_0} + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t} T(t,s) Y_0 B(s) x(s) ds.$$

Отже, функції $x(t), y_t = P_t(\theta) x(t)$ задовольняють друге рівняння системи (2.6), а це означає, що співвідношення (2.7) визначає інтегральний многовид системи (2.6). Теорема 2.1 доведена.

2.1.2 Асимптотика інтегрального многовиду. Розглянемо систему лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x(t) + B(t) y(t),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = C(t) y(t) + D(t) y(t - \varepsilon\Delta) + F(t) x(t) + G(t) x(t - \varepsilon\Delta), \tag{2.18}$$

де $t \in R, x \in R^n$, $y \in \Omega_\rho = \{y \in R^m, |y| < \rho\}$, $\Delta > 0, \varepsilon$ — малий додатний параметр.

Нехай для системи (2.18) справджуються припущення:

1) матриці A, B, C, D, F, G обмежені для всіх $t \in R$;

2) всі корені характеристичного рівняння

$$\det(\lambda E - C - De^{-\lambda\Delta}) = 0$$

задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\mu < 0$ для всіх $t \in R$.

При виконанні умов 1)–2) доведено існування інтегрального многовиду повільних змінних системи (2.18), який можна подати у вигляді [39]

$$y = P(t, \varepsilon)x. \tag{2.19}$$

Матриця $P(t, \varepsilon)$ рівномірно обмежена для $t \in R$, задовольняє інтегральне рівняння

$$P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} Y(t, s)[F(s)X(s, t) + G(s)X(s - \varepsilon\Delta, t)]ds$$

а також є обмеженим розв'язком аналогічного до (2.22) диференціально-різницевого рівняння

$$\varepsilon\frac{dP(t, \varepsilon)}{dt} = -\varepsilon P(t, \varepsilon)[A(t) + B(t)P(t, \varepsilon)] + F(t) + G(t)X(t - \varepsilon\Delta, y) + C(t)P(t, \varepsilon) +$$

$$+ D(t)P(t - \varepsilon\Delta, \varepsilon)X(t - \varepsilon\Delta, t), \tag{2.20}$$

де $X(t, s)$, $Y(t, s)$ — фундаментальні матриці таких рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + B(t)P(t, \varepsilon)]x(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y(t) + D(t)y(t - \varepsilon\Delta).$$

Якщо матриці A, B, C, D, F, G — сталі, тоді матриця P також не залежить від t, а фундаментальна матриця $X(t, s)$ має вигляд

$$X(t, s) = e^{(A+BP)(t-s)}.$$

У цьому випадку матриця P задовольняє рівняння

$$\varepsilon P(A + BP) = FGe^{-\varepsilon(A+BP)\Delta} + CP + DPe^{-\varepsilon(A+BP)\Delta},$$

яке при $\Delta = 0$ збігається із матричним рівнянням Ріккаті [45]

$$\varepsilon P(A + BP) = F + G + (C + D)P,$$

що визначає інтегральний многовид повільних змінних для системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь без запізнення.

Нехай для системи (2.18), крім наведених вище, виконується умова:

3) матриці A, B, C, D, F, G рівномірно обмежені для $t \in R$ разом із своїми похідними до $k+1$-го порядку включно.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T(u) = C(t)u(t,x,\varepsilon) + D(t)u(t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta),\varepsilon) + F(t)x(t) + G(t)x(t-\varepsilon\Delta) -$$

$$-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}[A(t)x(t) + B(t)u(t,x,\varepsilon)]. \qquad (2.21)$$

Покажемо, що існує функція $u(t,x,\varepsilon)$, яку можна подати у вигляді

$$u(t,x,\varepsilon) = P_0(t,\varepsilon)x(t) = [p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + ... + \varepsilon^k p_k(t)]x(t) \qquad (2.22)$$

(де $p_i(t), i = 0,1,...,k$ — рівномірно обмежені функції разом із своїми $(k-i+1)$-ми похідними) така, що

$$T(P_0(t,\varepsilon)x) = O(\varepsilon^{k+1}).$$

Розглянемо допоміжні розклади

$$P_0(t-\varepsilon\Delta,\varepsilon) = P_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\bar{p}_1(t,p_0) + \varepsilon^2\bar{p}_2(t,p_0,p_1) + ...+$$

$$+\varepsilon^k\bar{p}_k(t,p_0,...,p_{k-1}) + \varepsilon^{k+1}\bar{p}_{k+1}(t-\varepsilon\theta\Delta,p_0,...,p_k,\varepsilon), \qquad (2.23)$$

$$x(t-\varepsilon\Delta) = [x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... + \varepsilon^k x_k(t)]x(t) + \varepsilon^{k+1}x_{k+1}(t-\varepsilon\theta\Delta), \qquad (2.24)$$

де

$$\bar{p}_i = \sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j\Delta^j}{j!}\frac{d^j p_{i-j}(t)}{dt^j}, \quad x_0 = 1,$$

$$x_i = \frac{(-1)^i\Delta^i}{i!}\frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad i = 1,2,...,k+1, \quad 0 < \theta < 1.$$

Використовуючи розклади (2.23), (2.24), одержуємо

$$P_0(t-\varepsilon\Delta,\varepsilon)x(t-\varepsilon\Delta) = P_0(t,\varepsilon)x(t) + [\varepsilon\tilde{p}_1 + \varepsilon^2\tilde{p}_2 + ... + \varepsilon^k\tilde{p}_k]x(t) +$$

$$+\varepsilon^{k+1}\{l_1(t,p_0,...,p_k,\varepsilon)x(t) + l_2(t,p_0,...,p_k,\varepsilon)x(t-\varepsilon\theta\Delta)\}, \qquad (2.25)$$

де

$$\tilde{p}_i = \bar{p}_0 x_i + \bar{p}_1 x_{i-1} + ... + \bar{p}_i x_0, \quad i = 1,2,...,k,$$

а функції $l_1(t,p_0,...,p_k,\varepsilon)$, $l_2(t,p_0,...,p_k,\varepsilon)$ однозначно визначаються із розкладів (2.23), (2.24).

Підставимо вирази (2.24), (2.25) у (2.21) і підберемо функції $p_i(t), i = 0, 1, ..., k$ так, щоб у (2.21) перетворились на нуль усі члени, що містять ε в степені, меншому ніж $k+1$. Обгрунтування можливості такого вибору неважко провести за індукцією.

Для коефіцієнтів розкладу (2.22) справедливі такі алгебраїчні співвідношення:

$$p_0(t) = -[C(t) + D(t)]^{-1}[F(t) + G(t)],$$

$$p_i(t) = -[C(t) + D(t)]^{-1}\Bigg[D(t)p_i + G(t)x_i - \frac{dp_{i-1}}{dt} - p_0 B(t)p_{i-1} - ... -$$

$$-p_{i-1}B(t)p_0 - p_{i-1}A(t)\Bigg], \quad i = 1, 2, ..., k. \tag{2.26}$$

Обмеженість функцій $p_i(t)$ та їх похідних до $(k-i+1)$-го порядку випливає із умов, накладених на коефіцієнти системи (2.18).

Якщо функції $p_i(t)$ вибрані за формулами (2.26), то диференціальне співвідношення (2.21) набуде вигляду

$$T(P_0(t, \varepsilon)x) = \varepsilon^{k+1}[\beta_1(t, \varepsilon)x(t) + \beta_2(t, \varepsilon)x(t - \varepsilon\theta\Delta)],$$

де $\beta_1(t, \varepsilon)$, $\beta_2(t, \varepsilon)$ — рівномірно обмежені функції.

Якщо у вихідній системі (2.18) здійснити заміну

$$y = P_0(t, \varepsilon)x + \varepsilon^{k+1}z,$$

то для змінних x і z дістанемо систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A(t) + B(t)P_0(t, \varepsilon)]x(t) + \varepsilon^{k+1}B(t)z(t),$$

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = [C(t) - \varepsilon P_0(t, \varepsilon)B(t)]z(t) + D(t)z(t - \varepsilon\Delta) +$$

$$+\beta_1(t, \varepsilon)x(t) + \beta_2(t, \varepsilon)x(t - \varepsilon\theta\Delta). \tag{2.27}$$

Розглянемо укорочене рівняння системи (2.27)

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = [C(t) - \varepsilon P_0(t, \varepsilon)B(t)]z(t) + D(t)z(t - \varepsilon\Delta). \tag{2.28}$$

Позначимо через $Z(t, s)$ фундаментальну матрицю рівняння (2.28), а через $Z_0(t, s)$ — фундаментальну матрицю відповідного (2.28) незбуреного рівняння

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = C(t)z(t) + D(t)z(t - \varepsilon\Delta). \tag{2.29}$$

При виконанні умови 2), згідно з лемою А.Халаная, для фундаментальної матриці $Z_0(t,s)$ справджується оцінка

$$|Z_0(t,s)| \leq Ke^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}, \quad t \geq s, \quad K > 0. \tag{2.30}$$

Застосовуючи формулу варіації сталих для фундаментальної матриці $Z(t,s)$ системи (2.28), дістаємо

$$Z(t,s) = Z_0(t,s) - \int\limits_s^t Z_0(t,\xi)P_0(\xi,\varepsilon)B(\xi)Z(\xi - \varepsilon\Delta, s)d\xi.$$

Враховуючи, що $Z_0(t,s) = Z(t,s) = 0$ при $t < s$, перепишемо останню нерівність у вигляді

$$Z(t,s) = Z_0(t,s) - \int\limits_{s+\varepsilon\Delta}^{t+\varepsilon\Delta} Z_0(t,\xi)P_0(\xi,\varepsilon)B(\xi)Z(\xi - \varepsilon\Delta, s)d\xi =$$

$$= Z_0(t,s) - \int\limits_s^t Z_0(t,\xi+\varepsilon\Delta)P_0(\xi+\varepsilon\Delta,\varepsilon)B(\xi+\varepsilon\Delta)Z(\xi,s)d\xi.$$

Оцінюючи праву частину попередньої рівності, дістанемо

$$|Z(t,s)| \leq Ke^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} + KMM_0e^{\mu\Delta}\int\limits_s^t e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}|Z(\xi,s)|d\xi, \quad t \geq s,$$

де $M_0 = \sup\limits_{t,\varepsilon}|P_0(t,\varepsilon)|$.

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Белмана, одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} |Z(t,s)| &\leq Ke^{-(\frac{\mu}{\varepsilon} - KMM_0e^{\mu\Delta})(t-s)} \leq \\ &\leq Ke^{-\frac{\mu}{2\varepsilon}(t-s)}, \quad t \geq s, \end{aligned} \tag{2.31}$$

при $\varepsilon < \dfrac{KMM_0e^{\mu\Delta}}{2}$.

Із оцінки (2.31) випливає, що система (2.27) — це система типу (2.18). Тому при виконанні умов 1)—3) та досить малому ε існує інтегральний многовид системи (2.27)

$$Z(t) = \bar{P}(t,\varepsilon)x(t), \tag{2.32}$$

де $\bar{P}(t,\varepsilon)$ — рівномірно обмежена матриця.

Якщо система (2.27) має інтегральний многовид (2.32), тоді система (2.18) має інтегральний многовид вигляду

$$y(t) = [P_0(t,\varepsilon) + \varepsilon^{k+1}\bar{P}(t,\varepsilon)]x(t),$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$y(t) = p_0(t)x(t) + \varepsilon p_1(t)x(t) + ... + \varepsilon^k p_k(t)x(t) + \varepsilon^{k+1}\bar{P}(t,\varepsilon)x(t). \qquad (2.33)$$

Сформулюємо це твердження у вигляді теореми.

Теорема 2.2. *Нехай відносно системи (2.18) справджуються умови 1)—3). Тоді для досить малих ε система (2.18) має інтегральний многовид вигляду (2.33), де коефіцієнти $p_i(t)$ однозначно визначаються із алгебраїчних співвідношень (2.26).*

2.1.3 Розщеплення лінійних систем із запізненням. Розглянемо тепер лінійну сингулярно збурену систему диференціально-різницевих рівнянь (2.18). Має місце наступне твердження.

Теорема 2.3. *Нехай для системи (2.18) виконуються умови 1)—2). Тоді існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ існує інтегральний многовид швидких змінних системи (2.18), який можна представити у вигляді*

$$x = Q(t,y,\varepsilon), \qquad (2.34)$$

де $Q(t,\varphi,\varepsilon)$ — лінійний по φ функціонал, для якого має місце оцінка

$$|Q(t,\varphi,\varepsilon)| \leq \varepsilon K_3|\varphi|, \quad K_3 > 0. \qquad (2.35)$$

Здійснимо в системі (2.18) заміну змінних

$$y = v + P(t,\varepsilon)x, \qquad (2.36)$$

де $P(t,\varepsilon)$ — матриця, що визначає інтегральний многовид (2.19) повільних змінних. Одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + B(t)P(t,\varepsilon)]x(t) + B(t)v(t),$$

$$\varepsilon\dot{v}(t) = [C(t) - \varepsilon P(t,\varepsilon)B(t)]v(t) + Dv(t-\varepsilon\Delta). \qquad (2.37)$$

Заміна (2.36) розправляє інтегральний многовид системи (2.18) до n-вимірної площини $v = 0$.

Для фундаментальної матриці $V(t,s)$ другого рівняння системи (2.37) при досить малих ε, аналогічно (2.31), одержуємо оцінку

$$|V(t,t_0)| \leq Ke^{-\frac{\mu}{2\varepsilon}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \tag{2.38}$$

Нерівність (2.38) забезпечує існування інтегрального многовида швидких змінних системи (2.37). Здійснимо тепер у системі (2.37) заміну змінних

$$x = u + Q(t,v,\varepsilon), \tag{2.39}$$

де $Q(t,v,\varepsilon)$ — функція, що визначає інтегральний многовид швидких змінних системи (2.37). У результаті дістанемо систему рівнянь

$$\frac{du}{dt} = [A(t) + B(t)P(t,\varepsilon)]u(t),$$

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = [C(t) - \varepsilon P(t,\varepsilon)B(t)]v(t) + D(t)v(t-\varepsilon\Delta), \tag{2.40}$$

яка повністю розщеплена на два незалежних рівняння, перше з яких є регулярним по ε.

Як приклад розглянемо систему (2.18) у випадку, коли її коефіцієнти сталі

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + By(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = Cy(t) + Dy(t-\varepsilon\Delta) + Fx(t) + Gx(t-\varepsilon\Delta). \tag{2.41}$$

Якщо всі корені характеристичного рівняння

$$\det(\lambda E - C - De^{-\lambda\Delta}) = 0 \tag{2.42}$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < -2\mu < 0$, тоді існує інтегральний многовид системи (2.42)

$$y = P(\varepsilon)x,$$

де $P(\varepsilon)$ — стала матриця, яка є розв'язком рівняння

$$\varepsilon P(A+BP) = F + Ge^{-\varepsilon(A+BP)\Delta} + CP + DPe^{-\varepsilon(A+BP)\Delta}. \tag{2.43}$$

Здійснюючи в системі (2.41) заміну змінних

$$v = y + Px,$$

одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = (A+BP)x(t) + Bv(t),$$

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = (C - \varepsilon PB)v(t) + Dv(t - \varepsilon\Delta). \tag{2.44}$$

Якщо тепер у системі (2.44) зробити заміну змінних

$$u = x + z,$$

де

$$z = -\int\limits_t^\infty e^{(A+BP)(t-s)}Bv(s)ds,$$

одержимо два незалежних рівняння

$$\frac{du}{dt} = (A + BP)u(t),$$

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = (C - \varepsilon BP)v(t) + Dv(t - \varepsilon\Delta).$$

Оскільки $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння (2.42), то $\det(C + D) \neq 0$ і матрицю $P(\varepsilon)$ можна шукати у вигляді ряду

$$P(\varepsilon) = \sum_{i=0}^\infty \varepsilon^i P_i. \tag{2.45}$$

Підставляючи (2.45) у рівняння (2.43), дістаємо

$$P_0 = -(C + D)^{-1}(F + G),$$

$$P_1 = (C + D)^{-1}(P_0 + G\Delta + DP_0\Delta)(A + BP_0), \dots .$$

2.2 Застосування методу усередненння до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь

У цьому підрозділі наведено результати по застосуванню методу усереднення для дослідження стійкості диференціальних рівнянь із запізненням. Результати належать І.І. Клевчуку і опубліковані [46-51].

2.2.1 Друге наближення в методі усереднення для системи диференціально-різницевих рівнянь. Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, x(t-\Delta)), \tag{2.46}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^n$, функція $X(t, x, y)$ тричі неперервно диференційовна за всіма змінними.

Нехай

$$X(t, x, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x).$$

Тоді усереднена система для (2.46) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x),$$

де $X_0(x)$ – середнє значення функції $X(t, x, x)$ за змінною t, $X_0(x) = M\{X(t, x, x)\}$. У статті Хейла [52] доведено узагальнення другої теореми Боголюбова про усереднення для системи вигляду (2.46). У цій статті побудуємо друге наближення в методі усереднення і застосуємо його для дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

У системі (2.46) зробимо заміну $x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$, де

$$\tilde{X}(t, \xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \tilde{X}(t, x)}{\partial t} = X(t, x, x) - X_0(x),$$

одержимо систему

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi, \xi) - \varepsilon X_0(x) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} =$$

$$= \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon \tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-\Delta))). \tag{2.47}$$

Оскільки згідно з [52]

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + O(\varepsilon^2),$$

то $\xi(t-\Delta) = \xi(t) - \Delta\dfrac{d\xi}{dt} + O(\varepsilon^2) = \xi(t) - \varepsilon\Delta X_0(\xi) + O(\varepsilon^2)$.

Тому

$$X(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon\tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-\Delta))) =$$

$$= X(t, \xi, \xi) + \varepsilon Y(t, \xi)\tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon Z(t, \xi)[\tilde{X}(t-\Delta, \xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^2),$$

де

$$Y(t, \xi) = \frac{\partial X(t, x, \xi)}{\partial x}\Big|_{x=\xi}, \quad Z(t, \xi) = \frac{\partial X(t, \xi, y)}{\partial y}\Big|_{y=\xi}.$$

Отже, система (2.47) набуде вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}(t, \xi)}{\partial\xi}X_0(\xi) + \varepsilon^2 Y(t, \xi)\tilde{X}(t, \xi) +$$

$$+\varepsilon^2 Z(t, \xi)[\tilde{X}(t-\Delta, \xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^3). \tag{2.48}$$

Ми одержали систему звичайних диференціальних рівнянь, яка апроксимує систему (2.47) із точністю до $O(\varepsilon^3)$. Тому згідно з [53, 54], рівняння другого наближення в методі усереднення для системи (2.48) набудуть вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M\{Y(t, \xi)\tilde{X}(t, \xi) + Z(t, \xi)[\tilde{X}(t-\Delta, \xi) - \Delta X_0(\xi)]\}.$$

2.2.2 Дослідження стійкості розв'язків системи слабко зв'язаних осциляторів. Розглянемо систему слабко зв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t)y(t-h) = 0, \tag{2.49}$$

де ε – малий додатний параметр, $y = (y_1, \ldots, y_q)^T$, L – діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами, $L = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_m t} + \overline{b}_{jsm}e^{-ia_m t}), \quad b_{jsm} \in \mathbb{C}, \quad a_m \geq 0. \tag{2.50}$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалася у [44, 55, 56] та ін. Далі використаємо методику цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (2.49) в термінах її коефіцієнтів.

Систему (2.49) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h), \quad j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j, \quad z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + i z_j$, тоді знаходимо

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h) + \bar{u}_s(t-h)).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j \exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h) + \varepsilon G(t) \bar{x}(t-h), \tag{2.51}$$

де $x = (x_1, ..., x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h}, \quad G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h} \tag{2.52}$$

відповідно.

Підставляючи (2.50) у (2.52), одержимо

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}),$$

$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{-i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t}).$$

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 2.4. *Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$ при $|j-s| + |m-1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (2.49) асимптотично стійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) < 0$ при $j \in \{1, \ldots, q\}$, і нестійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) \neq 0$ для всіх j та існує k, для якого $c_k \sin(\lambda_k h) > 0$.*

Доведення. Стійкість розв'язків системи (2.49) рівносильна стійкості розв'язків системи (2.51). При виконанні умов теореми усереднена система для системи (2.51) матиме вигляд $x' = \varepsilon A x$, де $A = \mathrm{diag}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_q\}$, $\gamma_j =$

$-i\exp(i\lambda_j h)c_j/(2\lambda_j) = (c_j\sin(\lambda_j h) - ic_j\cos(\lambda_j h))/(2\lambda_j)$, $j \in \{1,\dots,q\}$. Із теореми Хейла [52] випливає, що якщо нульовий розв'язок усередненої системи асимптотично стійкий (нестійкий), то і нульовий розв'язок системи (2.51) буде відповідно асимптотично стійким (нестійким). Теорема доведена.

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість.

Позначимо $d_s = \mathrm{Re}\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}\exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}\exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}\Big).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}|b_{skm}|^2\left(\frac{\sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +\right.$$

$$\left.+\frac{\sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}\right).$$

Теорема 2.5. *Нехай $a_m > 0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j-s| + |m-k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок системи (2.49) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s \in \{1,\dots,q\}$ і нестійкий, якщо $d_s \neq 0$ для всіх s та існує k, для якого $d_k < 0$.*

Доведення. У системі (2.51) зробимо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}(t)$, де $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{G}(t)$ – матриці з елементами

$$\tilde{F}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)}e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} +\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)}e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}\right),$$

$$\tilde{G}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{-i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)}e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} +\right.$$

$$+\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j+\lambda_s-a_m)}e^{i(\lambda_j+\lambda_s-a_m)t}\Bigg).$$

Тоді $x(t-h)=\xi-h\xi'+\varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t)+\varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t)+O(\varepsilon^2)=\xi+\varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t)+\varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t)+O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi'=O(\varepsilon^2)$.

Підставляючи в систему (2.51), одержимо

$$\xi'+\varepsilon F(t)\xi+\varepsilon\tilde{F}(t)\xi'+\varepsilon G(t)\bar{\xi}+\varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}'=\varepsilon F(t)\xi+\varepsilon^2F(t)\tilde{F}(t-h)\xi+$$

$$+\varepsilon^2F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}+\varepsilon G(t)\bar{\xi}+\varepsilon^2G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi}+\varepsilon^2G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi+O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi'=\varepsilon^2F(t)\tilde{F}(t-h)\xi+\varepsilon^2F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}+\varepsilon^2G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi}+$$

$$+\varepsilon^2G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi+O(\varepsilon^3). \tag{2.53}$$

У системі (2.53) можна ще раз застосувати метод усереднення [52, 53] і одержати усереднену систему

$$\xi'=\varepsilon^2M\{F(t)\tilde{F}(t-h)\}\xi+\varepsilon^2M\{F(t)\tilde{G}(t-h)\}\bar{\xi}+\varepsilon^2M\{G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\}\bar{\xi}+$$

$$+\varepsilon^2M\{G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\}\xi.$$

Позначимо через $f_{ss}(t)$ та $g_{ss}(t)$ діагональні елементи матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)$ відповідно і знайдемо їх середні значення

$$M\{f_{ss}(t)\}=M\{\sum_{k=1}^{q}F_{sk}(t)\tilde{F}_{ks}(t-h)\}=M\{\frac{i}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}e^{i\lambda_kh}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{i(\lambda_s-\lambda_k+a_m)t}+$$

$$+\bar{b}_{skm}e^{i(\lambda_s-\lambda_k-a_m)t})\frac{i}{2\lambda_k}e^{i\lambda_sh}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}e^{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)(t-h)}+$$

$$+\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)(t-h)})\}=M\{-\frac{1}{2\lambda_s}e^{i\lambda_sh}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}e^{i\lambda_kh}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{ia_mt}+$$

$$+\bar{b}_{skm}e^{-ia_mt})\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}e^{ia_mt}e^{i(\lambda_s-\lambda_k-a_m)h}+\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{-ia_mt}\times$$

$$\times e^{i(\lambda_s-\lambda_k+a_m)h})\}=-\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h}+$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}e^{i(2\lambda_s-a_m)h}),$$

$$M\{g_{ss}(t)\} = M\{\sum_{k=1}^{q} G_{sk}(t)\tilde{\bar{G}}_{ks}(t-h)\} = M\{\frac{i}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q} e^{-i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)t}+$$

$$+\bar{b}_{skm}e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)t})\frac{i}{2\lambda_k}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{-i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)(t-h)}+$$

$$+\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{-i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)(t-h)})\} =$$

$$= M\{-\frac{1}{2\lambda_s}e^{i\lambda_s h}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}e^{-i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{ia_m t}+\bar{b}_{skm}e^{-ia_m t})\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{n}(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{-ia_m t}e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)h}+\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{ia_m t}e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)h})\} =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h}+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{i(2\lambda_s-a_m)h}).$$

Отже,

$$M\{f_{ss}(t)\} + M\{g_{ss}(t)\} = -\frac{\delta_s}{2\lambda_s}.$$

Якщо відсутній резонанс, то середні значення всіх елементів матриць $F(t)\tilde{G}(t-h)$, $G(t)\tilde{\bar{F}}(t-h)$, а також всіх позадіагональних елементів матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\tilde{\bar{G}}(t-h)$ дорівнюють нулеві, отже за допомогою лінійної заміни систему (2.53) можна звести до системи $\xi' = \varepsilon^2 D\xi + O(\varepsilon^3)$, де $D = \mathrm{diag}\{-\delta_1/(2\lambda_1), \dots, -\delta_q/(2\lambda_q)\}$. Якщо $d_s = \mathrm{Re}\{\delta_s\} > 0$ при $s \in \{1,\dots,q\}$, то, згідно з [52], нульовий розв'язок системи (2.50) асимптотично стійкий, а якщо $d_s \neq 0$ при $s \in \{1,\dots,q\}$, але існує k, для якого $d_k < 0$, то нульовий розв'язок системи (2.49) нестійкий. Теорема доведена.

Зауваження. *Твердження теорем 1 і 2 про нестійкість правильні й без припущення про відмінність від нуля величин $c_j \sin(\lambda_j h)$ та d_s. Це можна показати, виконавши в системі (2.53) лінійну заміну і використавши схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням [57].*

Розглянемо систему

$$x' = \varepsilon F(t)x(t-h), \qquad (2.54)$$

де ε – малий додатний параметр, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^p$, $F(t) = \sum\limits_{m=1}^{n}(A_m e^{ib_m t} + \overline{A}_m e^{-ib_m t})$, b_m – дійсні додатні різні числа, A_m – матриці з комплексними елементами.

У системі (2.54) зробимо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t)$, де $\tilde{F}(t) = \sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{1}{ib_m}A_m e^{ib_m t} - \frac{1}{ib_m}\overline{A}_m e^{-ib_m t}\Big)$. Тоді $x(t-h) = \xi - h\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$. Підставляючи в систему (2.54), одержимо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2). \tag{2.55}$$

У системі (2.55) можна ще раз застосувати метод усереднення [54] і одержати усереднену систему $\xi' = \varepsilon^2 B\xi$, де $B = -\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{b_m}\sin(b_m h)(A_m\overline{A}_m + \overline{A}_m A_m)$.

Теорема 2.6. *Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (2.54) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (2.54) нестійка.*

Доведення теореми випливає з теореми Хейла про усереднення [52]. Якщо існують власні значення матриці B з нульовою та додатною дійсними частинами, то треба використати схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням.

3 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ОПЕРАТОРНИХ ТА ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ

У цьому розділі наведено результати, пов'язані з означенням нових класів параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем рівнянь як з гладкими, так і точково-негладкими символами псевдодиференціювання, залежними лише від часового параметра, та описом якомога ширших множин їх гладких розв'язків, які стосовно просторової змінної мають властивості, що є характерними для їх фундаментальних розв'язків, а також з розвиненням теорії просторів основних і узагальнених функцій типу Фреше, як середовища дослідження задачі Коші та багатоточкової задачі для таких рівнянь і систем. Наведені тут результати належать В.А.Літовченку (п. 3.1.1–3.1.2, 3.2.1–3.2.2), Д.І.Спіжавко спільно з В.В.Городецьким (п. 3.1.3, 3.2.3) і Т.І.Готинчан (п. 3.1.4); опубліковані в [58–76].

3.1 Середовище дослідження псевдодиференціальних рівнянь і систем

3.1.1 Узагальнення просторів Гуревича.

а) Простори $W_{\Omega}^{\{\alpha_k\}}$ і $W^M_{\{\alpha_k\}}$. Нехай $\overrightarrow{M}(\cdot), \overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ – опуклі вниз вектор-функції, побудовані раніше (тут позначатимемо їх через $M(\cdot)$ і $\Omega(\cdot)$ відповідно), а $\{\alpha_k := (\alpha_{1,k_1}, \ldots, \alpha_{n,k_n}) > \overrightarrow{0}, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ – послідовність з $\mathbb{R}^n$ (надалі матимемо справу лише з такими послідовностями, причому позначатимемо їх $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$). Говоритимемо, що ця послідовність *задовольняє умову* $\mathbf{A}$, якщо для кожного $\nu \in \mathbb{N}_n$:

1) $0 < \alpha_{\nu,k_\nu} < \alpha_{\nu,k_\nu+1}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$;

2) $\lim\limits_{k_\nu \to \infty} \alpha_{\nu,k_\nu} = +\infty$;

3) $\exists c_\nu > 0\ \exists A_\nu > 0\ \forall k_\nu \in \mathbb{Z}_+$: $\dfrac{\alpha_{\nu,k_\nu+2}}{\alpha_{\nu,k_\nu}} \leq c_\nu A_\nu^{k_\nu}$;

4) $\exists L_\nu > 0\ \forall \{k_\nu; m_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+$: $\alpha_{\nu,k_\nu}\alpha_{\nu,m_\nu} \leq L_\nu^{k_\nu+m_\nu}\alpha_{\nu,(k_\nu+m_\nu)}$.

Прикладом такої послідовності є послідовність із загальним членом $\alpha_k = (k_1^{\beta_1 k_1}, \ldots, k_n^{\beta_n k_n})$, $\beta_\nu > 0$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}_n$.

Покладемо

$$W_{\Omega}^{\{\alpha_k\}} := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Big| \exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists \delta > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq cA^{|k|_*}\, \widehat{\alpha_k} \exp\{-(\overrightarrow{1}, \Omega(\delta x))\}\};$$

$$W^M_{\{\alpha_k\}} := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \Big| \exists c > 0\, \exists B > 0\, \exists b > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}^n_+\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}^n :$$

$$|z^k \varphi(z)| \le cB^{|k|_*}\, \widehat{\alpha_k} \exp\{(\overrightarrow{1}, M(by))\}, \quad \widehat{\alpha_k} := \prod_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu,k_\nu}.$$

Через $W^{\{\alpha_k\},A}_{\Omega,a}$ і $W^{M,b}_{\{\alpha_k\},B}$ позначимо сукупності всіх тих функцій $\varphi \in W^{\{\alpha_k\}}_\Omega$ і $\psi \in W^M_{\{\alpha_k\}}$ відповідно, для яких виконуються нерівності

$$|D^k_x \varphi(x)| \le c\hat{A}^{|k|_*}\, \widehat{\alpha_k} \exp\{-(\overrightarrow{1}, \Omega(\hat{a}x))\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|z^k \psi(z)| \le c\check{B}^{|k|_*}\, \widehat{\alpha_k} \exp\{(\overrightarrow{1}, M(\check{b}y))\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^n,$$

для всіх $\hat{A} \ge A$, $\hat{a} \le a$, $\check{B} \ge B$, $\check{b} \ge b$ та $k \in \mathbb{Z}^n_+$. Якщо для $\varphi \in W^{\{\alpha_k\},A}_{\Omega,a}$ і $\psi \in W^{M,b}_{\{\alpha_k\},B}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n_+} \Big\{ |D^k_x \varphi(x)| \Big/ \Big((A+\delta)^{|k|_*}\, \widehat{\alpha_k} \exp\{-(\overrightarrow{1}, \Omega(a(1-\rho)x))\} \Big) \Big\},$$

$$\|\psi\|_{\delta\rho} := \sup_{z = x+iy \in \mathbb{C}^n, k \in \mathbb{Z}^n_+} \Big\{ |z^k \psi(z)| \Big/ \Big((B+\delta)^{|k|_*}\, \widehat{\alpha_k} \exp\{(\overrightarrow{1}, M(b(1+\rho)y))\} \Big) \Big\},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \{1/n; n \ge 2\},$$

то міркуючи так, як у випадку просторів типу S і W [78, 79] за умови, що послідовність $\{\alpha_k,\ k \in \mathbb{Z}^n_+\}$ задовольняє умову **A**, переконуємось, що з цими нормами простори $W^{\{\alpha_k\},A}_{\Omega,a}$ і $W^{M,b}_{\{\alpha_k\},B}$ є повними досконалими зліченно-нормованими; $W^{\{\alpha_k\}}_\Omega = \bigcup_{A,a>0} W^{\{\alpha_k\},A}_{\Omega,a}$, $W^M_{\{\alpha_k\}} = \bigcup_{B,b>0} W^{M,b}_{\{\alpha_k\},B}$, причому послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset W^{\{\alpha_k\}}_\Omega$ ($W^M_{\{\alpha_k\}}$) збігається до $\varphi \in W^{\{\alpha_k\}}_\Omega$ ($W^M_{\{\alpha_k\}}$) при $\nu \to +\infty$ у цьому просторі тоді і тільки тоді, коли: а) $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\}$ правильно збіжна на $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$); б) вона обмежена в $W^{\{\alpha_k\}}_\Omega$ (відповідно в $W^M_{\{\alpha_k\}}$).

Виконання умови **A** для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$ гарантує існування та неперервність операцій додавання, віднімання, множення, диференціювання, а також зсуву в просторах $W^{\{\alpha_k\}}_\Omega$ і $W^M_{\{\alpha_k\}}$. Більше того, оскільки зазначені простори досконалі, то операція зсуву в них не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна [79].

Слід зазначити, що в залежності від $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$ у $W^{\{\alpha_k\}}_\Omega$ можуть міститися не лише цілі функції, як це вимагається для простору W^M_Ω Гуревича [79], а $\inf_{k_\nu \in \mathbb{Z}_+} \Big\{ \dfrac{cB^{k_\nu} \alpha_{\nu,k_\nu}}{|z_\nu|^{k_\nu}} \Big\}$ не завжди є функцією з властивостями функції $e^{-\Omega_\nu(z_\nu)}$, $\nu \in \mathbb{N}_n$, що є обов'язковим для простору W^Ω_M. Якщо $M_\nu(\cdot) = |\cdot|^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а

$\alpha_{\nu,k_\nu} = k_\nu^{\beta k_\nu}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}_n$, $\beta > 0$, то $W_M^{\{\alpha_k\}} = S_\alpha^\beta$, де S_α^β – відповідний простір типу S Гельфанда і Шилова [78].

Лема 3.1 *Нехай $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* $\mathbf{A}$, *$K(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le r\}$, $r > 0$, а Ψ – один з просторів $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$, $W_{\{\alpha_k\}}^M$. Тоді якщо $\{\varphi, \psi\} \subset \Psi$, то для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$:*

1) $J_r(\xi) := \int\limits_{K(r)} \varphi(x)\psi(x-\xi)dx \xrightarrow[r\to+\infty]{\Psi} J(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x-\xi)dx$;

2) функція $\varphi(\cdot)\psi(\cdot-\xi)$ інтегровна на множині $K(r)$ у сенсі топології простору Ψ.

З цієї леми, як наслідок, одержуємо таке твердження.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови попередньої леми, тоді для всіх $\{\varphi;\psi\} \subset \Psi$ функція $\varphi(\cdot)\psi(\cdot-\xi)$ при кожному фіксованому $\xi \in \mathbb{R}^n$ інтегровна на $\mathbb{R}^n$ у сенсі топології простору Ψ.*

Наступні твердження характеризують властивості перетворення Фур'є елементів просторів $W_{\Omega,b}^{\{\alpha_k\},B}$ і $W_{\{\alpha_k\},B}^{M,b}$.

Теорема 3.2. *Якщо вектор-функція $M(\cdot)$ двоїста за Юнгом з $\Omega(\cdot)$, а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* $\mathbf{A}$, *то $F[W_{\Omega,b}^{\{\alpha_k\},B}] \subset W_{\{\alpha_k\},B}^{M,\frac{1}{b}}$ і $F[W_{\{\alpha_k\},B}^{M,b}] \subset W_{\Omega,\frac{1}{b}}^{\{\alpha_k\},B}$.*

Теорема 3.3. *Якщо вектор-функції $M(\cdot)$ і $\Omega(\cdot)$ – взаємно двоїсті за Юнгом, а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* $\mathbf{A}$, *то*

$$F[W_\Omega^{\{\alpha_k\}}] = W_{\{\alpha_k\}}^M, \;\; F[W_{\{\alpha_k\}}^M] = W_\Omega^{\{\alpha_k\}}.$$

Ці рівності виконуються й у випадку оберненого перетворення Фур'є, причому оператори перетворення Фур'є F, F^{-1} є неперервними й взаємно однозначними відображеннями у цих просторах.

Далі дамо таке

Означення 3.3. *Послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ називається узгодженою з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, якщо для кожного $\nu \in \mathbb{N}_n$ існує така додатна стала B_ν, що для всіх i_ν, j_ν, $\ldots$, h_ν—цілочислових невід'ємних розв'язків рівняння $k_\nu = 1 \cdot i_\nu + 2 \cdot j_\nu + \cdots + L_\nu \cdot h_\nu$, $\{L_\nu, k_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+$, виконується нерівність*

$$\left(\frac{\alpha_{\nu,1}}{1!}\right)^{i_\nu} \left(\frac{\alpha_{\nu,2}}{2!}\right)^{j_\nu} \cdots \left(\frac{\alpha_{\nu,L_\nu}}{L_\nu!}\right)^{h_\nu} \le B_\nu^{k_\nu} \frac{\alpha_{\nu,k_\nu}}{k_\nu!}, \quad k_\nu \in \mathbb{Z}_+.$$

Наступні два твердження характеризують елементи просторів $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$ і $W_{\{\alpha_k\}}^M$ на $\mathbb{C}^n$ та $\mathbb{R}^n$ відповідно.

Теорема 3.4. *Нехай послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* **A** *і є такою, що для всіх* $\nu \in \mathbb{N}_n$ $\lim\limits_{k_\nu \to +\infty} \dfrac{\sqrt[k_\nu]{\alpha_{\nu,k_\nu}}}{k_\nu} = L_\nu < +\infty$, *тоді всі елементи* $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$ *є аналітичними функціями, причому цілими, якщо* $L_\nu \equiv 0$. *У випадку, коли для кожного* $\nu \in \mathbb{N}_n$ *існує* $\beta > 1$ *таке, що* $\lim\limits_{k_\nu \to +\infty} \dfrac{\sqrt[k_\nu]{\alpha_{\nu,k_\nu}}}{k_\nu^\beta} = +\infty$, *то серед елементів простору* $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$ *є вже фінітні функції.*

Теорема 3.5. *Якщо послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* **A** *й узгоджена з* $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, *то функція* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *належатиме до простору* $W_{\{\alpha_k\}}^M$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists B > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists \rho_k = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_n}\},\ \rho_{k_\nu} \in [0, k_\nu),\ \nu \in \mathbb{N}_n,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \ |D_x^k f(x)| \le cA^{|k|_*} k! \prod_{\nu=1}^n \Big(\frac{e^{M_\nu(\rho_{k_\nu})}}{\rho_{k_\nu}^{k_\nu}} \cdot \inf_{m \ge 0} \Big\{ \frac{B^m \alpha_{\nu,m}}{|x_\nu|^m} \Big\} \Big),$$

де ρ_{k_ν} *– розв'язок рівняння* $\rho\mu_\nu(\rho) = k_\nu$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}_n$ *(тут* $\mu_\nu(\cdot)$ *— функція, за якою будується* $M_\nu(\cdot)$*).*

б) Простори $(W_\Omega^{\{\alpha_k\}})'$ **і** $(W_{\{\alpha_k\}}^M)'$**.** Через $(W_\Omega^{\{\alpha_k\}})'$ та $(W_{\{\alpha_k\}}^M)'$ позначимо сукупності всіх лінійних неперервних функціоналів зі слабкою збіжністю, визначених відповідно на $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$ і $W_{\{\alpha_k\}}^M$. Оскільки в просторах $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$, $W_{\{\alpha_k\}}^M$ введені топології індуктивних границь:

$$W_\Omega^{\{\alpha_k\}} = \lim_{A \to \infty,\, a \to +0} \operatorname{ind} W_{\Omega,a}^{\{\alpha_k\},A}; \quad W_{\{\alpha_k\}}^M = \lim_{B \to \infty,\, b \to \infty} \operatorname{ind} W_{\{\alpha_k\},b}^{M,B},$$

то

$$(W_\Omega^{\{\alpha_k\}})' = \lim_{A \to \infty,\, a \to +0} \operatorname{pr} (W_{\Omega,a}^{\{\alpha_k\},A})', \quad (W_{\{\alpha_k\}}^M)' = \lim_{B \to \infty,\, b \to \infty} \operatorname{pr} (W_{\{\alpha_k\},b}^{M,B})',$$

де $(W_{\Omega,a}^{\{\alpha_k\},A})'$, $(W_{\{\alpha_k\},b}^{M,B})'$ – топологічно спряжені простори з відповідними просторами основних функцій.

Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \Psi \in \{W_\Omega^{\{\alpha_k\}}; W_{\{\alpha_k\}}^M\}$ визначається формулою $\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$. Кожна локально інтегровна на $\mathbb{R}^n$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists c_\varepsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| \le c_\varepsilon e^{(\overrightarrow{1}, \Omega(\varepsilon x))} \quad (|f(x)| \le c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1}), \tag{3.1}$$

де $\gamma(x) := \prod\limits_{j=1}^n \left(\begin{cases} 1, & |x_j| < 1, \\ \inf\limits_m \left(\dfrac{\alpha_{j,m}}{|x_j|^m} \right), & |x_j| \ge 1 \end{cases} \right)$, породжує регулярну узагальнену функцію F_f з $(W_\Omega^{\{\alpha_k\}})'$ (або з $(W_{\{\alpha_k\}}^M)'$): $\langle F_f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in \Psi$ (тут Ψ

– відповідний простір основних функцій), якщо для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ виконується умова **A**.

Правильне таке твердження.

Теорема 3.6. *Нехай для послідовності* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *виконується умова* **A**. *Тоді якщо локально інтегровні на* $\mathbb{R}^n$ *функції* f *і* g, *які задовольняють умову (3.1), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція* $\varphi_0 \in \Psi$ *така, що* $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$, *тобто* $F_f \neq F_g$. *Навпаки, якщо* $F_f \neq F_g$, *то функції* f *і* g *не збігаються на множині додатної міри Лебега.*

Ця теорема дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, що задовольняють умову (3.1), з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $\Psi' \in \{(W_\Omega^{\{\alpha_k\}})'; (W_{\{\alpha_k\}}^M)'\}$. З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $\Psi \ni f \longrightarrow F_f \in \Psi'$ є неперервним.

У просторі Ψ визначена операція τ_h звичайного зсуву аргументу, тому згортку узагальненої функції $f \in \Psi'$ з основною функцією φ означимо так: $(f * \varphi)(\cdot) := \langle f(\xi), \varphi(\cdot - \xi) \rangle$.

Лема 3.2. *Нехай* $f \in \Psi'$ *і* $\varphi \in \Psi$. *Тоді якщо послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* **A**, *то згортка* $(f * \varphi)(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *при цьому*

$$D_x^q (f * \varphi)(x) = (f * D_x^q \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{Z}_+^n.$$

З властивості неперервності операції зсуву аргументу в просторі Ψ, випливає властивість неперервності згортки $f * \varphi$, $f \in \Psi'$, $\varphi \in \Psi$.

З огляду на теорему 3.12, перетворення Фур'є узагальненої функції f з $(W_\Omega^{\{\alpha_k\}})'$ (або з $(W_{\{\alpha_k\}}^M)'$) означимо співвідношенням

$$\forall \varphi \in W_{\{\alpha_k\}}^{\widetilde{\Omega}} \quad (\forall \varphi \in W_{\widetilde{M}}^{\{\alpha_k\}}): \quad \langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle$$

(тут, як і раніше, $\widetilde{O}(\cdot)$ – вектор-функція, двоїста за Юнгом з $O(\cdot)$).

Теорема 3.7. *Нехай для послідовності* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *виконується умова* **A**, *а* $\Psi \in \{W_\Omega^{\{\alpha_k\}}; W_{\{\alpha_k\}}^M\}$. *Тоді якщо* $f \in \Psi'$ *– згортувач у просторі* Ψ, *то*

$$F[f * \varphi](\cdot) = F[f](\cdot) F[\varphi](\cdot), \ \varphi \in \Psi.$$

Зауваження 3.1. З теореми 3.7 випливає, що якщо узагальнена функція f – згортувач у Ψ, то її перетворення Фур'є – мультиплікатор у $F[\Psi]$.

Об'єднуючи зауваження 3.1 з твердженням теореми 1 з [80], одержимо такий критерій згортувача в просторах $W_\Omega^{\{\alpha_k\}}$ і $W_{\{\alpha_k\}}^M$.

Теорема 3.8 (критерій згортувача). *Нехай* $\Psi \in \{W_\Omega^{\{\alpha_k\}}; W_{\{\alpha_k\}}^M\}$ *і послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* **A**. *Тоді для того щоб* *узагальнена функція $f \in \Psi'$ була згортувачем у просторі Ψ, необхідно й достатньо, щоб її перетворення Фур'є було мультиплікатором у $F[\Psi]$.*

Правильні такі ланцюжки неперервних вкладень:

$$W_\Omega^{\{\alpha_k\}} \subset W_\Omega^{\{\beta_k\}} \subset W_\Omega \subset S \subset W'_\Omega \subset (W_\Omega^{\{\beta_k\}})' \subset (W_M^{\{\alpha_k\}})';$$

$$W^M_{\{\alpha_k\}} \subset W^M_{\{\beta_k\}} \subset W^M \subset S \subset (W^M)' \subset (W^M_{\{\beta_k\}})' \subset (W^M_{\{\alpha_k\}})'$$

(тут послідовності $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняють умову **A** і такі, що $\alpha_{\nu,k_\nu} \leq \beta_{\nu,k_\nu}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}_n$, а W_Ω, W^M – відповідні простори типу W Гуревича [79]).

3.1.2 Простори Φ_h^γ і $(\Phi_h^\gamma)'$.

б) Простір Φ_h^γ основних функцій. Нехай γ – фіксоване додатне число,

$$M_p(\cdot) = (1 + \|\cdot\|)^{n+\gamma-\frac{1}{p}},\ p \in \mathbb{N};\ \Omega_{\alpha,h}(\cdot) = ((1 + \|\cdot\|)^{-1} + \|h\|)^{-\alpha},\ \alpha > 0,$$

і h – фіксована точка з $\mathbb{R}^n$. Позначимо через Φ_h^γ сукупність усіх функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, що

$$\forall q \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists c_q = c_q(\varphi) > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n:\ \ |D_x^q \varphi(x)| \leq c_q (1 + \|x\|)^{-(n+\gamma)} \Omega_{-|q|_*,h}(x).$$

Задамо в Φ_h^γ зліченну систему півнорм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, |q|_* \leq p} \{M_p(x) \Omega_{|q|_*,h}(x) |D_x^q \varphi(x)|\}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

й означимо в цьому просторі збіжність у такий спосіб: *послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi_h^\gamma$ збігається в Φ_h^γ до $\varphi \in \Phi_h^\gamma$ при $\nu \to +\infty$, якщо $\|\varphi_\nu - \varphi\|_p \underset{\nu \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $p \in \mathbb{N}$.*

Символом $\Phi_{p,h}^\gamma$ позначимо множину всіх функцій φ, які мають неперервні похідні до p-го порядку включно і для яких вирази $M_p(x)\Omega_{|q|_*,h}(x)|D_x^q\varphi(x)|$, $|q|_* \leq p$, неперервні й обмежені в $\mathbb{R}^n$. З півнормами (3.2) простір Φ_h^γ стає лінійним зліченно-нормованим, причому $\Phi_h^\gamma = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \Phi_{p,h}^\gamma$.

Наступні допоміжні твердження відіграють важливу роль при встановленні повноти просторів $\Phi_{p,h}^\gamma$.

Лема 3.3. *Нехай послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi_{p,h}^\gamma$ рівномірно збігається на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ разом зі своїми похідними до порядку p. Тоді її граничне значення φ також є диференційовною функцією до p-го порядку, при цьому якщо $\|\varphi_\nu\|_p < c$, $\nu \geq 1$, то $\varphi \in \Phi_{p,h}^\gamma$ і $\|\varphi\|_p < c$.*

Лема 3.4. *Нехай* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi^\gamma_{p,h}$ *поточково збігається до нуля в* $\mathbb{R}^n$ *і фундаментальна за півнормою* $\|\cdot\|_p$, *тоді вона збігається до нуля і за цією півнормою.*

Звідси безпосередньо одержуємо

Наслідок 3.1. *У просторі* Φ^γ_h *півнорми* $\|\cdot\|_p$ *попарно узгоджені.*

А, відтак і теорему про повноту кожного із просторів $\Phi^\gamma_{p,h}$.

Теорема 3.9. *Простір* $\Phi^\gamma_{p,h}$ *повний відносно півнорми* $\|\cdot\|_p$.

Критерій збіжності в просторі Φ^γ_h характеризує

Теорема 3.10. *Для того щоб послідовність* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi^\gamma_h$ *збігалася в* Φ^γ_h, *необхідно й достатньо, щоб вона була обмежена в цьому просторі та правильно збігалася на* $\mathbb{R}^n$.

Доведення цієї теореми грунтується на такій лемі.

Лема 3.5. *Якщо послідовність* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi^\gamma_h$ *обмежена за кожною з півнорм* $\|\cdot\|_p$ *і правильно збігається до деякої функції* φ *на* $\mathbb{R}^n$, *то* φ *належить до* Φ^γ_h *і є границею послідовності* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ *за топологією простору* Φ^γ_h.

Нехай далі $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – простір фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій. Тоді $\mathcal{D} \subset \Phi^\gamma_h$, причому щільно.

Теорема 3.11. *Простір* Φ^γ_h *досконалий.*

Очевидно, що простір S Шварца є щільним у Φ^γ_h, оскільки простір $\mathcal{D}$ щільно вкладається в S та Φ^γ_h.

Неважко переконатися в тому, що в просторі Φ^γ_h визначені та неперервні операції додавання, віднімання, множення, звичайного зсуву аргументу та диференціювання. Причому операція зсуву аргументу є не лише неперервною, але й нескінченно диференційовною.

У цьому просторі також визначена й неперервна операція згортки з елементом ψ простору S:

$$(\varphi * \psi)(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(\cdot - x)dx, \; \varphi \in \Phi^\gamma_h.$$

Оскільки операція згортки має властивість комутативності, а операція зсуву аргументу є нескінченно диференційовною, то правильна така рівність:

$$D^k_x(\varphi * \psi)(x) = ((D^k_x\varphi) * \psi)(x) = (\varphi * D^k_x\psi)(x).$$

Очевидно, що елементи простору Φ^γ_h є абсолютно інтегровними на $\mathbb{R}^n$, тому на них визначений оператор перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\cdot)}\varphi(x)dx, \; \varphi \in \Phi^\gamma_h.$$

Наступне твердження характеризує поведінку Фур'є-образів елементів простору Φ_h^γ в околі нескінченно віддалених точок.

Теорема 3.12. *Перетворення Фур'є елемента* $\varphi \in \Phi_h^\gamma$ *спадає на нескінченності швидше, ніж степенево.*

На завершення зазначимо тут, що функція

$$\varphi(x,h) = e^{-ixh}(1+x^2)^{-1}, \{x,h\} \subset \mathbb{R},$$

як функція змінної x, є елементом простору Φ_h^1. Неважко переконатися в тому, що

$$F[\varphi](\xi,h) = \pi e^{-|\xi-h|},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Цей **приклад** характеризує елементи Φ_h^γ як прообрази Фур'є негладких у точці h функцій.

б) Простір $(\Phi_h^\gamma)'$ узагальнених функцій. Символом $(\Phi_h^\gamma)'$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на Φ_h^γ зі слабкою збіжністю. Зрозуміло, що

$$(\Phi_h^\gamma)' = (\lim_{p\to+\infty} \operatorname{pr} \Phi_{h,p}^\gamma)' = \lim_{p\to+\infty} \operatorname{ind} (\Phi_{h,p}^\gamma)',$$

де $(\Phi_{h,p}^\gamma)'$ – простір, топологічно спряжений з $\Phi_{h,p}^\gamma$.

Отже, якщо $f \in (\Phi_h^\gamma)'$, то $f \in (\Phi_{h,p}^\gamma)'$ при деякому $p \in \mathbb{N}$. Найменше з таких p називається *порядком* f, тобто кожна узагальнена функція $f \in (\Phi_h^\gamma)'$ має скінченний порядок. Інакше кажучи, f допускає продовження на Φ_h^γ як лінійний неперервний функціонал зі спряженого простору $(\Phi_{h,p}^\gamma)'$; при цьому виконується нерівність

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leq c\|\varphi\|_p,\ \varphi \in \Phi_h^\gamma,$$

де $c := \|f\|_p$ – норма функціонала f у просторі $(\Phi_{h,p}^\gamma)'$.

Оскільки Φ_h^γ – досконалий простір, то у відповідному топологічно спряженому просторі $(\Phi_h^\gamma)'$ слабка збіжність збігається із сильною.

Простір $(\Phi_h^\gamma)'$ є повним.

Якщо $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ – локально інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\exists c > 0\ \exists m \in (0,\gamma)\ \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad |\varphi(x)| \leq c(1+\|x\|)^m, \tag{3.3}$$

то вона визначає регулярний функціонал $f_\varphi \in (\Phi_h^\gamma)'$ за формулою

$$\langle f_\varphi, \psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \Phi_h^\gamma,$$

тобто простір Φ_h^γ неперервно вкладається в $(\Phi_h^\gamma)'$. З відомої леми дю Буа Раймона випливає, що кожна регулярна узагальнена функція з $(\Phi_h^\gamma)'$ визначається однією (з точністю до значень на множині міри нуль) локально інтегровною на $\mathbb{R}^n$ функцією, яка задовольняє умову (3.3). Отже, між локально інтегровними на $\mathbb{R}^n$ функціями, які задовольняють умову (3.3), та регулярними узагальненими функціями з $(\Phi_h^\gamma)'$ існує взаємно однозначна відповідність.

Нехай f – фінітна узагальнена функція з $(\Phi_h^\gamma)'$, а η – фінітна фунція з Φ_h^γ така, що $\eta = 1$ у деякому околі $\operatorname{supp} f$. Тоді

$$< f, \varphi >=< f, \eta\varphi > + < f, (1-\eta)\varphi >, \quad \varphi \in \Phi_h^\gamma.$$

Оскільки $\operatorname{supp} f \bigcap \operatorname{supp}((1-\eta)\varphi) = \emptyset$, то $< f, (1-\eta)\varphi >= 0$. Таким чином, кожен фінітний функціонал $f \in (\Phi_h^\gamma)'$ діє на основні функції згідно з формулою

$$< f, \varphi >=< f, \eta\varphi >, \quad \varphi \in \Phi_h^\gamma, \tag{3.4}$$

причому число $< f, \varphi >$ не залежить від вибору функції η.

Формула (3.4) задає продовження фінітної узагальненої функції з $\mathcal{D}'$ на $(\Phi_h^\gamma)'$ (тут $\mathcal{D}'$ – простір, топологічно спряжений з $\mathcal{D}$). Тому сукупність $\mathcal{E}'$ усіх фінітних узагальнених функцій з $\mathcal{D}'$ збігається з множиною всіх фінітних узагальнених функцій з $(\Phi_h^\gamma)'$. Таким чином, $\mathcal{E}'$ міститься в $(\Phi_h^\gamma)'$, причому щільно.

У просторі $(\Phi_h^\gamma)'$ також визначені й неперервні операції диференціювання та звичайного зсуву аргументу (бо такими є ці операції в Φ_h^γ). Крім цього, правильні такі умови існування згортки.

i) Нехай $f \in (\Phi_h^\gamma)'$ і $\{\varphi, \eta\} \subset \mathcal{D}$, причому $\eta(\xi) = 1$, $\xi \in \operatorname{supp}\varphi$. Тоді

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta\varphi \rangle + \langle f, (1-\eta)\varphi \rangle.$$

Оскільки $(1-\eta)\varphi = 0$ на $\mathbb{R}^n$, то $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta\varphi \rangle$, причому $\langle f, \varphi \rangle$ не залежить від вибору η. Взявши це до уваги, означимо згортку $f * \varphi$ так:

$$\langle f * \varphi, \phi \rangle := \langle f(\xi), \eta(\xi) \langle \varphi(y), \phi(\xi + y) \rangle \rangle,\ \phi \in \Phi_h^\gamma.$$

Можна переконатися, що $f * \varphi \in (\Phi_h^\gamma)'$.

Для так означеної згортки правильне інше, еквівалентне вихідному зображення, а саме:

$$(f * \varphi)(x) = \langle f(\xi), \varphi(x - \xi) \rangle.$$

Крім цього,

$$D_x^q (f * \varphi) = (D_x^q f) * \varphi = f * D_x^q \varphi,\ q \in \mathbb{Z}_+^n.$$

ii) Нехай $f \in (\Phi_h^\gamma)'$, а g – узагальнена функція з компактним носієм. Тоді в $(\Phi_h^\gamma)'$ існує згортка $f * g$, яка визначається за формулою

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle f(\xi), \langle g(y), \phi(\xi + y) \rangle \rangle, \quad \phi \in \Phi_h^\gamma.$$

iii) Нехай тепер $f \in (\Phi_h^\gamma)'$, а $\varphi \in \Phi_h^\gamma$. Тоді формула

$$f * \varphi = \langle f(\xi), \varphi(x - \xi) \rangle,$$

визначає згортку в просторі $(\Phi_h^\gamma)'$.

Зазначимо, що в усіх наведених випадках згортка $f * g$ має властивість лінійності й неперервності (відносно f та g окремо).

Нехай далі $\mathfrak{F}_h$ – сукупність усіх згортувачів у просторі Φ_h^γ. Кожна узагальнена функція з компактним носієм належить до $\mathfrak{F}_h$. Крім цього, кожен елемент $f \in S$ – регулярний функціонал з $\mathfrak{F}_h$ (тобто $S \subset \mathfrak{F}_h$).

Наступне твердження характеризує критерій згортувача в просторі Φ_h^γ.

Теорема 3.13. *Для того щоб узагальнена функція $f \in (\Phi_h^\gamma)'$ була згортувачем у просторі Φ_h^γ, необхідно й достатньо, щоб її перетворення Фур'є було мультиплікатором у просторі $F[\Phi_h^\gamma]$. При цьому завжди виконуватиметься рівність*

$$F[f * \varphi](\cdot) = F[f](\cdot) F[\varphi](\cdot) \qquad (\forall f \in \mathfrak{F}_h \ \forall \varphi \in \Phi_h^\gamma).$$

3.1.3 Простори $\overset{\circ}{\Phi}$ і $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Нехай γ — фіксоване число з множини $(1; +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, ν — фіксоване число з множини $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots\right\}$, $p_0 := 2\nu + 1$, $\gamma_0 := 1 + [\gamma] + p_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Символом Φ позначимо простір, елементами якого, за означенням, є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції φ, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq \frac{c_k}{(1 + |x|)^{\gamma_0 + k}}, \ c_k > 0, \ x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

У Φ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} |D_x^k \varphi(x)|, \ \varphi \in \Phi, \ p \in \mathbb{Z}_+,$$

при цьому вказаний простір є повним досконалим простором.

Збіжність послідовності $\{\varphi_j, j \geq 1\} \subset \Phi$ у просторі Φ до функції $\varphi \in \Phi$ можна охарактеризувати таким чином: $\{\varphi_j, j \geq 1\} \subset \Phi$ збігається за топологією простору Φ до функції $\varphi \in \Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall j \geq 1 \ : \ \|\varphi_j\|_p \leq c;$$

2) правильно збігається в Φ на $\mathbb{R}$.

У просторі Φ визначені й неперервні операції зсуву аргументу та диференціювання.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи — основними функціями.

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена і неперервна операція узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \cdot \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega, \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1) / (\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. За допомогою оператора T_x^ξ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначається згортка двох функцій:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \ \{\varphi,\psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi}.$$

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція перетворення Бесселя F_{B_ν}:

$$F_{B_\nu}[\varphi](x) := \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя, а $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, – оператор Бесселя. При цьому $F_{B_\nu}[\varphi]$ — парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція. У просторі $\overset{\circ}{\Psi} := F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{\Phi}\right]$ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм:

$$\|\psi\|_p := \sup_{x\in(0;\infty)}\left\{\sum_{s=0}^p x^{2s}|D_x^{2s}\psi(x)|\right\}, \ \psi \in \overset{\circ}{\Psi}, \ s \in \mathbb{Z}_+.$$

Перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому $F_{B_\nu}^{-1}$ визначається формулою

$$F_{B_\nu}^{-1}[\psi](\sigma) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx, \ \psi \in \overset{\circ}{\Psi}, \ c_\nu = \left(2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)\right)^{-1}.$$

Символом $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = < f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) > \equiv < f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) >, \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де f_ξ позначає дію функціоналу f за змінною ξ; при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною функцією.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$< F_{B_\nu}[f], \varphi > = < f, F_{B_\nu}^{-1}[\varphi] >, \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_{B_\nu}[f]$ над простором $\overset{\circ}{\Psi}$.

Узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ називається *згортувачем* у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ та із співвідношення $\varphi_n \to 0$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає збіжність $f * \varphi_n \to 0$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Для перетворення Бесселя узагальнених функцій з простору $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ правильним є таке твердження [81]: *якщо узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ справджується формула $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi]$.*

Клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначимо символом $\left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$.

3.1.4 Окремі теореми про властивості елементів деяких просторів типу S та їх узагальнень. Нехай $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ – відповідні простори типу W Гуревича нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, побудовані за опуклими функціями Ω і M з п. 3.1.1 (при $n = 1$) [79].

У праці [82] доведено, що $W_M^\Omega = W_M \bigcap W^\Omega$ і простір W_M^Ω є нетривіальним тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\exists C_0 > 0 \ \exists d > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+ : \ \Omega(x) \geq C_0 M(dx) \qquad (3.5).$$

Надалі тут розглядатимемо функції Ω і M, які задовольняють умови (3.5) і

$$\exists \tilde{C}_0 > 0 \ \exists v > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+ : \Omega(x) \leq \tilde{C}_0 e^{vx}.$$

Правильне твердження.

Теорема 3.14. *Якщо ціла функція задовольняє умови:*

$$\exists C_1 > 0 \ \exists b > 0 \forall z \in \mathbb{C} : \ |\varphi(z)| \leq C_1 e^{\Omega(b|z|)};$$

$$\exists C_2 > 0 \ \exists a > 0 \forall x \in \mathbb{R} : \ |\varphi(x)| \leq C_2 e^{\pm M(ax)},$$

то існує область $G \equiv \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \ \middle| \ |y| \leq L \dfrac{M(a|x|+1)}{\Omega'(b|x|+1)}, \ L > 0 \right\}$, *в якій виконується нерівність*

$$|f(z)| \leq C_3 e^{\pm M(\tilde{a}x)}, \ C_3 \geq \max\{C_1, C_2\},$$

причому сталу $\tilde{a}$ $(0 < \tilde{a} < a)$ *можна вибрати як завгодно близькою до* a.

Зауваження 3.2. Отже, для елементів та мультиплікаторів простору W_M^{Ω} існує область зазначеного вигляду, на яку поширюються оцінки функції з дійсної осі.

Зауваження 3.3. Якщо $M(x) = x^h$, $\Omega(x) = x^p$, $x \geq 0$, $1 < h \leq p$, то отримані результати збігаються з наведеними у [78].

Правильне й обернене твердження

Теорема 3.15. *Якщо ціла функція задовольняє умови:*

$$\exists C_1 > 0 \ \exists b > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq C_1 e^{\Omega(b|z|)};$$

$$\exists C_2 > 0 \ \exists a > 0 \forall z \in G : |\varphi(z)| \leq C_2 e^{\pm M(ax)},$$

де $G \equiv \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \ \middle| \ |y| \leq L \dfrac{M(a|x|+1)}{\Omega'(b|x|+1)}, \ L > 0 \right\}$, *тоді* $\varphi \in W_M^{\Omega_0}$ *(*φ *є мультиплікатором простору* $W_M^{\Omega_0}$*), де*

$$\exists \gamma_1 > 0 \ \exists \gamma_2 > 0 \ \forall x \geq x_0 > 0 : \ \Omega(\gamma_1 x) \leq \Omega_0(\gamma_2 x).$$

Далі розглянемо простори $S_{\alpha,+}^{\beta,+}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 1$, зі стандартною топологією, означені в [82]. Простір усіх антилінійних неперервних функціоналів, визначених на $S_{\alpha,+}^{\beta,+}$ із слабкою збіжністю позначимо символом $(S_{\alpha,+}^{\beta,+})'$.

Як і для просторів S_{α}^{β} встановлюється твердження.

Теорема 3.16. *Для функції $\varphi \in S_{\alpha,+}^{\beta,+}$, $1/2 \leq \beta < 1$, $\alpha \geq 1/2$, наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists C > 0\ \exists a > 0\ \exists b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}_+ : |\varphi(z)| \leq Ce^{-ax^{1/(2\alpha)}+by^{1/(2-2\beta)}}$;

2) $\exists C_1 > 0\ \exists a_1 > 0\ \exists B_1 > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \geq 0 : |\varphi^n(x)| \leq C_1 n^{(2\beta-1)n} B_1^n e^{-a_1 x^{1/(2\alpha)}}$.

Для узагальненої функції $f \in (S_{\beta,+}^{\beta,+})'$, $\beta \geq 1/2$, побудуємо формальний ряд Фур'є-Лагерра $f = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k(f) l_k$, де $c_k(f) =< f, l_k >$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Перетворенням типу $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ ряду Фур'є-Лагерра узагальненої функції f назвемо перетворення вигляду $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k c_k(f) l_k$, а функцію $f_\Lambda = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k l_k(x) l_k(y)$, $\{x, y\} \subset (0; +\infty)$, – ядром цього перетворення.

Зокрема, якщо $\Lambda_{t,\gamma} = \{e^{-t(4k+1)^\gamma},\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $t > 0$, $\gamma > 0$ – фіксовані параметри, то маємо перетворення типу Гаусса-Вейєрштрасса. Використовуючи теорему 3.25 і оцінки многочленів Лагерра, можна уточнити вигляд і оцінки ядер типу Гаусса-Вейєрштрасса [82].

Теорема 3.17. *Для $f \in (S_{\beta,+}^{\beta,+})'$ ($\beta = 1/2$ при $\gamma \geq 1$; $\beta = 1/(2\gamma)$ при $0 < \gamma < 1$):*

1) $f_{\Lambda_{t,\gamma,x}} \in (S_{\beta,+}^{\beta,+})$, *причому*

$$|D_y^n f_{\Lambda_{t,\gamma,x}}(y)| \leq C_0 C_t e^{-(y/4)th(t/2)}((5/8)cth(t/2))^n,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $C_0 > 1$, $C_t = \max\{e\pi^{-1/2}; (\pi(e^{2t}-1))^{-1/4}\}(e^{3t}-1)^{-1}e^{5t/2}$, *для* $\gamma > 1$;

2) $f_{\Lambda_{t,1,x}}(y) = (2\pi sh(2t))^{-1/2} e^{(-1/2)(x+y)cth(2t)} cos((sh(2t)^{-1/2})\sqrt{xy}) \in S_{1/2,+}^{1/2,+}$, *причому*

$$|D_y^n f_{\Lambda_{t,1,x}}(y)| \leq C_0 C_{t,x,\varepsilon} e^{-(y/2)cth(t/2)}((1/4)(\varepsilon+2)cth(t/2))^n,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $C_0 > 1$, $C_{t,x,\varepsilon} = (2\pi sh(2t))^{-1/2} e^{(-x^2/2)cth(2t)} e^{x^2/(\varepsilon sh(4t))}$, $\varepsilon > 0$.

3.2 Множини гладких розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем

3.2.1 Параболічні псевдодиференціальні системи з точково-негладкими символами

а) Постановка задачі. Нехай m – фіксований елемент множини $\mathbb{N}$, Φ – деякий простір основних функцій, а Φ' – відповідний, топологічно спряжений простір. Через $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}'$ позначимо декартові степені з показником m просторів Φ і Φ' з покомпонентною збіжністю відповідно в Φ та Φ'; через $\mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$ – множину всіх квадратних матриць порядку m, стовпцями яких є елементи $\mathbf{\Phi}$ (також з поелементною збіжністю в просторі Φ). Говоритимемо, що узагальнена функція $f := (f_1; \ldots; f_m)$ з $\mathbf{\Phi}'$ *згортувач* у просторі $\mathbf{\Phi}$, якщо:

1) $\forall p \in \mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$: $(f * p)(\cdot) := \left(\sum\limits_{j=1}^{m} \langle f_j(\xi), p_{ij}(\cdot - \xi) \rangle \right)_{i=1}^{m} \in \mathbf{\Phi}$;

2) $\forall \{p; p_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$, $p_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{\mathrm{P}(\mathbf{\Phi})} p$: $f * p_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{\mathbf{\Phi}} f * p$.

Нехай далі $\Lambda([0;T])$ – сукупність усіх функцій a_α: $[0;T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, таких, що:

1)$\forall t \in [0;T]$ $\forall s \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $a_\alpha(t, sx) = s^\alpha a_\alpha(t, x)$;

2) $a_\alpha(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $t \in [0;T]$;

3) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists c_k > 0$ $\forall t \in [0;T]$ $\forall x \in M(k)$: $|D_x^k a_\alpha(t, x)| \leq c_k \|x\|^{\alpha - |k|_*}$, де $M(k) := \begin{cases} \mathbb{R}^n, & |k|_* = 0, \\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, & |k|_* \neq 0, \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

За функцією a_α з класу $\Lambda([0;T])$ побудуємо оператор $A_{a_\alpha,h}$, який при кожному фіксованому $t \in [0;T]$ діє з простору Φ_h^γ в $(\Phi_h^\gamma)'$ згідно з правилом

$$(A_{a_\alpha,h}\varphi)(t, \cdot) = F^{-1}[a_\alpha(t, \xi - h)F[\varphi]](t, \cdot), \quad \varphi \in \Phi_h^\gamma,$$

де h – фіксований елемент $\mathbb{R}^n$. Зазначимо, що згідно з теоремою 3.21 та властивостями елементів класу $\Lambda([0;T])$, таке означення $A_{a_\alpha,h}$ у просторі Φ_h^γ є коректним.

Якщо $a_\alpha(t, \cdot) \equiv \| \cdot \|^\alpha$, то оператор $A_{a_\alpha,0}$ збігається з відомим оператором Рісса дробового диференціювання [84].

З означення $A_{a_\alpha,h}$ і твердження теореми 3.12 одержуємо, що для $\varphi \in \Phi_h^\gamma$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $t \in [0;T]$

$$|(A_{a_\alpha,h}\varphi)(t, x)| \leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |a_\alpha(t, \xi - h)| \, |F[\varphi](\xi)| d\xi \leq c_\varphi < +\infty$$

(тут c_φ не залежить від t та x).

Звідси приходимо до такого твердження.

Теорема 3.18. *Для ПДО $A_{a_\alpha,h}$ у просторі Φ_h^γ існує спряжений оператор $A^*_{a_\alpha,h}$ такий, що*

$$(A^*_{a_\alpha,h}f)(t,\cdot)=F[a_\alpha(t,\xi-h)F^{-1}[f](\xi)](t,\cdot),\ t\in[0;T],\ f\in\Phi_h^\gamma.$$

Позначимо тепер через $A_{\mathcal{A}_{t,h}}=(A_{a^{ij},h})_{i,j=1}^m$ – матричний ПДО в просторі $\mathbf{\Phi}_h^\gamma$ з параметром $t\in[0;T]$, побудований за матрицею–символом

$$\mathcal{A}_{t,h}(\cdot)=\left(a^{ij}(t,\cdot-h):=a_\alpha^{ij}(t,\cdot-h)+\sum_{l=1}^{g(i,j)}a^{ij}_{\alpha_l(i,j)}(t,\cdot-h)\right)_{i,j=1}^m,$$

де $g(i,j)\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $0<\alpha_1(i,j)\le\alpha_2(i,j)\le\dots\le\alpha_{g(i,j)}(i,j)<\alpha<+\infty$ – довільні фіксовані величини; a_α^{ij}, $a^{ij}_{\alpha_l(i,j)}$ – елементи класу $\Lambda([0;T])$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m$ і розглянемо систему

$$\partial_t u(t,x)=(A_{\mathcal{A}_{t,h}}u)(t,x),\quad (t,x)\in\Pi^n_{0,T},\tag{3.6}$$

в якій $u:=\mathrm{col}(u_1,\dots,u_m)$.

Подамо символ $\mathcal{A}_{t,h}$ матричного ПДО цієї системи у вигляді $\mathcal{A}_{t,h}=\mathcal{A}^0_{t,h}+\mathcal{A}^1_{t,h}$, де $\mathcal{A}^0_{t,h}:=(a_\alpha^{ij}(t,\cdot-h))_{i,j=1}^m$. Вважатимемо, що для (3.6) виконуються такі умови:

A) $a^{ij}_{\alpha_l(i,j)}(\cdot,\xi)\in C([0;T])$, $l\in\mathbb{N}_{g(i,j)}$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m$, $\xi\in\mathbb{R}^n$;

B) $\forall\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m$ $\exists c\ge 0$ $\forall t\in[0;T]$ $\exists\eta\in(0;1)$ $\forall\varepsilon\in(0;\eta)$ $\exists\nu(\varepsilon)>0$, $\nu(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow}0$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$: $|a_\alpha^{ij}(t+\varepsilon,\xi)-a_\alpha^{ij}(t,\xi)|\le\nu(\varepsilon)(\|\xi\|^\alpha+c)$;

C) $\exists\delta_*>0$ $\forall t\in[0;T]$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$: $\max\limits_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\,\lambda_j(t,\xi)\le-\delta_*\|\xi\|^\alpha$,

де λ_j, $j\in\mathbb{N}_m$, – власні числа $\mathcal{A}^0_{t,h}$.

Покладемо $\gamma:=\min\limits_{\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m}\{\gamma(i,j)\}$, де $\gamma(i,j)=\alpha_1(i,j)$, якщо $g(i,j)\ne0$, і $\gamma(i,j)=\alpha$ при $g(i,j)=0$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m$.

б) ФМР та її властивості. Подіявши формально на (3.6) перетворенням Фур'є стосовно змінної x, одержимо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\partial_t v(t,\xi)=(\mathcal{A}_{t,h}v)(t,\xi),\quad (t,\xi)\in\Pi^n_{0,T},\tag{3.7}$$

де $v:=\mathrm{col}(v_1;\dots;v_m)$, а $\mathcal{A}_{t,h}$ – матричний символ оператора $A_{\mathcal{A}_{t,h}}$.

Нехай $\theta_h(t;\xi,\tau):=(\theta_h^{ij}(t;\xi,\tau))_{i,j=1}^m$ – матрицант системи (3.7), який у звичайному розумінні задовольняє початкову умову

$$\theta_h(t;\xi,\tau)|_{t=\tau}=E,\ 0\le\tau<t\le T,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

(тут E – одинична матриця).

Зроблені припущення на елементи матриці $\mathcal{A}_{t,h}$ забезпечують існування такого матричного розв'язку, причому будь-який інший розв'язок системи (3.7) має вигляд $v = \theta_h c$, де c – довільна матриця-стовпець з елементами, залежними лише від ξ.

Правильні такі допоміжні твердження, які відіграють важливу роль при оцінюванні похідних від ФМР системи (1.4).

Лема 3.6. *Існують додатні сталі c і δ такі, що для всіх $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$|\theta(t; \xi, \tau)| \le c \exp\{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^{\alpha}\}.$$

Лема 3.7. *Матрицант θ системи (3.7) при $h = 0$ нескінченно диференційовний за просторовою змінною на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причому*

$$\exists \delta > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\} \ \exists c_k > 0 \ \forall \tau \in [0; T) \ \forall t \in (\tau; T] \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\forall t_0 \in (0; T] : \quad |D_\zeta^k \theta(t; t_0^{-\frac{1}{\alpha}}\zeta, \tau)| \le c_k \|\zeta\|^{-|k|_*} \left(\sum_{l=1}^{|k|_*} ((t-\tau) t_0^{-\frac{\hat{\gamma}}{\alpha}} \|\zeta\|^{\hat{\gamma}})^l \right)$$

$$\times \exp\{-\delta(t-\tau) t_0^{-1} \|\zeta\|^{\alpha}\},$$

де $\hat{\gamma} := \begin{cases} \alpha, & \|\zeta\| \ge 1, \\ \gamma, & \|\zeta\| < 1. \end{cases}$

Лема 3.8. *Нехай*

$$P_r(t; \cdot, \tau) := \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \dots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^{r} \mathcal{A}_{t_j}(\cdot) \right) dt_r \dots dt_2 dt_1,$$

а $H_r(t; \cdot, \tau)$ – така матриця, що

$$\theta(t; \cdot, \tau) = E + \sum_{j=1}^{r-1} P_j(t; \cdot, \tau) + H_r(t; \cdot, \tau).$$

Тоді для всіх $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\zeta \in M(k)$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$

$$|D_\zeta^k H_r(t; t_0^{-\frac{1}{\alpha}}\zeta, \tau)| \le c\|\zeta\|^{r\hat{\gamma} - |k|_*} e^{B t_0^{\breve{\alpha}} \|\zeta\|^{\hat{\gamma}}} (t_0^{\breve{\alpha}} B)^r / r!, \ t_0 := t - \tau,$$

де $\breve{\alpha} = \begin{cases} 0, \ t_0 \in (0; 1), \\ 1 - \gamma/\alpha, \ t_0 \ge 1 \end{cases}$, *а величини c і B не залежать від t, ζ і τ.*

Зазначені твердження дозволяють розвинути ідею А.Н.Кочубея дослідження параметрикса ПДР з точково-негладкими символами, і *розв'язати* *відому проблему*, пов'язану із оцінюванням ФМР задачі Коші для параболічних ПДС із негладкими в нулі символами, порядок однорідності головного матричного символу яких є меншим за одиницю.

Теорема 3.19. *Нехай $G_h(t;x,\tau) := F^{-1}[\theta_h](t;x,\tau)$, $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді для всіх $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$*

$$|D_x^\nu G_h(t;x,\tau)| \le c_1 t_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} (t_0^{\frac{1}{\alpha}} + \|x\|)^{-(n+\gamma)} ((t_0^{\frac{1}{\alpha}} + \|x\|)^{-1} + \|h\|)^{|\nu|_*};$$

$$|\partial_t D_x^\nu G_h(t;x,\tau)| \le c_2 t_0^{\frac{\gamma-\gamma^*}{\alpha}} (t_0^{\frac{1}{\alpha}} + \|x\|)^{-(n+\gamma)} ((t_0^{\frac{1}{\alpha}} + \|x\|)^{-1} + \|h\|)^{|\nu|_*},$$

де c_1, c_2 – додатні величини, незалежні від t, τ і x; $t_0 = t - \tau$, $\gamma^* = \begin{cases} \alpha, & t_0 \in (0;1), \\ \gamma, & t_0 \ge 1. \end{cases}$

Наслідок 3.2. *При кожному фіксованому $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, матрична функція $G_h(t;\cdot,\tau)$ належить до класу $\mathrm{P}(\mathbf{\Phi}_h^\gamma)$.*

Властивості ФМР $G_h(t;x,\tau)$ стосовно змінної t характеризують наступні твердження.

Лема 3.9. *Кожен елемент матриці $G_h(t;x,\tau)$ сильно диференційовний за $t \in (\tau;T]$ у просторі Φ_h^γ.*

Наслідок 3.3. *Для кожного f з $\mathfrak{F}_h$, $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$ функції $(f * G_h^{ij})(t;\cdot,\tau)$ диференційовні за t у звичайному розумінні (тут G_h^{ij} – елементи матриці G_h).*

Лема 3.10. *Матрична функція $G_h(t;\cdot,\tau)$ прямує до $\delta(\cdot)E$ при $t \to \tau + 0$ у просторі $\mathrm{P}((\mathbf{\Phi}_h^\gamma)')$, де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.*

в) Задача Коші та принцип локалізації. Твердження леми 3.10 підказує, що звичайні розв'язки ПДС (3.6) можуть у точці $t = 0$ мати, взагалі кажучи, узагальнені граничні значення. З огляду на це задамо для цієї системи початкову умову так:

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (\mathbf{\Phi}_h^\gamma)'. \tag{3.8}$$

Означення 3.4. Розв'язком задачі Коші (3.6), (3.8) називатимемо таку вектор-функцію u, яка диференційовна за t на $(0;T]$, при кожному фіксованому t з $(0;T]$ належить до області визначення матричного оператора $A_{\mathcal{A}_{t,h}}$, задовольняє систему (3.6) у звичайному розумінні, а початкову умову (3.8) – у сенсі слабкої збіжності в $(\mathbf{\Phi}_h^\gamma)'$.

Коректну розв'язність задачі Коші (3.6), (3.8) характеризує наступне твердження.

Теорема 3.20. *Задача Коші (3.6), (3.8) коректно розв'язна для узагальнених початкових вектор-функцій з класу ${\mathfrak{F}_h}^m$ (тут $\mathfrak{F}_h^m$ – відповідний* *декартовий степінь* $\mathfrak{F}_h$, *a* $\mathfrak{F}_h$ *– сукупність усіх згортувачів у* Φ_h^γ*). Її розв'язок зображується формулою*

$$u(t,x) = (f * G_h)(t;x,0),\ (t,x) \in \Pi_{0,T}^n,$$

при цьому $u(t,\cdot) \in \mathbf{\Phi}_h^\gamma$ *для кожного* $t \in (0;T]$.

Слід зазначити, що розв'язок задачі Коші (3.6), (3.8) при $t \to +0$ прямує до узагальненої функції f у слабкому розумінні збіжності. Однак може трапитися, що f збігається на деякій частині $\mathbb{R}^n$ з гладкою вектор-функцією. Виникає запитання, чи буде в цьому випадку відбуватися локальне підсилення збіжності вказаного розв'язку?

Відповідь на це запитання дає наступна

Теорема 3.21 (принцип локалізації). *Нехай* $f \in {\mathfrak{F}_h}^m$, *u – розв'язок задачі Коші (3.6), (3.8), побудований за* f. *Тоді якщо узагальнена вектор-функція* f *збігається в деякій області* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *з неперервною вектор-функцією* g, *то* $u(t,x) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} g(x)$ *рівномірно щодо* x *на кожному компакті* $\mathbb{K} \subset Q$.

3.2.2 Псевдодиференціальні системи з гладкими на $\mathbb{R}^n$ символами.

а) Опис класу $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}$. **Постановка задачі.** Нехай $M(\cdot)$ і $\Omega(\cdot)$ – опуклі вниз вектор-функції, які є двоїстими за Юнгом, а $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ – числова послідовність (що означені в п. 3.1.1). Говоритимемо, що для послідовності $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ виконується *умова* **B**, якщо для неї виконуються умови 1)–3) з описання умови **A** (див. п. 3.1.1) і

$$\forall \nu \in \mathbb{N}_n\, \exists c_\nu > 0\ \forall \{k_\nu; m_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+ :\ \gamma_{\nu,k_\nu}\gamma_{\nu,m_\nu} \le c_\nu \gamma_{\nu,(k_\nu+m_\nu)},$$

де $\gamma_k := \left(\dfrac{\alpha_{1,k_1}}{k_1!};\ldots;\dfrac{\alpha_{n,k_n}}{k_n!}\right)$. **Прикладом** такої послідовності є послідовність із загальним членом $\alpha_k = (k_1^{\beta_1 k_1},\ldots,k_n^{\beta_n k_n})$, $\beta_\nu \ge 1$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}_n$. Зазначимо також, що кожна послідовність, для якої виконується умова **B** є узгодженою з $\{k!,\ k \in \mathbb{Z}_+^n\}$.

За вектор-функцією $\Omega(\cdot)$ і послідовністю $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ побудуємо клас $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}(L)$, який складається з усіх тих елементів $a(\cdot,\cdot)$: $L \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що:

1) $a(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $t \in L$;

2) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall t \in L$: $D_x^k a(t+\tau,x) \underset{\tau\to 0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} D_x^k a(t,x)$ для кожного компакта $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}^n$;

3) $\exists c>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall t\in L\ \forall x\in\mathbb{R}^n$: $|D_x^k a(t,x)|\le c|A(k,x)|$, причому вираз $A(k,\cdot)$ такий, що для всіх δ, $0<\delta\ll 1$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|A(k,x)|e^{-\delta(\overrightarrow{1},\Omega(x))}\}\le c_0 B^{|k|_*}\delta^{-\tau}\,\widehat{\alpha_k}\,,$$

де c_0, B — додатні сталі, які не залежать від k і δ;

4) $\exists c\ge 0\ \forall t\in L\ \exists\eta\in(0;1)\ \forall\varepsilon\in(0;\eta)\ \exists\nu(\varepsilon)>0,\ \nu(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n:$

$$|a(t+\varepsilon,x)-a(t,x)|\le\nu(\varepsilon)(|A(0,x)|+c).$$

Клас $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0;T])$ замкнений відносно операцій віднімання, додавання та множення на неперервну функцію $b(t)$, $t\in[0,T]$. Більше того, якщо $\widehat{\alpha}_k\le\alpha_k$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$, а опуклі вектор-функції $\widehat{\Omega}(\cdot)$ і $\Omega(\cdot)$ такі, що $\widehat{\Omega}_j(\cdot)\le\Omega_j(\cdot)$, $j\in\mathbb{N}_n$, то $\mathfrak{L}_{\widehat{\Omega}}^{\{\widehat{\alpha}_k\}}([0;T])\subset\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0;T])$.

Розглянемо систему

$$\partial_t u(t,x)=(A_{\mathcal{A}_t}u)(t,x),(t,x)\in\Pi_{0,T}^n,\tag{3.9}$$

де $u:=\mathrm{col}(u_1;\ldots;u_m)$, а $A_{\mathcal{A}_t}=(A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ – матричний ПДО з параметром $t\in[0;T]$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t(\cdot):=(a_{ij}(t,\cdot))_{i,j=1}^m$, кожен елемент якої належить до класу $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0;T])$. Припускатимемо, що для (3.9) виконується аналог рівномірної умови параболічності:

$$\exists\delta^*>0\exists c^*\in\mathbb{R}\,\forall t\in[0;T]\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n:\max_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi)\le-\delta^*(\overrightarrow{1},\Omega(\xi))+c^*,\tag{3.10}$$

де λ_j, $j\in\mathbb{N}_m$, – власні числа матриці $\mathcal{A}_t$ – символу оператора $A_{\mathcal{A}_t}$.

б) Достатні умови коректної розв'язності задачі Коші. Знайдемо ФМР $G_t(\cdot)$, $t\in(0;T]$, системи (3.9) і дослідимо її властивості. Для цього подіємо формально на (3.9) перетворенням Фур'є стосовно змінної x. Одержимо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\partial_t V(t,\xi)=(\mathcal{A}_t V)(t,\xi),\quad (t,\xi)\in\Pi_{0,T}^n,\ V:=\mathrm{col}(v_1;\ldots;v_m).\tag{3.11}$$

Нехай $\theta(t;\xi,\tau):=(\theta^{ij}(t;\xi,\tau))_{i,j=1}^m$ – матрицант системи (3.11).

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 3.11. *Існують додатні сталі c і δ такі, що для всіх $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$ $|\theta(t;\xi,\tau)|\le c\exp\{-(t-\tau)\delta(\overrightarrow{1},\Omega(\xi))\}$.*

Наступне твердження характеризує матрицант θ стосовно просторової змінної, як елемент класу $\mathrm{P}(\mathbf{W}_\Omega^{\{\alpha_k\}})$.

Лема 3.12. *Нехай послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* $\mathbf{B}$. *Тоді матрицант* θ *системи (3.11) є нескінченно диференційовним за просторовою змінною на* $\mathbb{R}^n$, *причому*

$$\exists \{c, \delta, B\} \subset (0; +\infty)\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}\ \forall \tau \in [0; T)\ \forall t \in (\tau; T]\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau)| \le c B^{|k|_*} \widehat{\alpha_k} e^{-(t-\tau)\delta(\overrightarrow{1}, \Omega(\xi))}.$$

Наслідок 3.4. *Нехай послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* $\mathbf{B}$. *Тоді ФМР* $G_t(\cdot) := F^{-1}[\theta(t; \sigma, 0)](t, \cdot) \in \mathrm{P}\Big(\mathbf{W}_{\{\alpha_k\}}^M\Big)$, $t \in (0; T]$.

Далі, нехай W_Ω – відповідний простір типу W Гуревича [79], $\Phi \in \{W_\Omega; W_\Omega^{\{\beta_k\}}, \beta_k \ge \alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, а послідовності $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ і $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ такі, що для них виконується умова $\mathbf{B}$.

Наступні допоміжні твердження характеризують властивості $\theta_t(\cdot)$ за змінною t, де $\theta_t(\cdot) := \theta(t; \cdot, 0)$.

Лема 3.13. *Кожен елемент матрицанта* $\theta_t(\cdot)$ *сильно диференційовний за* $t \in (0; T]$ *у просторі* Φ.

Наслідок 3.5. $F^{-1}[\partial_t \theta_t(\cdot)] = \partial_t F^{-1}[\theta_t(\cdot)], \quad t \in (0; T]$.

Лема 3.14. $\theta_t \varphi \xrightarrow[t \to +0]{\mathbf{\Phi}} \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{\Phi}$.

З огляду на твердження леми 3.14 підказує, початкову умову для (3.9) задамо так:

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = f,\ f \in \tilde{\mathbf{\Phi}}', \tag{3.12}$$

де $\tilde{\Phi} := \{F^{-1}[\varphi](\cdot), \varphi \in \Phi\}$.

Наступне твердження характеризує розв'язність задачі Коші (3.9), (3.12).

Теорема 3.22. *Нехай елементи матричного символу* $\mathcal{A}_t$ *системи (3.9) належать до класу* $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0; T])$, $M(\cdot)$ *– вектор-функція, разом з якою* $\Omega(\cdot)$ *є взаємно двоїстими за Юнгом;* $\tilde{\mathbf{\Phi}} \in \{\mathbf{W}^M; \mathbf{W}_{\{\beta_k\}}^M, \beta_k \ge \alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *– послідовність, для якої виконується умова* $\mathbf{B}$. *Тоді якщо елемент* $f \in \widetilde{\mathbf{\Phi}}'$ *– такий, що* $F[f]$ *– мультиплікатор у просторі* $\mathbf{\Phi}$, *то задача Коші (3.9), (3.12) коректно розв'язна, причому для всіх* t *з* $(0; T]$: *1)* $u(t, \cdot) \in \widetilde{\mathbf{\Phi}}$; *2)* $F[\partial_t u(t, \cdot)] = \partial_t (F[u(t, \cdot)])$; *3)* $u(t, \cdot) = G_t(\cdot) * f$.

в) Критерій мультиплікатора та необхідні умови коректної розв'язності задачі Коші. При деяких додаткових припущеннях на систему (3.9) та вектор-функцію Ω сформульовані умови в теоремі 3.31 є не лише достатніми, але й необхідними для коректної роз'язності задачі Коші (3.9), (3.12). Опишемо ці припущення.

С: функції $\Omega_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, окрім раніше описаних властивостей, мають ще й таку:

$$\Omega_j(\delta x) \geq \widehat{f}_{1j}(\delta)\Omega_j(x) + \widehat{f}_{2j}(\delta), \delta \in (0;1), x \in \mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_{1j}(\cdot)$, $\widehat{f}_{2j}(\cdot)$ – довільні функції, обмежені на $(0;1)$, причому $\widehat{f}_{1j}(\cdot) > 0$.

Д: система (3.9) задовольняє не лише умову (3.10), а є такою, що

$$\exists \delta_0^* > 0 \, \exists c_0^* \in \mathbb{R} \, \forall t \in [0;T] \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \min_{j \in \mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi) \geq -\delta_0^*(\overrightarrow{1}, \Omega(\xi)) + c_0^*,$$

де λ_j, $j \in \mathbb{N}_m$, – власні числа матричного символу $\mathcal{A}_t$.

Правильні такі допоміжні твердження.

Лема 3.15. *Нехай для системи (3.9) виконується припущення* **Д***; послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* **В***, а* $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ *– обернена матриця до матриціанта* $\theta(t;\cdot,\tau)$ *системи (3.11) при* $\tau \in [0;t)$, $t \in (0;T]$. *Тоді* $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ *нескінченно диференційовна за просторовою змінною на* $\mathbb{R}^n$, *причому*

$$\exists \{c, \delta, B\} \subset (0;+\infty) \; \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \; \forall t \in (0;T] \; \forall \tau \in [0;t) \; \forall \xi \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_\xi^k \theta^{-1}(t;\xi,\tau)| \leq cB^{|k|_*}\widehat{\alpha}_k e^{(t-\tau)\delta(\overrightarrow{1}, \Omega(\xi))}.$$

Лема 3.16. *Нехай виконуються припущення* **С** *і* **Д**, $\Phi \in \{W_\Omega; W_\Omega^{\{\beta_k\}}, \beta_k \geq \alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, *а послідовність* $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* **В**. *Тоді для кожного елемента* $P(\cdot) \in \mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$ *існує* $t_0 \in (0;1)$ *таке, що для всіх* $t \in (0;t_0)$ *добуток* $P(\cdot)\theta_t^{-1}(\cdot)$ *належить до* $\mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$ *(тут* $\theta_t^{-1}(\cdot) := \theta^{-1}(t;\cdot,0)$*).*

Наступне твердження характеризує мультиплікатори в просторах, що є середовищем дослідження задачі Коші для системи (3.9).

Теорема 3.23 (критерій мультиплікатора). *Якщо виконуються всі умови з леми 3.16, то для того щоб* $\mu(\cdot) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *була мультиплікатором у* $\mathbf{\Phi}$, *необхідно й достатньо, щоб*

$$\forall 0 < \delta \ll 1 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \, \exists c_{\delta,k} > 0 \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |D_\xi^k \mu(\xi)| \leq c_{\delta,k} e^{\delta(\overrightarrow{1}, \Omega(\xi))}, \qquad (3.13)$$

причому $c_{\delta,k} := c_\delta B_\delta^{|k|_*}\widehat{\beta}_k$ *у випадку* $\Phi = W_\Omega^{\{\beta_k\}}$, *де* c_δ *і* B_δ *– додатні сталі, залежні лише від* δ.

Правильне таке твердження.

Теорема 3.24. *Нехай виконуються всі умови з леми 3.16 і* $a \in \mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0;T])$. *Тоді при кожному фіксованому* $t \in [0;T]$ *функція* $a(t,\cdot)$ *є мультиплікатором у просторі* Φ.

Отже, якщо символ $a(\cdot,\cdot)$ належить до класу $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0;T])$, то при кожному фіксованому $t \in [0;T]$:

1) ПДО A_a неперервно відображає простір $\widetilde{\Phi}$ в себе;

2) перетворення Фур'є символу $a(t,\cdot)$ (тобто $\widetilde{a}(t,\cdot)$) є згортувачем у $\widetilde{\Phi}$;

3) $A_a f = \widetilde{a} * f$, $f \in \widetilde{\Phi}$.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3.25. *Нехай виконуються припущення* **С** *і* **Д**, *елементи матриці $\mathcal{A}_t$ належать до класу $\mathfrak{L}_\Omega^{\{\alpha_k\}}([0;T])$; вектор-функції $M(\cdot)$ і $\Omega(\cdot)$ – взаємно двоїсті за Юнгом, а послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* **В**. *Тоді для того щоб задача Коші (3.9), (3.12) була коректно розв'язною в просторі $\tilde{\mathbf{\Phi}} \in \{\mathbf{W}^M; \mathbf{W}^M_{\{\beta_k\}}, \beta_k \geq \alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ і виконувалась умова $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t \in (0;T]$, необхідно й достатньо, щоб $F[f]$ був мультиплікатором у* $\mathbf{\Phi}$. *При цьому завжди $u(t,x) = G_t(x) * f$, $(t,x) \in \Pi^n_{0,T}$.*

Наслідок 3.6. *Сукупність усіх згортувачів у просторі $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$, де $\tilde{\Phi} \in \{W^M; W^M_{\{\beta_k\}}, \beta_k \geq \alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, тобто таких узагальнених вектор-функцій з $\mathbf{\Phi}'$, для перетворення Фур'є яких виконуються відповідні оцінки (3.13), є* *<u>максимальним</u> класом початкових даних, з якими відповідна задача Коші для системи (3.9) коректно розв'язна, причому компоненти її розв'язку мають такі самі властивості за просторовою змінною, що й елементи ФМР цієї системи (в рамках просторів W^M і $W^M_{\{\gamma_k\}}$).*

г) Приклади.

1^0. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t,x) = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\gamma} (B_a^\tau u_1)(t,x) d\tau - b(t) u_2(t,x), \\ \partial_t u_2(t,x) = b(t) u_1(t,x) - \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\gamma} (B_a^\tau u_2)(t,x) d\tau, \ (t,x) \in \Pi^1_{0,T}, \end{cases} \tag{3.14}$$

де $\gamma > 0$, $a > 1$, $B_a^\tau = (aE - \partial_x^2)^{\tau/2}$ – оператор Бесселя дробового інтегро-диференціювання з параметром a, а $b(\cdot)$ –неперервна функція на $[0;T]$.

За умови, що $u := col(u_1, u_2) \in \mathbf{S}$, ця система еквівалентна системі (3.9) з матричним символом

$$\mathcal{A}_t(\xi) = \begin{pmatrix} -\frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)} & -b(t) \\ b(t) & -\frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)} \end{pmatrix}.$$

Для власних чисел λ_j матриці $\mathcal{A}_t$ очевидне виконання таких рівностей:

$$\mathrm{Re}\lambda_1(t,\xi) = \mathrm{Re}\lambda_2(t,x) = -\frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)}, \quad (t,\xi) \in \Pi^1_{0,T}.$$

Узгодимо тепер $\gamma > 0$ і $a > 1$ так, щоб вираз $\dfrac{(a+(\cdot)^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+(\cdot)^2)}$ був опуклим вниз і покладемо $\Omega(\cdot) := \dfrac{(a+(\cdot)^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+(\cdot)^2)} - \dfrac{a^{\gamma/2}}{\ln a}$.

Оскільки для $k \in \mathbb{Z}_+$ і $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left| D_\xi^k \left(\frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)} \right) \right| \le k!(\ln a)^{-\nu(k)} (2^6(\gamma+2)e^2)^k \frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)},$$

а при $0 < \delta \le 1$

$$\frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)} e^{-\delta\Omega(\xi)} = \left(\Omega(\xi) + \frac{a^{\gamma/2}}{\ln a} \right) e^{-\delta\Omega(\xi)} \le \delta^{-1} \left(\sup_{y>0}\{ye^{-y}\} + \frac{a^{\gamma/2}}{\ln a} \right),$$

то поклавши $\alpha_k = k!$, $k \in \mathbb{Z}_+$, одержимо виконання умови 3) для елементів матриці $\mathcal{A}_t$ з опису класу $\mathfrak{L}_\Omega^{\{k!\}}([0;T])$ (щодо решти умов з цього опису, то виконання їх очевидне).

З огляду на те, що послідовність $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову **B** і виконуються припущення **C**, **Д**, врахувавши твердження теореми 3.25, одержуємо, що задача Коші (3.14), (3.12) буде коректно розв'язною з розв'язками в $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, де $\Phi \in \{W_\Omega; W_\Omega^{\{(k!)^\beta\}}, \beta \ge 1\}$, тоді і лише тоді, коли $F[f]$ – мультиплікатор у класі $\mathbf{\Phi}$.

2^0. Покладемо $n = 1$, $m = 2$ і розглянемо систему

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = -((aE - \partial_x^2)^{\alpha/2} - \partial_x)u_1 + ((bE - \partial_x^2)^{\alpha/2} - (aE - \partial_x^2)^{\alpha/2})u_2, \\ \partial_t u_2 = (i\cos(i\partial_x) - \partial_x)u_1 + (i\cos(i\partial_x) - (bE - \partial_x^2)^{\alpha/2})u_2, \end{cases} \tag{3.15}$$

де $\{a; b\} \subset (0; +\infty)$, $\alpha > 1$, а $\cos(i\partial_x) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} (-\partial_x^2)^r/(2r)!$ – формалізований оператор Поста з символом $\cos(\cdot)$, породжений виразом $i\partial_x$.

Якщо шукати розв'язки системи (3.15) лише в рамках просторів $\mathbf{S}^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, то можна переконатися, що ця система є системою (3.9) з матричним символом

$$\mathcal{A}_t(\xi) = \begin{pmatrix} -((a+\xi^2)^{\alpha/2} + i\xi) & (b+\xi^2)^{\alpha/2} - (a+\xi^2)^{\alpha/2} \\ i(\cos\xi + \xi) & i\cos\xi - (b+\xi^2)^{\alpha/2} \end{pmatrix}, \ \xi \in \mathbb{R}, t \in [0; T];$$

для власних чисел λ_j матриці $\mathcal{A}_t(\cdot)$ виконується умова

$$-(\max\{a; b\} + \xi^2)^{\alpha/2} \le \operatorname{Re}\lambda_j(t, \xi) \le -(\min\{a; b\} + \xi^2)^{\alpha/2}, j \in \mathbb{N}_2, \ (t, \xi) \in \Pi_{0,T}^1.$$

Очевидно, що для елементів метриці $\mathcal{A}_t(\cdot)$ виконуватимуться всі умови з описання класу $\mathfrak{L}_\Omega^{\{k!\}}([0;T])$, якщо $\Omega(\xi) = (\min\{a; b\} + \xi^2)^{\alpha/2} - (\min\{a; b\})^{\alpha/2}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Урахувавши тепер твердження теореми 3.25, одержуємо, що для того щоб розв'язок системи (3.15) при кожному фіксованому $t \in (0; T]$ належав до класу $\mathbf{\Phi}$, де $\Phi \in \{S^{1/\alpha}; S_{\beta}^{1/\alpha}, \beta \geq 1\}$, необхідно й достатньо, щоб його граничне значення при $t \to +0$ (у сенсі збіжності в $\mathbf{\Phi}'$) було згортувачем у $\mathbf{\Phi}$ (тут S^{α} і S_{β}^{α} – відповідні простори типу S Гельфанда і Шилова).

3.2.3 Багатоточкова задача для сингулярних еволюційних рівнянь. Нехай γ, ν, p_0, γ_0 і $M(\cdot)$ – величини із п. 3.1.3; $a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ, яка:

1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$;

2) похідні функції a задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists c_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |D_x^k a(x)| \leq c_k |x|^{\gamma - k};$$

3) $\exists \widetilde{\delta} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $a(x) \geq \widetilde{\delta} |x|^{\gamma}$.

Очевидно, що функція a є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$. За цією функцією побудуємо у $\overset{\circ}{\Phi}$ псевдо-Бесселевий оператор $A = F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}]$ і розглянемо з цим оператором рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0,\ (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+ \equiv (0; +\infty), \tag{3.16}$$

для якого задамо багатоточкову умову

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{3.17}$$

де $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)' \subset (\overset{\circ}{\Phi})'$, $\mu > \mu_1 > \ldots > \mu_m > 0$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \ldots < t_m = T$.

Означення 3.6. Задачу (3.16), (3.17) називатимемо багатоточковою задачею; під її розв'язком розумітимемо розв'язок рівняння (3.16), який задовольняє умову (3.17) в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, \cdot) - \ldots - \mu_m \lim_{t \to t_m - 0} u(t, \cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$.

При дослідженні задачі (3.16), (3.17) важливу роль відіграють функції

$$Q(t, \sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1},\ t \in (0, T],\ \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\Gamma(t, t_1, \ldots, t_m, x) \equiv \Gamma(t, x) := F_{B_\nu}^{-1}[Q(t, \sigma)](x),\ t \in (0, T],\ x \in \mathbb{R}.$$

Властивості функцій $Q(t,\sigma)$ та $\Gamma(t,x)$ характеризують наступні твердження.

Лема 3.17. *При фіксованому $t > 0$ функція $Q(t,\sigma)$ – нескінченно диференційовна по $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \gamma_s \varphi_s(t) e^{-ta(\sigma)} |\sigma|^\omega, \ s \in \mathbb{N}, \ \sigma \neq 0, \tag{3.18}$$

де $\gamma_s > 0$ — стала, не залежна від t, $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^{s} t^p$,

$$\omega = \begin{cases} s(\gamma - 1) & , |\sigma| \ge 1, \\ \gamma - s & , |\sigma| \le 1, \sigma \neq 0. \end{cases}$$

Із оцінок (3.18) випливає, що $Q(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, при кожному $t > 0$ є елементом простору $\overset{\circ}{\Psi}$. Тоді функція $\Gamma(t,x) = F_{B_\nu}^{-1}\left[Q(t,\sigma)\right](x)$, як функція x, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi} = F_{B_\nu}^{-1}\left[\overset{\circ}{\Psi}\right]$ (при кожному $t > 0$).

Лема 3.18. *Для функції Γ та її похідних правильними є оцінки*

$$|D_x^m \Gamma(t;x)| \le \alpha_m t^{-(\gamma_0 + m - [\gamma]/\gamma)} (1 + |x|)^{-(m+\gamma_0)}, \ t \in (0;T], \ x \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{Z}_+,$$

стала $\alpha_m > 0$ не залежить від t.

Теорема 3.26. *У просторі $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ справджуються граничні співвідношення:*

1) $\lim\limits_{t \to +0} \Gamma(t,\cdot) = \frac{\delta}{\mu - \mu_0}$, $\mu_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$;

2) $\mu \lim\limits_{t \to +0} \Gamma(t,\cdot) - \mu_1 \lim\limits_{t \to t_1} \Gamma(t,\cdot) - \ldots - \mu_m \lim\limits_{t \to t_m - 0} \Gamma(t,\cdot) = \delta(\cdot)$ (тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака).

Лема 3.19. *Нехай $\omega(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t;x)$, $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$. Тоді в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} \omega(t,\cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} \omega(t,\cdot) - \ldots - \mu_m \lim_{t \to t_m - 0} \omega(t,\cdot) = \varphi.$$

Теорема 3.27. *Функція $\Gamma(t,\cdot)$, $t \in (0;T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна по t, тобто граничне співвідношення*

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\Gamma(t + \Delta t, x) - \Gamma(t,x)\right] \to \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t;x), \ \Delta t \to 0,$$

виконується у розумінні збіжності у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Наслідок 3.7. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi * \Gamma)(t,\cdot) = \varphi * \frac{\partial \Gamma(t,\cdot)}{\partial t},\ \forall \varphi \in (\overset{\circ}{\Phi})',\ t \in (0,T].$$

Зазначимо також, що $\Gamma(t,x)$ задовольняє рівняння (3.16).

Коректна розв'язність задачі (3.16), (3.17) описується наступним твердженням.

Теорема 3.28. *Задача (3.16), (3.17) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. *Розв'язок подається у вигляді згортки:*

$$u(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x),\ \varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)',\ (t,x) \in (0;T] \times (0;+\infty).$$

Граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = (\varphi * \Gamma)(t,x) \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} (\varphi * \Gamma)(t_i,x) = u(t_i,\cdot),\ t_i \in (0,T],\ i \in \mathbb{N}_m,$$

справджуються у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, оскільки $\Gamma(t,\cdot) \longrightarrow \Gamma(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Зокрема, $u(t,\cdot) \longrightarrow u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $t_i \in (0,T]$, $i \in \mathbb{N}_m$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність у співвідношенні (3.17) істотно погіршує перший доданок; це пояснюється тим, що для функції $\Gamma(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою. Крім того

$$u(t,\cdot) = (\varphi * \Gamma)(t,x) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \varphi * \frac{\delta}{\mu-\mu_0} = \frac{\varphi}{\mu-\mu_0},\ \mu_0 = \sum_{k=1}^{m} \mu_k,$$

тобто вказане граничне співвідношення справджується у просторі $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$. Проте, при певних обмеженнях на граничну узагальнену функцію $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$, можна отримати локальне посилення збіжності згортки $(\varphi * \Gamma)(t,x)$ при $t \to +0$.

Теорема 3.29. *Нехай* $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)'$, $u(t,x)$ *розв'язок задачі (3.16), (3.17) з граничною функцією* φ. *Якщо* $\varphi = 0$ *на відкритій множині* $Q \subset \mathbb{R}$, *то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \ldots - \mu_m \lim_{t\to t_m-0} u(t,x) = 0$$

справджується рівномірно відносно x *на відрізку* $[a,b] \subset Q$.

Теорема 3.30. *Нехай* $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)'$, $u(t,x)$ – *відповідний розв'язок задачі (3.16), (3.17),* $Q \subset \mathbb{R}$ – *відкрита множина,* $[a,b] \subset Q$. *Якщо узагальнена* *функція* φ *збігається в* Q *з функцією* g*, яка є мультиплікатором у просторі* $\overset{\circ}{\Phi}$*, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \ldots - \mu_m \lim_{t\to t_m - 0} u(t,x) = g(x),$$

справджується у кожній точці відрізка $[a,b]$.

4 ПОБУДОВА ТА ОБҐРУНТУВАННЯ СХЕМ АПРОКСИМАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

У цьому розділі наведені результати дослідження схем апроксимації систем ДРР запізнюючого та нейтрального типів, а також системи диференціально-різницевого та різницевого рівняння з багатьма запізненнями.

Результати розділу належать І.М. Черевку, Л.А. Піддубній, О.В. Матвію, С.А. Пернай і опубліковані в [85-88, 91-92].

4.1 Апроксимація елемента запізнення в R^n

Розглянемо апроксимацію елемента запізненя для векторної вхідної функції $x(t) \in R^n$ та векторної аперіодичної ланки. Одержані результати будуть залежати від властивостей вхідної функції $x(t)$.

Будемо розглядати m елементів запізнення, що послідовно між собою з'єднані

$$y_1(t) = x(t - \frac{\tau}{m}),\ y_2(t) = x(t - \frac{2\tau}{m}), \ldots,\ y_m = x(t - \tau),\ x \in R^n,\ m, n \in N.$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду [89]

$$\begin{aligned} &\frac{\tau}{m}\frac{dz_1}{dt} + z_1 = x(t),\\ &\frac{\tau}{m}\frac{dz_j}{dt} + z_j = z_{j-1}(t),\ j = \overline{2, m},\ t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$z_j(t_0) = x(t_0 - \frac{j\tau}{m}),\ j = \overline{1, m}, \tag{4.2}$$

де $x(t)$ вхідна функція першого елемента запізнення, $T, \tau > 0$. Будемо досліджувати зв'язок між функціями $y_j(t)$ та $z_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ в залежності від гладкості вхідної функції $x(t)$.

Дослідимо точність апроксимації елемента запізнення у випадках, коли функція $x : [t_0 - \tau, T] \to R^n$ в системі (4.1)-(4.2) є тільки кусково-неперервною або неперервною, які охоплюють природні постановки задач для диференціально-різницевих рівнянь.

Нехай $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $z_j(t) = (z_{j1}(t), \ldots, z_{jn}(t))$, $j = \overline{1, m}$. Тоді система (4.1)-(4.2) в координатній формі має вигляд

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}}{dt} + z_{1i} = x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}}{dt} + z_{ji} = z_{j,i-1}(t),\ j = \overline{2,m},\ t \in [t_0, T], \tag{4.3}$$
$$z_{ji}(t_0) = x_i(t_0 - \frac{j\tau}{m}),\ j = \overline{1,m}, \tag{4.4}$$

де $i = \overline{1,n}$, $m \in N$, $\tau > 0$.

Продовжимо функцію $x_i(t)$ на інтервал $[-h+t_0-\tau, T+h],\ h > 0$, поклавши $x_i(t) = 0$ при $t \notin [t_0 - \tau, T]$.

Введемо до розгляду функції

$$x_{hi}(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} x_i(s)ds,\ i = \overline{1,n},$$

які є неперервними на $[t_0 - \tau, T]$.

Відомо, якщо $p \geq 1$ і $x(t) \in L_p[t_0 - \tau, T]$, то

$$\lim_{h \to 0}\int\limits_{t_0-\tau}^{T} |x_{hi}(t) - x_i(t)|^p dt = 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Позначимо $\alpha_{1i}(h) = \int\limits_{t_0-\tau}^{T} |x_{hi}(t) - x_i(t)|dt,\ i = \overline{1,n}$. Із співвідношення (4.5) випливає, що $\alpha_{1i}(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Представимо функцію $x_i(t)$ у вигляді $x_i(t) = x_{1i}(t) + x_{2i}(t)$, де $x_{1i}(t) = x_{hi}(t)$, $x_{2i}(t) = x_i(t) - x_{hi}(t)$.

Згідно з лінійністю системи (4.3)-(4.4) її розв'язок буде сумою функцій, які є розв'язками таких систем

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}}{dt} + z_{1i} = x_{1i}(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}}{dt} + z_{ji} = z_{j,i-1}(t),\ j = \overline{2,m},\ t \in [t_0, T],$$
$$z_{ji}(t_0) = x_i(t_0 - \frac{j\tau}{m}),\ j = \overline{1,m}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}}{dt} + z_{1i} = x_{2i}(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}}{dt} + z_{ji} = z_{j,i-1}(t),\ j = \overline{2,m},\ t \in [t_0, T],$$
$$z_{ji}(t_0) = 0,\ j = \overline{1,m}, \tag{4.7}$$

Оцінимо різниці $z_{ji}(t) - y_{ji}(t)$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$. Враховуючи представлення функції $x(t)$ у вигляді суми, маємо нерівність

$$\int_{t_0}^{T} |z_{ji}(t) - y_{ji}(t)|dt \leq \int_{t_0}^{T} (|z_{ji}{}^{(1)}(t) - y_{ji}{}^{(1)}(t)| + |y_{ji}{}^{(2)}(t)| + |z_{ji}{}^{(2)}(t)|)dt. \tag{4.8}$$

Оцінимо різниці $|z_{ji}{}^{(1)}(t) - y_{ji}{}^{(1)}(t)|$, оскільки функція $x_{hi}(t)$ є неперервною на $[t_0 - \tau, T]$.

Із рівності $y_{ji}{}^{(2)}(t) = x_{2i}(t - j\frac{\tau}{m})$ випливає оцінка

$$\int_{t_0}^{T} |y_{ji}{}^{(2)}(t)|dt \leq \alpha_{1i}(h). \tag{4.9}$$

Дослідимо третій доданок у правій частині нерівності (4.8). Із першого рівняння системи (4.7) знаходимо

$$z_{1i}{}^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} x_{2i}(s)ds. \tag{4.10}$$

Оцінюючи (4.10), дістаємо

$$\int_{t_0}^{T} |z_{1i}{}^{(2)}(t)|dt \leq \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{T}\int_{s}^{T} e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}|x_{2i}(s)|dtds =$$
$$= \int_{t_0}^{T} (1 - e^{-\frac{m}{\tau}(T-s)})|x_{2i}(s)|ds \leq \alpha_{1i}(h). \tag{4.11}$$

Аналогічна оцінка правильна і для $z_{ji}{}^{(2)}(t),\ j = \overline{2,m}$.

Підставляючи (4.9)-(4.11) у нерівність (4.8), маємо

$$\int_{t_0}^{T} |z_{ji}(t) - y_{ji}(t)|dt \leq (T - t_0)\beta_{4i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + 2\alpha_{1i}(h),$$

де $\beta_{4i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) = 4K_{2i}\frac{\tau}{\sqrt{m}} + 2\omega(x_i, \frac{\tau}{\sqrt{m}})$, K_{2i} – стала Ліпшица функції $x_i^{(1)}(t)$. Покладаючи $h = \frac{\tau}{\sqrt{m}}$, одержуємо оцінку

$$\int\limits_{t_0}^{T} |z_{ji}(t) - y_{ji}(t)|dt \leq (T - t_0)\beta_{4i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) +$$

$$+2\alpha_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) = \beta_{5i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),\ m \in N,\ i = \overline{1, n}. \tag{4.12}$$

Додаючи нерівності (4.12) та позначаючи $\beta_6(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) = n\max\limits_i(\beta_{5i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}))$, дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a}^{T} |z_{ji}(t) - y_{ji}(t)|dt \leq \beta_6(\frac{\tau}{\sqrt{m}}). \tag{4.13}$$

Остання нерівність виражає точність апроксимації елемента запізнення для кусково-неперервної векторної вхідної функції.

Якщо ж вхідна функція $x : [t_0 - \tau, T] \to R^n$ є тільки неперервною, то аналогічно можна дістати оцінку

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ji}(t) - y_{ji}(t)|dt \leq 4\frac{\tau}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{n} K_{2i} + 2n\omega(x_i, \frac{\tau}{\sqrt{m}}) = \beta_7(\frac{\tau}{\sqrt{m}}). \tag{4.14}$$

Підсумуємо наведені вище міркування про апроксимацію елемента запізнення у вигляді такого твердження.

Теорема 4.1. *Нехай вхідна функція $x(t)$ в системі (4.1) є кусково-неперервною при $t \in [t_0 - \tau, T]$. Тоді для розв'язків задачі Коші (4.1)-(4.2) справджуються нерівності*

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{T} |z_{ji}(t) - y_{ji}(t)|dt \leq \beta_6(\frac{\tau}{\sqrt{m}}).$$

Якщо ж вхідна функція $x(t)$ є неперервною, тоді

$$||z_j(t) - y_j(t)|| \leq \beta_7(\frac{\tau}{\sqrt{m}}).$$

Тут $\beta_j(\delta)$, $j = 6, 7$ монотонно зростаючі функції та $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_j(\delta) = 0$.

Лема 2. *Нехай функція $x(t)$ в системі (4.1)-(4.2) задовольняє нерівність*

$$||x(s)|| = \sup_{t_0-\tau\leq s\leq T}\sum_{i=1}^{n}\{|x_i(s)|\} < \varepsilon,\ \text{де } \varepsilon > 0.$$

Тоді для розв'язків $z_j(t)$, $j = \overline{1,m}$ системи (4.1)-(4.2) справджується співвідношення

$$||z_j(t)|| \leq \varepsilon, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad t \in [t_0, T]. \tag{4.15}$$

4.2 Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь із запізненням

Нехай n, p – деякі натуральні числа, t_0, T – задані дійсні числа, $t_0 < T$. Розглядатимемо систему диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)), t \in [t_0, T],\ p \geq 1, \tag{4.16}$$

де $x \in R^n$, $\tau_k, k = \overline{1,p}$, – запізнення, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $f(t, u_0, \ldots, u_p)$ – неперервна вектор-функція, визначена для $t \in [t_0, T]$, $u_k \in R^n$, $k = \overline{0,p}$.

Будемо розглядати для $x \in R^n$ норму $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Припустимо, що функція f задовольняє умову Ліпшица

$$||f(t, u_0', \ldots, u_p') - f(t, u_0'', \ldots, u_p'')|| \leq \sum_{k=0}^{p} L_i ||u_k' - u_k''||, \tag{4.17}$$

де $L_k > 0$, u_k', $u_k'' \in R^n$, $k = \overline{0,p}$, $||f(t, u_0, ..., u_p)|| = \max_t \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, u_0, ..., u_p)|$. Нехай $\varphi(t)$ – задана на $[t_0 - \tau, t_0]$ неперервна функція. Розв'язком початкової задачі для системи (4.16) будемо називати [90] диференційовану на $[t_0 - \tau, T]$ функцію $x(t)$, яка співпадає з $\varphi(t)$ на $[t_0 - \tau, t_0]$ і задовольняє систему (4.16) на $[t_0, T]$.

При виконанні наведених вище припущень (4.17) розв'язок системи (4.16) з неперервною на $[t_0 - \tau, t_0]$ початковою функцією $\varphi(t)$ існує і єдиний [90], однак його знаходження в аналітичному вигляді можливе тільки у найпростіших випадках. Розглянемо схему знаходження його наближень за допомогою розв'язків задачі Коші для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай $m \in N$. Визначимо функції $z_j(t) \in R^n$, $j = \overline{0,m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \dots, z_{l_p}(t)),$$
$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{1,m},\ t \in [t_0, T], \tag{4.18}$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi(t_0 - \frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{0,m}, \tag{4.19}$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} < \tau_j < \frac{\tau(l_j+1)}{m}.$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (4.18) апроксимує систему рівнянь із запізненням (4.16), якщо справджуються співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0,\ j = \overline{0,m},\ t \in [t_0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

де $||\cdot||$ – норма в просторі R^n.

Розглянемо питання про близкість розв'язків початкової задачі для системи (4.16) та розв'язків задачі Коші (4.18)-(4.19).

Нехай $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),\ z_j(t) = (z_{j1}(t), \dots, z_{jn}(t)),\ j = \overline{1,m}$

$$N_j(t) = \max_{t_0 \le s \le t} \sum_{i=1}^{n} |x_i(s - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(s)|,\ j = \overline{0,m},\ t \in [t_0, T]. \tag{4.20}$$

Представимо $z_{ji}(t)$ $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(1)}(t) = x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(1)}(t) = z_{j,i-1}^{(1)}(t),\ j = \overline{2,m},\ i = \overline{1,n} \tag{4.21}$$
$$z_{ji}^{(1)}(t_0) = x_i(t_0 - \frac{j\tau}{m}),\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}. \tag{4.22}$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) = z_{0i}(t) - x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(2)}(t) = z_{j,i-1}^{(2)}(t),\ j = \overline{2,m}, i = \overline{1,n}, \tag{4.23}$$
$$z_{ji}^{(2)}(t_0) = 0,\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}. \tag{4.24}$$

Оцінимо різниці $\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(t)|$, враховуючи вигляд систем (4.21)-(4.22) та (4.23)-(4.24). Маємо

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}(t)|=\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-(z_{ji}^{(1)}(t)+z_{ji}^{(2)}(t))|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(t)|. \quad (4.25)$$

Покажемо методом математичної індукції, що для другого доданку (4.25) справедлива оцінка

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(s)|\le N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T]. \quad (4.26)$$

Для розв'язку векторного рівняння $\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt}+z_{1i}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t)$, з початковою умовою $z_{1i}^{(2)}(t_0)=0$, маємо зображення

$$z_{1i}^{(2)}(t)=\frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t}(z_{0i}(\xi)-x_i(\xi))exp(\frac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{1i}^{(2)}(t)|=\frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|z_{0i}(\xi)-x_i(\xi)|exp(\frac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi\le$$

$$\le\frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t}(\max_{t_0\le s\le\xi}\sum_{i=1}^{n}|z_{0i}(s)-x_i(s)|)exp(\frac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi\le N_0(t).$$

Припустимо, що нерівність (4.26) справджується при $k=j$:

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(t)|=\frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|z_{(j-1)i}^{(2)}(\xi)|exp(\frac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi\le N_0(t).$$

Покажемо, що дана нерівність буде справедлива при $k = j+1$:

$$\sum_{i=1}^{n} |z^{(2)}_{(j+1)i}(t)| = \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} |z^{(2)}_{(j)i}(\xi)| exp(\frac{m(\xi - t)}{\tau}) d\xi \leq$$

$$\leq \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t} (\max_{t_0 \leq s \leq \xi} \sum_{i=1}^{n} |z^{(2)}_{(j)i}(\xi)|) exp(\frac{m(\xi - t)}{\tau}) d\xi \leq N_0(t).$$

Отже, нерівність (4.26) має місце.

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі для рівняння із запізненням маємо, що функції $x_i(t) \in C[t_0 - \tau, T],\ i = \overline{1,n}$ – тому для оцінки величини $|x_i(t - \dfrac{j\tau}{m}) - z^{(1)}_{ji}(t))|$ можна дістати нерівність

$$|x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z^{(1)}_{ji}(t))| \leq \beta_{4i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),\ t \in [t_0, T],\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n},$$

де $\beta_{4i}(\dfrac{\tau}{\sqrt{m}}) = 4K_{2i}\dfrac{\tau}{\sqrt{m}} + 2\omega(x_i, \dfrac{\tau}{\sqrt{m}})$, K_{2i} – стала Ліпшица функції $x^{(1)}_i$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z^{(1)}_{ji}(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_{4i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) = \beta_9(\frac{\tau}{m}). \qquad (4.27)$$

Із властивостей функцій $\beta_{4i}(\dfrac{\tau}{\sqrt{m}})$ маємо, що $\lim\limits_{\delta \to 0} \beta_9(\delta) = 0$. Нерівність (4.27) справедлива для всіх $t \in [t_0, T]$, тому враховуючи позначення (4.20), маємо

$$N_j(t) \leq \beta_9(\frac{\tau}{m}) + N_0(t),\ j = \overline{1,m}. \qquad (4.28)$$

Для оцінки різниці $||x(t) - z_0(t)||$, представимо рівняння (4.16) та (4.18) в еквівалентній інтегральній формі

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s - \tau_1), \ldots, x(s - \tau_p)) ds,\ t \in [t_0, T],$$

$$z_0(t) - z_0(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \ldots, z_{l_p}(s)) ds,\ t \in [t_0, T].$$

Оцінимо $|x(s - \tau_j) - z_{l_j}(s)|$:

$$||x(s - \tau_j) - z_{l_j}(s)|| = ||x(s - \tau_j) - x(s - \tau_{l_j}) + x(s - \tau_{l_j}) - z_{l_j}(s)|| \leq$$

$$\leq ||x(s - \tau_j) - x(s - \tau_{l_j})|| + ||x(s - \tau_{l_j}) - z_{l_j}(s)|| \leq N_{l_j}(t) + n\omega(\frac{\tau}{m}) \leq$$

$$\leq \beta_9(\frac{\tau}{m}) + N_0(t) + n\omega(\frac{\tau}{m}) = \beta_{10}(\frac{\tau}{m}) + N_0(t), \qquad (4.29)$$

де

$$\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) = \beta_9(\frac{\tau}{m}) + n\omega(\frac{\tau}{m}), \tag{4.30}$$

$\omega(\frac{\tau}{m}) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \omega(x_i(t), \frac{\tau}{m})$, $\omega(x_i(t), \frac{\tau}{m})$ – модуль неперервності функції $x_i(t)$ на проміжку $[t_0, T]$. Неважко переконатись, що $\lim\limits_{\delta \to 0} \beta_{10}(\delta) = 0$.

Використовуючи нерівності (4.17), (4.28) та (4.29), для $t \in [t_0, T]$ маємо оцінку

$$\begin{aligned}
&||x(t) - z_0(t)|| \leq \\
&\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, x(s), x(s-\tau_1), \ldots, x(s-\tau_p)) - f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \ldots, z_{l_p}(s))||ds \leq \\
&\leq \int\limits_{t_0}^{t} \left[L_0||x(s) - z_0(s)|| + \sum_{k=0}^{p} (L_k||x(s-\tau_k) - z_{l_k}(s)||) \right] ds \leq \\
&\leq \int\limits_{t_0}^{t} \left[L_0 N_0(s) + \sum_{i=k}^{p} L_k(N_0(s) + \beta_{10}(\frac{\tau}{m})) \right] ds \leq \\
&\leq p(T - t_0)\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) \sum_{i=k}^{p} L_k + \sum_{k=0}^{p} L_k \int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds.
\end{aligned}$$

Враховуючи позначеня (4.20), дістаємо

$$N_0(t) \leq p(T - t_0)\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) \sum_{k=1}^{p} L_k + \sum_{k=0}^{p} L_k \int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds \; t \in [t_0, T].$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана [91], дістаємо

$$N_0(t) \leq p(T - t_0)\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) \sum_{k=1}^{p} L_k e^{(T-t_0)\sum\limits_{k=0}^{p} L_k}, \; t \in [t_0, T].$$

Тепер із нерівності (4.28) маємо

$$N_j(t) \leq p(T - t_0)\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) \sum_{k=1}^{p} L_k e^{(T-t_0)\sum\limits_{k=0}^{p} L_k} + \beta_9(\frac{\tau}{m}) = \beta_{11}(\frac{\tau}{m}), \tag{4.31}$$

$j = \overline{1, m}, \; t \in [t_0, T]$. Крім того, $\lim\limits_{\delta \to 0} \beta_{11}(\delta) = 0$.

Звідси дістаємо наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай для системи (4.16) справджується нерівність (4.17). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (4.18)-(4.19) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь (4.16) при* $m \to \infty$ *і* $t \in [t_0, T]$.

4.3 Наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

Розглядатимемо систему диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[x(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k(t)x(t-\tau_i)] = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)), \quad (4.32)$$
$$t \in [t_0, T], \ p \geq 1,$$

де $x \in R^n$, $\tau_k, k = \overline{1,p}$ – запізнення, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $A_k(t), \ k = \overline{1,p}$ – $n \times n$ неперервні на $[t_0, T]$ матричні функції; $f(t, u_0, \ldots, u_p)$ – неперервна вектор-функція, визначена для $t \in [t_0, T]$, $u_k \in R^n$, $k = \overline{0,p}$.

Будемо розглядати для $x \in R^n$ норму $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, а для $n \times n$ матриці A задамо норму $||A|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, що узгоджена із векторною нормою.

Припустимо, що для системи (4.32) виконуються умови :

1) $\sum_{k=1}^{p} ||A_k(t)|| \leq r < 1$, $t \in [t_0, T]$.

2) Функція f задовольняє умову Ліпшица

$$||f(t, u_0', \ldots, u_p') - f(t, u_0'', \ldots, u_p'')|| \leq \sum_{k=0}^{p} L_k ||u_k' - u_k''||,$$

$$\text{де } L_k > 0, \ u_k', \ u_k'' \in R^n, \ k = \overline{0,p}, ||f(t, u_0, ..., u_p)|| = \max_t \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, u_0, ..., u_p)|.$$

Нехай $\varphi(t)$ – задана на $[t_0 - \tau, t_0]$ неперервна функція. Розв'язком початкової задачі для системи (4.32) будемо називати [90] неперервну на $[t_0 - \tau, T]$ функцію $x(t)$, яка співпадає з $\varphi(t)$ на $[t_0 - \tau, t_0]$, задовольняє (4.32) на $[t_0, T]$ і різниця $x(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k(t)x(t-\tau_k)$ диференційовна.

При виконанні припущень 1)-2) розв'язок системи (4.32) з неперервною на $[t_0 - \tau, t_0]$ початковою функцією $\varphi(t)$ існує і єдиний [90], однак його знаходження в аналітичному вигляді можливе тільки у найпростіших випадках, а для наближеного знаходження немає ефективних алгоритмів. Розглянемо схему знаходження його наближень за допомогою розв'язків задачі Коші для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь.

Відзначимо роботу [92], де розглядалась схема апроксимації диференціального рівняння нейтрального типу із використанням апроксимації Паде для функції e^x. При цьому точність апроксимації встановлена тільки в просторах достатньо гладких функцій.

У даній роботі досліджується схема апроксимації системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу за Хейлом.

Нехай $m \in N$. Визначимо функції $z_j(t) \in R^n$, $j = \overline{0, m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}[z_0(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k(t) z_{l_k}(t)] = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t)),$$
$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{1, m},\ t \in [t_0, T], \tag{4.33}$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi(t_0 - \frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{0, m}, \tag{4.34}$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} < \tau_j < \frac{\tau(l_j + 1)}{m}.$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (4.33) апроксимує систему рівнянь нейтрального типу (4.32), якщо справджуються співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0,\ j = \overline{0, m},\ t \in [t_0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

де $|| \cdot ||$ – норма в просторі R^n.

Розглянемо питання про близкість розв'язків початкової задачі для системи нейтрального типу (4.32) та розв'язків задачі Коші (4.33)-(4.34).

Нехай $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $z_j(t) = (z_{j1}(t), \ldots, z_{jn}(t))$, $j = \overline{1, m}$. Позначимо

$$N_j(t) = \max_{t_0 \le s \le t} \sum_{i=1}^{n} |x_i(s - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(s)|,\ j = \overline{0, m}. \tag{4.35}$$

Представимо $z_{ji}(t)$ $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t)+z_{ji}^{(2)(t)}$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(1)}(t)}{dt}+z_{1i}^{(1)}(t)=x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(1)}(t)=z_{j,i-1}^{(1)}(t),\ j=\overline{2,m},\ i=\overline{1,n} \tag{4.36}$$
$$z_{ji}^{(1)}(t_0)=x_i(t_0-\frac{j\tau}{m}),\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}. \tag{4.37}$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt}+z_{1i}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(2)}(t)=z_{j,i-1}^{(2)}(t),\ j=\overline{2,m}, i=\overline{1,n}, \tag{4.38}$$
$$z_{ji}^{(2)}(t_0)=0,\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}. \tag{4.39}$$

Задачі Коші (4.36)-(4.37) та (4.38)-(4.39) аналогічні дослідженим раніше задачам Коші (4.21)-(4.22) та (4.23)-(4.24), тому для $N_j(t)$ справедливі співвідношення аналогічні співвідношенням (4.28)

$$N_j(t)\le\beta_9(\frac{\tau}{m})+N_0(t),\ j=\overline{1,m},$$

де $\beta_9(\frac{\tau}{m})$ визначається рівністю (4.27).

Для оцінки різниці $||x(t)-z_0(t)||$, представимо рівняння (4.32) та (4.33) в еквівалентній інтегральній формі

$$[x(t)-\sum_{k=1}^{p}A_k(t)x(t-\tau_k)]-[x(t_0)-\sum_{k=1}^{k}A_k(t_0)x(t_0-\tau_k)]=$$
$$\int_{t_0}^{t}f(s,x(s),x(s-\tau_1),\dots,x(s-\tau_p))ds,\ t\in[t_0,T],$$

$$[z_0(t)-\sum_{k=1}^{p}A_k(t)z_{l_k}(t)]-[z_0(t_0)-\sum_{k=1}^{p}A_k(t_0)z_{l_k}(t_0)]=$$
$$\int_{t_0}^{t}f(s,z_0(s),z_{l_1}(s),\dots,z_{l_p}(s))ds,\ t\in[t_0,T].$$

Враховуючи властивість 2), нерівності (4.29) для $t \in [t_0, T]$ маємо

$$||x(t) - z_0(t)|| \leq \sum_{k=1}^{p} ||A_k(t)|| ||x(t-\tau_k) - z_{l_k}(t)|| +$$

$$\sum_{k=1}^{p} ||A_k(t_0)|| ||x(t_0 - \tau_k) - \varphi(t_0 - \frac{l_k \tau}{m})|| +$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, x(s), x(s-\tau_1), \dots, x(s-\tau_p)) - f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \dots, z_{l_p}(s))|| ds \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} ||A_k(t)|| (N_0(t) + \beta_{10}(\frac{\tau}{m})) + \sum_{k=1}^{p} ||A_k(t_0)|| n\omega(\frac{\tau}{m}) +$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left[L_0 N_0(s) + \sum_{k=1}^{p} L_k (N_0(s) + \beta_{10}(\frac{\tau}{m})) \right] ds \leq$$

$$\leq N_0(t) r + (\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) + n\omega(\frac{\tau}{m})) r + (T - t_0) \sum_{k=1}^{p} L_k \beta_{10}(\frac{\tau}{m}) + \sum_{k=0}^{p} L_k \int\limits_{t_0}^{t} N_0(s) ds,$$

де β_{10} задається рівністю (4.30).

Останню нерівність, враховуючи властивість 1), перепишемо у вигляді

$$N_0(t) \leq \beta_{11}(\frac{\tau}{m}) + L^* \int\limits_{t_0}^{t} N_0(s) ds,$$

де

$$\beta_{11}(\frac{\tau}{m}) = \frac{1}{1-r} \left((\beta_{10}(\frac{\tau}{m}) + n\omega(\frac{\tau}{m})) r + (T - t_0) \sum_{k=1}^{p} L_k \beta_{10}(\frac{\tau}{m}) \right), \qquad (4.40)$$

$L^* = \dfrac{1}{1-r} \displaystyle\sum_{i=0}^{p} L_i.$

Застосовуючи нерівність Гронуолла, одержуємо оцінку

$$N_0(t) \leq \beta_{11}(\frac{\tau}{m}) e^{L^*}, \ t \in [t_0, T].$$

де $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_{11}(\frac{\tau}{m}) = 0.$

Звідси дістаємо наступне твердження.

Теорема 4.3. *Нехай для системи (4.32) справджуються умови 1), 2). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних* *рівнянь (4.33)-(4.34) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (4.32) при $m \to \infty$ і $t \in [t_0, T]$.*

4.4 Апроксимація системи диференціально-різницевих та різницевих рівнянь із багатьма запізненнями

Розглянемо систему, що складається з диференціально-різницевого та різницевого рівнянь вигляду

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_p)), \tag{4.41}$$

$$y(t) = g(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_p)), \tag{4.42}$$

$$t \in [t_0, T], \quad p \geq 1, q \geq 1,$$

з початковими умовами

$$x(t) = \varphi_1(t), y(t) = \varphi_2(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{4.43}$$

де $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $f(t, u_0, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_p)$, $g(t, u_0, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_p)$ – неперервні по t функції, що задовольняють глобальну умову Ліпшица по $u_0, \ldots, u_p, w_0, \ldots, w_q$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – задані неперервні при $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ функції.

Нехай виконується умова "склейки":

$$\begin{aligned}\varphi_2(t_0) = g(t_0, \varphi_1(t_0), \varphi_1(t_0 - \tau_1), \ldots, \varphi_1(t_0 - \tau_p), \\ \varphi_2(t_0 - \tau_1), \ldots, \varphi_2(t_0 - \tau_p)).\end{aligned} \tag{4.44}$$

При виконанні цих припущень розв'язок задачі (4.41)-(4.43) існує, єдиний і може бути знайдений методом кроків, крім того $x(t) \in C[t_0 - \tau, T] \bigcap C^1[t_0, T]$, $y(t) \in C[t_0 - \tau, T]$ [90]. Якщо умова "склейки"не виконується, то розв'язок $(x(t), y(t))$ початкової задачі (4.41)-(4.43) існує і єдиний і крім того $x(t) \in C[t_0 - \tau, \tau]$, а $y(t)$ кусково-неперервна функція, що має скінчене число точок розриву, в яких існують односторонні границі.

Визначимо функції $z_j(t)$, $j = \overline{0, m}$, $w_j(t), j = \overline{1, m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$z_0'(t) = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_1}(t), \ldots, w_{l_p}(t)),$$

$$z_j'(t) = \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \; j = \overline{1, m}, \tag{4.45}$$

$$w_1'(t) = \mu[g(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_1}(t), w_{l_p}(t)) - w_1],$$
$$w_j'(t) = \mu(w_{j-1}(t) - w_j(t)),\ j = \overline{2, m} \tag{4.46}$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi_1(t_0 - \frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{0, m},$$
$$w_j(t_0) = \varphi_2(t_0 - \frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{1, m}, \tag{4.47}$$

де $m \in N$, $\mu = \dfrac{m}{\tau}$.

Якщо умова "склейки"(4.44) має місце, то будемо говорити, що розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (4.45)-(4.47) апроксимують розв'язки початкової задачі (4.41)-(4.43), якщо будуть виконуватись співвідношення

$$|x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)| \to 0,\ j = \overline{0, m},\ t \in [t_0, T] \ \text{ при } m \to \infty,$$
$$|y(t - \frac{\tau j}{m}) - w_j(t)| \to 0,\ j = \overline{1, m},\ t \in [t_0, T] \ \text{ при } m \to \infty. \tag{4.48}$$

Якщо ж умова "склейки"(4.44) не виконується, то будемо говорити, що розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (4.45)-(4.47) апроксимують розв'язки початкової задачі (4.41)-(4.43), якщо будуть виконуватись співвідношення

$$|x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)| \to 0,\ j = \overline{0, m},\ t \in [t_0, T],\ \text{ при } m \to \infty,$$
$$\int_{t_0}^{T} |y(t - \frac{\tau j}{m}) - w_j(t)| dt \to 0,\ j = \overline{1, m} \ \text{ при } m \to \infty, \tag{4.49}$$

де $x(t) \in C[t_0 - \tau, T]$, $y(t)$ – кусково-неперервна функція на $[t_0, T]$.

Теорема 4.4. *Нехай* $(z_j(t),\ j = \overline{0, m};\ w_j(t), j = \overline{1, m})$ *– розв'язок задачі Коші (4.45)-(4.47), а* $(x(t), y(t))$ *– розв'язок початкової задачі (4.41)-(4.43). Припустимо, що справджуються нерівності*

$$|f(t, u_0, \ldots, u_{2p}) - f(t, v_0, \ldots, v_{2p})| \le R \sum_{i=0}^{2p} |u_i - v_i|,$$
$$|g(t, u_0, \ldots, u_{2p}) - g(t, v_0, \ldots, v_{2p})| \le L \sum_{i=0}^{2p} |u_i - v_i|,$$
$$L > 0,\ R > 0,\ pL < 1.$$

Тоді мають місце співвідношення

$$|x(t) - z_0(t)| \leq \beta_{18}(\frac{\tau}{m}),$$

$$|x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)| \leq \beta_{19}(\frac{\tau}{m}),\ j = \overline{1, m}, \tag{4.50}$$

$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(t - \frac{\tau j}{m}) - w_j(t)| dt \leq \beta_{20}(\frac{\tau}{m}),\ j = \overline{1, m}.$$

Якщо ж виконується умова "склейки"(4.44), тоді справджуються такі співвідношення

$$|x(t) - z_0(t)| \leq \beta_{21}(\frac{\tau}{m}),$$

$$|x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)| \leq \beta_{22}(\frac{\tau}{m}),\ j = \overline{1, m}, \tag{4.51}$$

$$|y(t - \frac{\tau j}{m}) - w_j(t)| \leq \beta_{23}(\frac{\tau}{m}),\ j = \overline{1, m}.$$

Функції $\beta_i(r)$, $i = \overline{18, 23}$ *монотонно неспадні і* $\lim\limits_{r \to 0} \beta_i(r) = 0$.

5 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ВИПАДКОВОСТЯМИ

У даному розділі встановлені умови розв'язності крайових задач із запізненням, досліджено їх апроксимацію системами звичайних диференціальних рівнянь та здійснено комп'ютерне моделювання. Побудована та досліджена динамічна модель теорії ризиків з неоднорідністю та перестрахуванням, розглянута задача мінімаксного оцінювання невідомих правих частин рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами Неймана.

Наведені тут результати належать І.М. Черевку, О.В. Матвію (п. 5.1), А.В. Сачку (п. 5.1.2), А.С. Перцову (п. 5.2), О.М. Строєву (п. 5.3), В.Й. Кушнірчуку (п. 5.3.2) і опубліковані в [96, 98-100, 116-122].

5.1 Моделювання крайових задач із запізненням

Розв'язання крайових задач із запізненням аналітично можливе тільки в найпростіших випадках, тому побудова та обгрунтування наближених методів їх розв'язання є важливою задачею. Зведення лінійної крайової задачі із запізненням до інтегрального рівняння і застосування проекційно ітеративних методів розглянуто в роботі [93]. Застосування методу сплайн колокацій до таких задач вивчалося в [94-95]. У даному пункті досліджується розв'язність крайових задач із запізнення, обгрунтовується їх апроксимація крайовою задачею для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь та розроблена прикладна програма для моделювання крайових задач на ЕОМ. Дослідження точності апроксимації у простішому випадку здійснено в [96].

5.1.1 Постановка крайової задачі, існування розв'язку. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} y''(t) = f(t, y(t), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_k),\\ y'(t), y'(t-\tau_1), \ldots, y'(t-\tau_k)),\ t \in [a,b], \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$y(t) = \varphi(t),\ y'(t) = \varphi'(t), t \in [a-\tau, a],\ y(b) = \gamma. \tag{5.2}$$

Нехай $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k = \tau,\ \gamma \in R,\ f(t, u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_k)$ – неперервна функція в області $G = [a,b] \times G_1^k \times G_2^k$, де $G_1 = \{u \in R : |u| \leq P_1\},\ G_2 = \{v \in R : |v| \leq P_2\},\ P_1,\ P_2,\ \tau$ – додатні сталі, $\varphi(t) \in C^1[a-\tau, a]$.

Введемо позначення:

$$P = \sup\{|f(t, u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_k)| : |u_i| \leq P_1,\ |v_i| \leq P_2,\ j = \overline{0,k}, t \in [a,b]\},$$

$$J=[a-\tau,a],\ I=[a,b],\ I_1=[a,a+\tau_1],\ I_2=[a+\tau_1,a+\tau_2],\ \ldots,$$
$$I_k=[a+\tau_{k-1},a+\tau_k],\ I_{k+1}=[a+\tau_k,b],$$
$$B(J\cup I)=\Big\{y(t):y(t)\in\Big(C(J\cup I)\cap(C^1(J)\cup C^1(I))\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2(I_j)\Big)\Big),$$
$$|y(t)|\le P_1,|y'(t)|\le P_2\Big\}.$$

Розв'язком задачі (5.1)-(5.2) будемо вважати функцію $y=y(t)$ із простору $B(J\cup I)$, яка задовольняє рівняння (5.1) на $[a,b]$ (за можливим вийнятком точок $t_i=a+\tau_i,\ i=\overline{1,k}$) та крайові умови (5.2).

Із означення простору $B(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (5.1)-(5.2) є неперервним в точці $t=a$, але гладкості його в цій точці ми не передбачаємо. Він є неперервно-диференційованим для всіх $t\in[a,b]$, якщо під $y'(a)$ розуміти правосторонню похідну.

Має місце наступне твердження.

Теорема 5.1. *Нехай справджуються умови:*

1) $\max\left\{\sup\limits_{t\in J}\{|\varphi(t)|\},\ \dfrac{(b-a)^2}{8}P+\max\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\}\right\}\le P_1;$

2) $\max\left\{\sup\limits_{t\in J}\{|\varphi'(t)|\},\ \dfrac{(b-a)}{2}P+\left|\dfrac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2;$

3) *в області G функція$f(t,u_0,\ldots,u_k,v_0,\ldots,v_k)$задовольняє умову Ліпшица:*
$|f(t,u_0,\ldots,u_k,v_0,\ldots,v_k)-f(t,\overline{u_0},\ldots,\overline{u_k},\overline{v_0},\ldots,\overline{v_k})|\le$
$\le\sum\limits_{j=0}^{k}(L_j\,|u_j-\overline{u_j}|+M_j\,|v_j-\overline{v_j}|);$

4) $\sum\limits_{j=0}^{k}(L_j+M_j)<1.$

Тоді в класі функцій $B(J\cup I)$ існує єдиний розв'язок крайової задачі (5.1)-(5.2).

5.1.2 Моделювання крайових задач на ЕОМ. Поставимо у відповідність крайовій задачі (5.1)-(5.2) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(t)=f(t,z_0(t),z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_k}(t),w_0(t),w_{l_1}(t),\ldots,w_{l_k}(t)),$$
$$z_j'(t)=\mu(z_{j-1}(t)-z_j(t)),\ j=\overline{1,m}, \tag{5.3}$$
$$z_j(a)=\varphi(a-\frac{j\tau}{m}),\ j=\overline{0,m},\ z_0(b)=\gamma, \tag{5.4}$$

$$w_0(t) = \int\limits_a^b \overline{G'_t}(t,s) f(s, z_0(s), \dots, z_{l_k}(s), w_0(s), \dots, w_{l_k}(s)) ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a},$$

$$w'_j(t) = \mu(w_{j-1}(t) - w_j(t)),\ j = \overline{1,m}, \tag{5.5}$$

$$w_j(a) = \phi'(a - \frac{j\tau}{m}),\ j = \overline{1,m}, \tag{5.6}$$

де $m \in N,\ \mu = \dfrac{m}{\tau}$, а індекси l_j однозначно визначаються нерівностями $a - \frac{l_j \tau}{m} < a - \tau_j < a - \frac{(l_j - 1)\tau}{m}$, а $G(t,s)$ – функція Гріна крайової задачі $y''(t) = 0,\ y(a) = y(b) = 0$.

Умови, при яких наведена схема апроксимації наближає крайову задачу із запізненням, встановлюється у наступному твердженні.

Теорема 5.2. *Нехай функція $f(t, u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k)$ задовольняє умови теореми 5.1 та виконується нерівність*

$$M(b-a)(k+1)\max[(b-a), \frac{e^{\frac{M(k+1)(b-a)^2}{4}}}{4} + 1] < 1.$$

Тоді крайова задача (5.3)-(5.6) апроксимує крайову задачу (5.1)-(5.2) і мають місце співвідношення

$$\max_{a \le \xi \le t} |z_j(\xi) - y(\xi - \frac{j\tau}{m})| \le \gamma(\frac{\tau}{m}),$$

$$\int\limits_a^t |w_j(\xi) - y'(\xi - \frac{j\tau}{m})| \le \gamma(\frac{\tau}{m}),\ j = \overline{0,m},$$

де $\gamma(\delta)$ монотонно неспадна функція і $\lim\limits_{\delta \to 0} \gamma(\delta) = 0$.

Для автоматизації дослідження наближеної заміни крайових задач із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методики, описаної вище, розроблено Windows-додаток. Для його реалізації та побудови графічного інтерфейсу використано інтегроване середовище Borland Delphi 6.0, а реалізація синтаксичного аналізатора та математичних обчислень здійснено засобами мови Ruby. Borland Delphi 6.0 – потужне високопродуктивне середовище для розробки 32-розрядних Windows-додатків, яке включає в себе великий набір інструментів для керування та передачі даних з використанням відкритих стандартів. Ruby – це динамічна об'єктно-зорієнтовна мова з відкритим кодом, яка дозволяє ефективну розробку прикладних програм. Для нормальної роботи додатку необхідно: операційна ситема Windows XP, об'єм оперативної пам'яті не менше 512 Мбайт. Головне вікно програми містить стандартний набір елементів, серед яких виділяється головне меню, яке містить такі пункти:

•Крайова задача - • Результат - • Допомога - • Вихід.

Алгоритм роботи з програмою.

а) Користувач вибирає меню *Крайова задача*, у якому необхідно ввести функцію $F(t, z_0, \ldots, z_m, w_0, \ldots, w_m)$, яка визначається правою частиною рівняння, початкові функції $\varphi(t)$ та $\varphi\prime(t)$, значення запізнення τ, розмірність апроксимуючої системи, межі інтервала a та b, значення функції в точці b, кількість точок розбиття. За допомогою кнопки *Ввести дані* здійснюється обробка введеної інформації, виконуються обчислення та формується файл, де зберігаються результати обчислень.

б) Для відображення результатів в табличному та графічному вигляді потрібно вибрати меню *Результат*.

Приклад. Розглянемо приклад, який ілюструє наведену методику апроксимації крайових задач із запізненням

$$x\prime\prime(t) = 2x(t) - ex(t-1), 0 \leq x \leq 2,$$
$$x(t) = e^t, x\prime(t) = e^t, -1 \leq x \leq 0,$$
$$x(0) = 1, x(2) = e^2/$$

Точний розв'язок даної крайової задачі $x(t) = e^t$. Результати числових експериментів наведені в таблиці 1, де $x_c(t)$ – точний розв'язок, $x_a(t)$ – розв'язок апроксимуючої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь при $m = 500$, знайдений за різницевою схемою з кроком $h = 0.02$, Δ – модуль різниці між точним та наближеним значенням.

Таблиця 5.1

t	$x_c(t)$	$x_a(t)$	Δ
0	1	1	0
0.5	1.648	1.653	0.005
1	2.718	2.727	0.009
1.5	4.481	4.491	0.01
2	7.389	7.389	0

Запропонована схема апроксимації та розроблена прикладна програма дозволяють ефективно знаходити наближений розв'язок крайових задач із запізненням. Числові експерименти підтверджують ефективність запропонованих наближених алгоритмів. Для наведеного прикладу абсолютна похибка $\Delta \leq 0.01$, а відносна похибка $\delta \leq 0.33\%$.

5.2 Мінімаксне оцінювання функціоналів від правих частин рівнянь лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана

В даному підрозділі за зашумленими спостереженнями розв'язків та при спеціальних обмеженнях на праві частини рівнянь та крайових умов, а також на шуми в спостереженнях, досліджується задача знаходження мінімаксних оцінок функціоналів від правих частин рівнянь, які входять в постановку крайової задачі для рівняння лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана.

Знаходження мінімаксних оцінок зведено до розв'язку деяких систем варіаційних рівнянь та доведена їх однозначна розв'язність.

Позначимо через H – гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$ та нормою $\|\cdot\|_H$. Через $J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ будемо позначати оператор, який називається ізометричним ізоморфізмом, та діє з H на його спряжений простір H', та визначається рівністю $(u, v)_H = < J_H u, v >_{H' \times H}$ $\forall u, v \in H$, де $< f, x >_{H' \times H} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Цей оператор існує внаслідок теореми Ріса.

Позначимо через $L^2(\Omega, H)$ простір Бохнера, який складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$, які визначені на певному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H такими, що $\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int_\Omega \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty$. В цьому випадку існує інтеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, який називається математичним сподіванням або середнім випадкового елемента $\xi(\omega)$. В $L^2(\Omega, H)$ можна ввести скалярний добуток:

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int_\Omega (\xi(\omega), \eta(\omega))_H \, dP(\omega) \tag{5.7}$$

$$\forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H).$$

Простір $L^2(\Omega, H)$, зі скалярним добутком (5.7), є гільбертовим.

Введемо також наступні позначення: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – просторова змінна, яка належить обмеженій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею Γ; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ - міра Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(D)$ – простір функцій, які сумуються з квадратом в області D; для цілого числа m позначимо через $H^m(D)$ – стандартні простори Соболева з природніми нормами; знак " : " означає згортку тензора і вектора або тензора і тензора.

Нехай тіло D – обмежена область з ліпшицевою границею в просторі $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ вектор переміщення (компоненти якого є функціями $x \in D$) та через ϵ_{ij} компоненти тензора деформації

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right].$$

Зауважимо, що $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{ii}(\mathbf{u})$ та що ϵ є симетричним: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Крім того, $\epsilon(\mathbf{u}) = 0$ тоді і тільки тоді коли $\mathbf{u} \in \mathcal{RB}$. Тут

$$\mathcal{RB} :=$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + b[x_2, -x_1]^T, & n = 2, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times [x_1, x_2, x_3]^T, & n = 3 \end{array} \right\} \tag{5.8}$$

де $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}$ при $n = 2$ і $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ при $n = 3$ відповідно.

Прямі обчислення показують, що вектор $\mathbf{r}$ в (5.8), наприклад при $n = 3$, визначається формулою $\mathbf{r} = R(x)\alpha$, де $\alpha = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, а 3×6-матриця $R(x)$ має вигляд

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стовпці цієї матриці

$$\begin{gathered} \mathbf{r}_1 = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{r}_2 = [0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{r}_3 = [0, 0, 1]^T, \\ \mathbf{r}_4 = [0, -x_3, x_2]^T, \quad \mathbf{r}_5 = [x_3, 0, -x_1]^T, \\ \mathbf{r}_6 = [-x_2, x_1, 0]^T \end{gathered} \tag{5.9}$$

утворюють базис підпростору $\mathcal{RB}$, так що $\dim \mathcal{RB} = 6$ при $n = 3$ і $\dim \mathcal{RB} = 3$ при $n = 2$.

Тензор напруження визначається за формулою $\tau = \tau(\mathbf{u}) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ – одинична матриця в $\mathbb{R}^n$, $\lambda = \lambda(x)$ ($\lambda(x) \geq 0$) і $\mu = \mu(x)$ ($\mu(x) > 0$) – узагальнені коефіцієнти Ламе, які характеризують пружність тіла, припускаються кусково-неперервними функціями в області $\bar{D}$. Тензор напруження τ є симетричним.

Введемо диференціальний оператор другого порядку

$$L\mathbf{u} = -\operatorname{div} \tau(\mathbf{u}) = \Bigg[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij}) \Bigg].$$

Задача Неймана в математичній теорії пружності формулюється наступним чином: знайти вектор переміщення $\mathbf{u}$, який задовольняє рівнянням

$$L\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \text{в} \quad D,$$

$$\tau(\mathbf{u}) : \mathbf{n} = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}\mathbf{n}_j = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{5.10}$$

де $\mathbf{F}$ – вектор об'ємних сил в тілі D, $\mathbf{g}$ – векторна функція, задана на Γ, $\mathbf{n}_j$ – направляючі косинуси зовнішньої по відношенню до області D нормалі $\mathbf{n}$ до її границі Γ.

Припустимо, що $\mathbf{F} \in L^2(D)^n$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma)^n$. Тоді під розв'язком задачі (5.10) розуміють знаходження функції $\mathbf{u} \in H^1(D)^n$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{F}, \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \tag{5.11}$$

де $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_D (2\mu\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda \div \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v})\, dx$, $\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{ij}(\mathbf{u})\epsilon_{ij}(\mathbf{v})$. Розв'язок задачі (5.11) не є єдиним та визначається з точністю до довільної функції з $\mathcal{RB}$. Він існує тоді і тільки тоді, коли функції $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$ задовольняють наступним умовам сумісності [97]:

$$\int_D (\mathbf{F}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \ \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB}. \tag{5.12}$$

Постановка задачі мінімаксного оцінювання. Задача оцінювання полягає в тому, щоб за спостереженням вигляду

$$y = C\mathbf{u} + \eta \tag{5.13}$$

знайти оптимальну, в певному сенсі, оцінку значення функціонала

$$l(F) = \int_D (\mathbf{l}_0(x), \mathbf{F}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (\mathbf{l}_1(x), \mathbf{g}(x))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma$$

в класі лінійних оцінок $\widehat{l(F)} = (y, w)_{H_0} + c$, де $\mathbf{u}(x)$–розв'язок крайової задачі (5.10), елемент w належить гільбертову простору H_0, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l}_0 \in L^2(D)^n$, $\mathbf{l}_1 \in L^2(\Gamma)^n$ – задані функції, в припущенні, що праві частини $\mathbf{F}(x)$, $\mathbf{g}$ рівнянь (5.10) та похибки $\eta = \eta(\omega)$ в спостереженнях (5.13), які є випадковими елементами, визначеними на певному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H_0, невідомі, а відомо лише, що елемент $F := (\mathbf{F}, \mathbf{g}) \in G_0$ і $\eta \in G_1$. Тут $C \in$

$\mathcal{L}(L^2(D)^n, H_0)$ – лінійний неперервний оператор, такий що його звуження на підпростір $\mathcal{RB}$ ін'єктивне; через G_0 позначено множину функцій $\tilde{F} := (\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{g}}) \in L^2(D)^n \times L^2(\Gamma)^n$, які задовольняють умовам

$$\int_D (Q_1(\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x), (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x))^2_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2(\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0), \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0)^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma \leq 1, \tag{5.14}$$

$$\int_D (\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB},$$

а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta} \in L^2(\Omega, H_0)$, з нульовими середніми, які задовольняють нерівності $\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} \leq 1$, де Q_0, Q_1, Q_2 – обмежені самоспряжені додатньо-визначені оператори в H_0, $L^2(D)^n$ $L^2(\Gamma)^n$ відповідно, для яких існують обмежені обернені оператори $Q_0^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}$, $\tilde{\mathbf{F}}_0 \in L^2(D)^n$ та $\tilde{\mathbf{g}}_0 \in L^2(\Gamma)^n$, задані функції, які задовольняють умовам (5.12).

Означення 5.1. Оцінку вигляду

$$\widehat{\widehat{l(F)}} = (y, \hat{w})_{H_0} + \hat{c} \tag{5.15}$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(F)$, якщо елемент $\hat{w}$ та число $\hat{c}$ визначаються з умови

$$\sigma(w, c) := \sup_{(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{g}}) \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}|^2 \to$$

$$\to \inf_{w \in H_0, c \in \mathbb{R}} := \sigma^2,$$

де

$$\widehat{l(\tilde{F})} = (\tilde{y}, w)_{H_0} + c, \tag{5.16}$$

$\tilde{y} = C\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\eta}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ – будь-який розв'язок крайової задачі (5.10) при $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$. Величину σ будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу $l(F)$.

Основні результати. Далі будуть сформульовані результати про представлення мінімаксних оцінок. З цією метою припустимо

$$U := \Big\{ \tilde{w} \in H_0 :$$

$$\int_D \big((C^* J_{H_0} \tilde{w})(x), \mathbf{r}(x) \big)_{\mathbb{R}^n} dx = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{RB} \Big\},$$

де $C^* : H_0' \to L_2(D)^n$ – оператор, спряжений до C, який визначаються співвідношенням

$$< C\boldsymbol{\varphi}, \phi >_{H_0 \times H_0'} = \int_D (\boldsymbol{\varphi}(x), C^* \phi(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx$$

для всіх $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(D)^n$, $\phi \in H_0'$, та при кожному фіксованому $w \in U$ введемо функцію $\mathbf{z}(\cdot; w) \in H^1(D)^n$ як єдиний розв'язок наступної варіаційної задачі[1]:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}(\cdot; w)) = -\int_D (C^* J_{H_0} w)(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \tag{5.17}$$

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n,$$

$$\int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x) + \mathbf{z}(x; w)), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1(\cdot) + \mathbf{z}(\cdot; w)), \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1,6}. \tag{5.18}$$

Лема 5.1. Задача знаходження мінімаксної оцінки значення функціонала $l(F)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, яка описується варіаційною крайовою задачею (5.17), (5.18) з функцією вартості вигляду

$$I(w) = \int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x) + \mathbf{z}(x; w)), \mathbf{l}_0(x) +$$

$$+ \mathbf{z}(x; w))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1(\cdot) + \mathbf{z}(\cdot; w)),$$

$$\mathbf{l}_1(\cdot) + \mathbf{z}(\cdot; w))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma + (Q_0^{-1} w, w)_{H_0} \to \inf_{w \in U}. \tag{5.19}$$

Розв'язуючи задачу оптимального керування (5.17) – (5.19) прийдемо до наступного результату.

Теорема 5.3. *Існує єдина мінімаксна оцінка виразу $l(\mathbf{F})$, яка може бути представлена у вигляді $\widehat{\widehat{l(\mathbf{F})}} = (y, \hat{w})_{H_0} + \hat{c}$, де*

$$\hat{w} = Q_0 C \mathbf{p},$$

$$\hat{c} = \int_D (\mathbf{l}_0 + \hat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx +$$

$$+ \int_\Gamma (\mathbf{l}_1 + \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\, d\Gamma, \tag{5.20}$$

а функції $\mathbf{p} \in H^1(D)^n$ і $\hat{\mathbf{z}} \in H^1(D)^n$ визначаються з системи варіаційних рівнянь

$$a(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{z}}) = -\int_D ((C^* J_{H_0} Q_0 C \mathbf{p})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \tag{5.21}$$

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n,$$

[1]Неважко побачити, що U – непорожня, замкнута, опукла множина.

$$\int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x) + \hat{\mathbf{z}}(x)), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1 + \hat{\mathbf{z}}), \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n} \, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1,6}, \tag{5.22}$$

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \int_D (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0(x) + \hat{\mathbf{z}}(x)), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}((\mathbf{l}_1 + \hat{\mathbf{z}}), \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(D)^n, \tag{5.23}$$

$$\int_D ((C^* J_{H_0} Q_0 C \mathbf{p})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} \, dx = 0, i = \overline{1,6}. \tag{5.24}$$

Задача (5.21)–(5.24) *однозначно розв'язна. Похибка оцінювання* σ *визначається формулою* $\sigma = l(P)^{1/2}$, *де* $P = (Q_1^{-1}(\mathbf{l}_0 + \mathbf{z}), Q_2^{-1}(\mathbf{l}_1 + \mathbf{z}|_\Gamma))$.

Відзначимо, що функція $\hat{\mathbf{z}}(x) = \mathbf{z}(x; \hat{w})$, де $\mathbf{z}(x; w)$ є розв'язком задачі (5.17), (5.18), а $w = \hat{w} \in U$ – оптимальне керування системою, яка описується цими рівняннями з критерієм якості (5.19) (див. лему 1).

Альтернативне представлення для мінімаксної оцінки через розв'язок системи варіаційних рівнянь спеціального вигляду, яке не залежить від конкретного вигляду функціоналу l, отримане в наступній теоремі.

Теорема 5.4. *Мінімаксна оцінка виразу* $l(F)$ *має вигляд* $\widehat{\widehat{l(F)}} = l(\hat{F})$, *де* $\hat{F}(x) = (\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{g}})$, $\hat{\mathbf{F}}(x) = Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_0$, $\hat{\mathbf{g}}(x) = Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}|_\Gamma + \mathbf{g}_0$, *а функція* $\hat{\mathbf{p}}$ *визначається з розв'язку наступної системи варіаційних рівнянь:*

$$a(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{p}}) = \int_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^3} \, dx \tag{5.25}$$

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(D)^n,$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n} \, d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1,6}, \tag{5.26}$$

$$a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = \int_D (Q_1^{-1}\hat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^3} dx +$$

$$+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(D)^n, \tag{5.27}$$

$$\int_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} \, dx = 0, \tag{5.28}$$

$i = \overline{1,6}$. *в якій рівності* (5.25)–(5.28) *виконуються з ймовірністю 1.*

Випадкові поля, реалізації $\hat{\mathbf{p}}$ *і* $\hat{\mathbf{u}}$ *яких задовольняють задачі* (5.25)–(5.28), *належать простору* $L^2(\Omega, H^1(D)^n)$.

Задача (5.25)–(5.28) *однозначно розв'язна.*

Зауваження. Наближені розв'язки систем варіаційних рівнянь (5.21)–(5.24) та (5.25)–(5.28) можуть бути знайдені методом Гальоркіна аналогічно тому, як це було зроблено в роботі [98]. При цьому можна показати, що гальоркінські наближення, які отримані в результаті розв'язку відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, збігаються до точних розв'язків систем варіаційних рівнянь (5.21)–(5.24) та (5.25)–(5.28).

5.3 Граничні теореми теорії ризиків

5.3.1 Аналіз дослідження класичної динамічної моделі теорії ризиків. Серед моделей, що розглядаються в теорії ризику, важливу роль відіграє динамічна модель страхування, яку запропонував Ф. Лундберг [101]. Основні дослідження цієї моделі здійснені в роботах Г. Крамера та Е.С. Андерсена [101, 104-106].

Основні ідеї динамічної моделі:

1. У модель включається час t і процес надходження вимог на страхові виплати зображується випадковим процесом.

2. Поточний резерв страхової компанії теж залежить від часу t.

3. В якості основної характеристики стану страхової компанії використовується ймовірність банкрутства.

Різні оцінки ймовірності банкрутства були дослідженні в роботах [102, 107, 109-115].

Найпростіша динамічна модель колективного ризику включає лише два процеси: процес надходження страхових внесків (премій) та процес страхових виплат.

Внески надходять значно частіше, ніж виникають позови, при цьому величина внеску набагато менша за величину страхового позову і відповідної виплати. Отже, процес надходження внесків можна трактувати як неперервний детермінований процес в порівнянні з величиною страхового позову.

У найпростішому випадку надходження внесків характеризується одним параметром – швидкістю надходжень $c > 0$. Це означає наступне: якщо в момент t компанія мала капітал $X(t)$ і до моменту $t+h$ не було жодної виплати, то на проміжку $(t, t+h)$ капітал компанії лінійно зростав і в момент часу $t+h$ він дорівнює $X(t+h) = X(t) + ch$.

Класичну модель колективного ризику характеризують:

– розміри виплат (claim sizes, claim amounts) – $\{X_i, i \geq 1\}$ – невід'ємні незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу F та скінченим математичним сподіванням $\mu = EX$;

– моменти надходження вимог на виплати $\{T_i, i \geq 1\}$, що утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $K(x)$;

– процес надходження вимог на виплати $N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, t > 0$, тобто кількість вимог на інтервалі $[0, t]$, де, за визначенням, $\sup\{\emptyset\} = 0$;

– проміжки часу між надходженням вимог $Y_1 = T_1$, $Y_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 2$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини зі скінченим математичним сподіванням $EY = {}^1\!/_\lambda$.

Зауважимо, що $\{N(t), t \geq 0\}$ та $\{X_k, k \geq 1\}$ вважаємо незалежними;

$x \geq 0$ – початковий (резервний)капітал (initial capital);

$c > 0$ – швидкість (інтенсивність) надходження страхових внесків (loaded premium rate).

Остаточно, процес ризику $X(t)$, $t \geq 0$, визначається співвідношенням

$$X(t) = x + ct - S(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

де сума всіх виплат $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} Z_i$ є випадковою сумою незалежних однаково розподілених випадкових величин. Процес $X(t)$ зображує стан резервного (сумарного) капіталу компанії в момент часу t.

В класичній моделі Крамера-Лундберга процес $N(t)$ вважають однорідним процесом Пуасона (з параметром λ), тоді проміжки між послідовними надходженнями вимог на виплати мають показниковий розподіл (відповідно з тим же параметром).

Нехай $\psi(x, T) = P\{X(t) < 0 \text{ для деякого } 0 < t \leq T\}$, $0 < T < \infty$, $x > 0$ – ймовірність банкрутства на скінченому часовому інтервалі $[0, T]$.

Величину $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ називають відносною страховою надбавкою, а для базової умови

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0.$$

У цьому випадку $\psi(x)$ можна записати як змішаний геометричний розподіл

$$\psi(x) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \left(1 - F_I^{n\bullet}(x)\right), u \geq 0.$$

Умова Крамера-Лундберга передбачає існування константи v (яку називають коефіцієнтом Лундберга), такої що

$$\int_0^{\infty} e^{vx} (1 - F(x))\, dx = \frac{c}{\lambda} = (1+\rho)\,\mu.$$

У випадку показникового розподілу виплат з функцією розподілу $F(x) = 1 - \exp\left\{{-x}/_{\mu}\right\}$:

$$\psi(x) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{\rho\mu}{\mu(1+\rho)}\right\}.$$

5.3.2 Дослідження динамічної моделі теорії ризиків з неоднорідною інтенсивністю премій та перестрахуванням. Розглядаємо процес ризику з перестрахуванням, який характеризується наявністю у випадковому доданку в стохастичній частині класичного процесу ризику від'ємної частини, тобто в моменти виплати страхових премій відбувається перестраховка. Поведінка цього процесу схожа на поведінку класичного процесу. До моментів виплат страхових премій процес є лінійною функцією, яка зростає зі швидкістю c (інтенсивність премій), а в моменти, коли відбувається виплата по страховим заявам одночасно віднімається випадкова сума. Економічна інтерпретація процесу з перестрахуванням є внесення деякого капіталу перестрахувальником в момент виплати за заявами.

Суми страхових виплат $Z(t)$ з урахуванням перестрахуванням описуються узагальненим процесом Пуасона

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} (\xi_k - \eta_k),$$

де $N(t)$ – неперервний справа процес Пуассона з параметром λ і $(\xi_k,\ k \geq 1)$ $(\eta_k, k \geq 1)$ незалежні, додатні, з функціями розподілу $F(x)$ та $G(x)$ відповідно, причому $P\{\xi_1 > \eta_1\} > 0$.

Теорема 5.5. *Нехай виконуються умови:*

1) $\exists\, \beta :\ M\exp(\beta\xi_1) < \infty$ *(умова Крамера);*

2) $\lambda\mu < c + \lambda\delta$ *;*

3) $\alpha = \sup\left\{\alpha > 0 :\ \hat{f}(\alpha)\,\hat{g}(-\alpha) < 1 + \frac{\alpha c}{\lambda}\right\} < \beta.$

Тоді для процесу $X(t) = x + ct - Z(t)$ *з ймовірністю розорення* $q(x)$ *, коефіцієнт* α *в рівності* $r_\alpha(x) = e^{\alpha x} r(x)$ *визначається з рівняння*

$$\int_0^\infty dG(d) \int_0^d F(y)\, e^{-\alpha d + \alpha y} \int_0^{d-y} e^{\alpha x} r(x)\, dx dy = -\frac{c}{\lambda} \int_0^\infty dG(d) \int_0^\infty e^{\alpha y} \bar{F}(y+d)\, dy.$$

Теорема 5.6. *Якщо виконуються умови 1) - 3) теореми 5.5 та* $\exists\, \alpha_0 > 0$, *таке що при* $\alpha < \alpha_0$ *має місце рівність*

$$-cq'(x) = -\lambda q(x) + \lambda \int_0^\infty dG(d) \left[\int_{-\infty}^{x+d} q(x+d-y)\, dF(y) + \lambda \bar{F}(x+d) \right].$$

Тоді справедлива наступна оцінка:

$$c_1 \leq \lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} r(x) \leq c_2,$$

де

$$c_1 = \frac{c\alpha^2 \int\limits_0^\infty e^{-\alpha d} \hat{F}_\alpha (y+d)\, dG(d)}{\int\limits_0^\infty e^{-\alpha d} Z(d,\alpha)\, dG(d)},$$

$$c_2 = \frac{\lambda\alpha^2 \int\limits_0^\infty \int\limits_0^d F(y)\, dy dG(d) + c\alpha^2 \int\limits_0^\infty e^{-\alpha d} \hat{F}_\alpha (y+d)\, dG(d)}{\int\limits_0^\infty e^{-\alpha d} Z(d,\alpha)\, dG(d)}.$$

Теорема 5.7. *Нехай для процесу X_t суми страхових виплат $Z(t)$ з урахуванням перестрахуванням описуються узагальненим процесом Пуассона*

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k,$$

де $N(t)$ – неперервний справа процес Пуассона з параметром λ і $(\xi_k \in R,\ k \geq 1)$ незалежні, з функцією розподілу $P(\xi_k < x) = G(x)$, причому $\xi_k = \xi_k^+ - \xi_k^-$ - можуть набувати від'ємних значень та задовольняються умови:

$$M \exp\left(\beta \xi_k^+\right) < \infty, \beta > 0,$$

$$M \exp\left(s \xi_k^-\right) < \infty, \quad \forall\ s \in R,$$

$$P(\xi_k > 0) > 0, \mu = E\xi.$$

Припустимо, що накопичений середній дохід додатний $c - \lambda\mu > 0$, і $\alpha < \beta$, де

$$\beta = \sup\left(s > 0;\ M \exp(s\xi_1) < \infty\right) \leq \infty,$$

$$\alpha = \sup\left(s < \beta; h(s) < 0\right) < \infty.$$

Тоді існує стала C_α така, що для всіх $\gamma < \beta$ справедливе зображення

$$r(x) - C_\alpha e^{-\alpha x} = \mathrm{O}\left(e^{-\gamma x}\right), x \to \infty.$$

Тут

$$C_\alpha = \frac{\hat{K}(\alpha)}{h'(\alpha)},$$

$$\hat{K}(s) = \lambda \hat{r}(0) - \lambda \hat{g}(s)\hat{r}(0) - \lambda s \int\limits_{-\infty}^{0} dG(y) \int\limits_0^\infty r(u)\, du \int\limits_{\substack{y \leq x \leq y+u \\ x \leq 0}}^{0} e^{sx} dx +$$

$$+\lambda s\int\limits_0^{\infty} e^{sx}\bar{G}(x)\,dx,$$

$$h(s)=cs-\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{sx}dG(x)+\lambda.$$

Теорема 5.8. *Нехай виконуються умови теореми 5.7. Тоді при $x\to\infty$ для функції $C_\alpha=e^{\alpha x}r(x)$ справедлива наступна оцінка*

$$C_1(\alpha)\le C(\alpha)=\lim_{x\to\infty}e^{\alpha x}r(x)\le C_2(\alpha),$$

де $C_1(\alpha)=\frac{\lambda H_+(\alpha)}{\alpha h'(\alpha)}$ *;* $C_2(\alpha)=\frac{\lambda H(\alpha)}{\alpha h'(\alpha)}$.

Розглянемо процес ризику з інтенсивністю премій, яка залежить від часової змінної. Поведінка цього процесу схожа на поведінку класичного процесу, але зростання на відміну від класичного випадку відбувається не за лінійним законом, а у вигляді функції c_t. Класичний процес ризику є достатньо вивчений і навіть виведені точні формули для знаходження ймовірності ризику. Процес з інтенсивністю залежною від часу виникає при дослідженні ринку за великий проміжок часу коли сума виплати премій не змінюється лінійно, а за деяким законом. Цей напрямок дослідження є досить новим і ще не достатньо добре досліджений.

Теорема 5.9. *Нехай* $M\exp(\beta\xi_1)<\infty,\beta>0;\lambda\mu<c=\int\limits_0^{\infty}c_s ds$. *Тоді для процесу* $dX(t)=c_tdt-dZ(t),\ X(0)=x$ *, справедливі оцінки:*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}e^{\alpha_2 x}r(x)\le\frac{\lambda H(\alpha_2)}{\alpha_2 h_2'(\alpha_2)},$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\,e^{\alpha_1 x}r(x)\ge\frac{\lambda H_+(\alpha_1)}{\alpha_1 h_1'(\alpha_1)},$$

α_1,α_2 *визначається з рівняння:*

$$c\alpha_i+\lambda=\lambda M\exp\left\{\alpha_i\xi_1+(-1)^i\alpha_i\Delta_i\right\},\ \ i=1,2.$$

Теорема 5.10. *Нехай Марковський процес* $(X_t,t\ge 0)$ *задається рівняннями* $dX(t)=c_tdt-dZ(t),\ X(0)=x$ *, виконується умова Крамера* $\beta=\sup(s>0;\ M\exp(s\xi_1)<\infty)>0$ *, для деякої сталої* $c>0$ *існує* $\gamma>0$ *така, що* $c(x)-c=O(\exp\{-\gamma x\}),\ x\to\infty$ *і виконується умова балансу. Тоді:*

а) якщо $\alpha<\beta$ *, то існує* $\rho\in(\alpha,\beta)$ *та стала* C_α *такі, що має місце зображення функції розорення:*

$$q(x)-C_\alpha\exp\{-\alpha x\}=O(\exp\{-\rho x\}),\ x\to\infty,$$

причому для всіх досить малих відхилень $c(x) - c$ *стала* C_α *додатна і існують границі*

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \ln q(x) = -\alpha,$$

$$C_\alpha = \lim_{x\to\infty} \exp\{\alpha x\} q(x) > 0,$$

де $\alpha \equiv \sup\{s < \beta : \lambda \hat{g}(s) < c\} \in (0, \infty), \beta = \sup(s > 0;\ M \exp(s\xi_1) < \infty) > 0;$

б) якщо $\alpha = \beta$, *то* $q(x) = O(\exp\{-\beta x\}),\ x \to \infty,\ \forall\gamma < \beta.$

ВИСНОВКИ

Основними результатами, наведеними в звіті, є такі:

– для лінійних ультрапараболічних рівнянь, які є узагальненнями рівняння Колмогорова, одержано теореми про існування, оцінки та властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків;

– для параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами з оператором Бесселя і рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова отримано явний вираз, точні оцінки та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші;

– досліджена повна характеризація розв'зків у спеціальних вагових L_p–просторах;

– для параболічних систем Солонникова–Ейдельмана описано постановку початкових задач і встановлено їх коректну розв'язність у просторах Гельдера;

– встановлено необхідність умови параболічності системи для правильності апріорних оцінок у просторах Гельдера загальних параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана;

– розширено простори W_{Ω}^{M} Гуревича, шляхом доповнення їх гладкими елементами, які необов'язково є цілими аналітичними функціями, та з'ясовано питання аналітичності й квазіаналітичності елементів цих просторів; встановлено зв'язок між ними в термінах перетворення Фур'є, описано множини згортувачів і мультиплікаторів у цих просторах. Уточнено топологію простору Φ_{γ} Городецького, породженого властивостями ФР задачі Коші для модельного параболічного рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання;

– означено нові класи параболічних псевдодиференціальних систем, які узагальнюють відомі класи параболічних за Петровським і Шиловим систем рівнянь із частинними похідними з коефіцієнтами, залежними лише від часової змінної. Для цих класів побудовано теорію коректної розв'язності задачі Коші в просторах нескінченно диференційовних функцій, повністю розв'язано відому проблему про розв'язність задачі Коші для систем псевдодиференціальних рівнянь, порядок однорідності головного матричного символу яких є меншим за одиницю;

– встановлено коректну розв'язність багатоточкової задачі для еволюційних рівнянь параболічного типу з псевдо-Бесселевим оператором, побудованим за однорідним точково-негладким символом у випадку, коли багатоточкова умова розглядається у просторі узагальнених функцій скінченного порядку. Розвинено методику дослідження фундаментального розв'язку цієї задачі та з'ясовано умови покращення локальної поведінки розв'язку при $t \to 0+$;

– встановлено умови існування інтегральних многовидів швидких та повільних змінних лінійних сингулярно збурених систем із запізненням, одержано асимптотичні розклади інтегральних многовидів;

– здійснено розщеплення лінійної сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь на дві незалежні підсистеми;

– методом усереднення досліджено стійкість системи диференціально-різницевих рівнянь із запізненням;

– встановлено теореми про точність апроксимації елемента запізнення в R^n;

– побудовані і обґрунтовані схеми апроксимації початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого і нейтрального типів та системи диференціально-різницевих та різницевих рівнянь із багатьма запізненнями;

– досліджено розв'язність крайових задач із запізненням, обґрунтовано схему їх апроксимації крайовою задачею для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь та здійснено моделювання крайових задач із запізненням на ЕОМ;

– досліджена задача знаходження мінімаксних оцінок функціоналів від правих частин рівнянь, які входять в постановку крайової задачі для рівняння лінійної теорії пружності з граничними умовами типу Неймана;

– досліджена динамічна модель теорії ризиків з неоднорідною інтенсивністю премій та перестрахуванням.

Розробка питань, яким присвячений звіт, є важливою і актуальною в зв'язку із необхідністю розвитку загальної теорії диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики, а також потребою наближеної побудови розв'язків математичних моделей реальних прикладних процесів.

Усі наведені в звіті результати є новими і мають наукову цінність. Вони можуть застосовуватись у теорії диференціальних, диференціально-функціональних, псевдодиференціальних рівнянь, теорії пружності, теорії випадкових процесів, при математичному моделювання фізичних, технічних, економічних і виробничих процесів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *Samuil D. Eidelman, Stepan D. Ivasyshen, Anatoly N. Kochubei* // Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).
2. *Лаюк В.В.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова / *Лаюк В.В.* // Одинадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 18–20 трав. 2006 р., Київ: матеріали конф. – К.: Задруга, 2006. – С. 176.
3. *Лаюк В.В.* Узагальнення рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова / *В.В. Лаюк, С.Д. Івасишен* // Диференціальні рівняння та їх застосування: міжнар. конф., 11–14 жовт. 2006 р., Чернівці: тези доп. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 83.
4. *Івасишен С.Д.* Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова / *С.Д. Івасишен, В.В. Лаюк* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 3. – С. 56–65.
5. *Івасишен С.* Про задачу Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова / *Степан Івасишен, Василь Лаюк* // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп. – Львів, 2007. – С. 111.
6. *Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова / *С.Д. Івасишен, В.В. Лаюк* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 37–40.
7. *Івасишен С.Д.* Рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова / *С.Д. Івасишен* // Наукові записки АН ВШ України. – 2008. – Т. 3. – С. 11–15.
8. *Івасишен С.Д.* Про задачу Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь / *Степан Івасишен, Василь Лаюк* // Сучасні проблеми механіки та математики: в 3 т. – Львів, 2008. – Т. 3. – С. 114–115.
9. *Лаюк В.В.* Властивості фундаментальних розв'язків деяких вироджених рівнянь типу Колмогорова / *Лаюк В.В.* // Дванадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 15–17 трав. 2008 р., Київ: матеріали конф. Т. 1. – К.: Задруга, 2008. – С. 235.
10. *Лаюк В.В.* Властивості розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь / *В.В. Лаюк* // Доп. НАН України. – 2009. – № 4. – С. 28–32.

11. *Івасишен С.Д.* Характеризація розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова / *Степан Д. Івасишен, Василь В. Лаюк* // Укр. мат. вісник. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 1–38.
12. *Івасишен С.Д.* Характеризація розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова / *Івасишен С.Д, Лаюк В.В.* // Тринадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 13–15 трав. 2010 р., Київ: матеріали конф. Т. 1. – К.: НТУУ, 2010. – С. 175.
13. *Пасічник Г.* Про задачу Коші для виродженого рівняння Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами / *Галина Пасічник* // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп. – Львів, 2007. – С. 216.
14. *Пасічник Г.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння Колмогорова другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами / *Г.С. Пасічник* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 71–74.
15. *Івасишен С.Д.* Про задачу Коші для деяких параболічних рівнянь з виродженнями /*Івасишен С.Д., Балабушенко Т.М., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* // Одинадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 18–20 трав. 2006 р., Київ: матеріали конф. – К.: Задруга, 2006. – С. 111.
16. *Балабушенко Т.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами /*Т.М. Балабушенко, С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Л.М. Мельничук* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5–11.
17. *Балабушенко Т.М.* Задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами /*Т.М. Балабушенко, С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Л.М. Мельничук* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 314–315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 7–16.
18. *Балабушенко Т.М.* Інтегральне зображення розв'язків деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами /*Т.М. Балабушенко, С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Л.М. Мельничук* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 336–337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 7–15.
19. *Балабушенко Т.* Про характеризацію деяких класів розв'язків параболічних рівнянь із виродженнями /*Тоня Балабушенко, Володимир Лавренчук,*

Ліля Мельничук // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп. – Львів, 2007. – С. 17.

20. *Івасишен С.Д.* Про задачу Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу /*Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди, 8–13 черв. 2009 р., Чернівці: тези доп. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 63–65.

21. *Івасишен С.Д.* Характеризація розв'язків рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова деяких нормальних марковських процесів: [Електронний ресурс] /*С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник* // Український математичний конгрес – 2009, 27–29 серп. 2009 р., Київ. – Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/PasichnykIvas.pdf.

22. *Івасишен С.Д.* Задача Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу / *С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 15–22.

23. *Тихонов В.И.* Марковские процессы / *В.И. Тихонов, М.А. Миронов.* – Москва: Сов. радио, 1977. – 488 с.

24. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / *В.А. Солонников* // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.

25. *Івасишен С.Д.*Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1501 – 1510.

26. *Івасишен С.Д.* Початкові задачі для параболічних систем Солонникова–Ейдельмана /*Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 7 – 11.

27. *Івасишен С.Д.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана /*Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 650 – 671.

28. *Івасюк Г.П.* Про зведення загальної початкової задачі до задачі з нульовими початковими даними для параболічних за Солонниковим систем квазіоднорідної структури /*Г.П. Івасюк* // Одинадцята міжнар. наук. конф. ім. академіка М.Кравчука (18 – 20 травня 2006 р., Київ): Матеріали конференції. – К., 2006. – С. 113.

29. *Івасюк Г.П.* Про властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку /*Г.П. Івасюк* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 51 – 56.

30. *Івасюк Г.П.* Коректна розв'язність початкової задачі для модельної параболічної за Солонниковим системи з квазіоднорідною структурою /*Г.П. Івасюк* // Міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100-й річниці з дня народження Я.Б.Лопатинського (12 - 17 вересня 2006 р., Львів): Тези доповідей. – Львів, 2006. – С. 25 – 26.

31. *Івасюк Г.П.* Про параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури /*Г.П. Івасюк* // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 60-річчю заснування каф. диф. рівнянь та пам'яті професора С.Д.Ейдельмана (11 - 14 жовтня 2006 р., Чернівці): Тези доповідей. – Чернівці, 2006. – С. 55.

32. *Івасюк Г.П.* Про початкові задачі для параболічних систем Солонникова–Ейдельмана /*Г.П. Івасюк* // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я.Скоробогатька (24 - 28 вересня 2007 р., Дрогобич): Тези доповідей. – Львів, 2007. – С. 112.

33. *Черевко И.М.* Декомпозиция сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". – Москва, 2007. – С. 62-63.

34. *Черевко І.М.* Інтегральні многовиди повільних змінних лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь //Тези доповідей міжнародної математичної конференції ім. В.Я.Скоробагатька. – Львів, 2007. – 289 с.

35. *Черевко І.М., Піддубна Л.А.* Про інтегральні многовиди сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь із запізненням // Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування. Тези доповідей. 16-21 червня 2008р. Мелітополь, 2008. – С. 122.

36. *Черевко І.М.* Про інтегральні многовиди сингулярно збурених систем із запізненням // 9 Крымская Международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения": Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008г. / Таврический национальный ун-т. – Симферополь, 2008. – С. 175.

37. *Черевко І.М.* Дослідження сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь методом інтегральних многовидів процесів

// Український математичний конгрес – 2009 (27-29.08.2009, Київ). – http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/ Cherevko.pdf

38. *Halanay A.* An invariant surface for some linear singularly perturbed systems with time lag // J. Diff. Eqs. – 1966. – **2**, № 1. – P.33-46.

39. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 6. – С. 725-731.

40. *Черевко И.М.* Оценка фундаментальной матрицы сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений и некоторые ее применения // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 281-283.

41. *Perestyuk M.O., Cherevko I.M.* Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 3. – P. 345-353.

42. *Черевко І.М.* Розшеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – С. 32-36.

43. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

44. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

45. *Стрыгин В.В., Соболев В.А* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

46. *Клевчук І.І.* Устойчивость решений оного класса линейных систем с запаздыванием // VIII Крымская международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения"(10-17 сентября 2006р., Алушта): Тез. докл. – Сімферополь: ДиАйПи, 2006. – С. 79.

47. *Клевчук І.І.* Застосування методу усереднення до дослідження періодичних розв'язків та стійкості диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314 - 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 85-90.

48. *Клевчук І.І.* Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробагатька (24-28.09.2007, Дрогобич):Тези доп. – Львів, 2007. – С. 130.

49. *Клевчук І.І.* Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 37-41.

50. *Клевчук І.І.* Застосування методу усереднення до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь // XII міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука, 15-17 травня 2008р. К.: ТОВ "Задруга". – С. 185.

51. *Клевчук І.І.* Застосування методу нормальних форм до дослідження стійкості лінійних систем із запізненням // 13 Міжнар. наук. конф. імені академіка М.Кравчука (13-15 травня 2010 р., Київ): Тези доп. – С. 195.

52. *Hale J.K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. – 1966. – **2**, No 1. – P. 57-73.

53. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.

54. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

55. *Фодчук В.І., Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С.23-25.

56. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 4. – С. 464-472.

57. *Гермаидзе В.Е.* Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, вып. 4. – С. 149-156.

58. *Литовченко В.А.* Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних систем у просторах нескінченно диференційовних функцій // Автореферат дис. ... доктор. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Чернівці, 2009. – 296 с.

59. *Литовченко В.А.* Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами / В.А. Литовченко // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 375-394.

60. *Литовченко В.А.* Задача Коши для параболических систем с операторами свертки в периодических пространствах // Мат. заметки. – 2007. – Т. 82, № 6. – С. 850-872.

61. *Литовченко В.А.* Задача Коши для одного класса эволюционных систем параболического типа с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 812-830.

62. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами диференціювання // Укр. мат.

журн. – 2006. – Т. 58, № 9. – С. 1211-1233.

63. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами // Укр. мат. вісник. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 19-51.

64. *Літовченко В.А.* Задача Коші для сингулярних пседодиференціальних систем параболічного типу // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 1. – С. 21-55.

65. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем у просторах періодичних функцій // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 394-420.

66. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з гладкими символами // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 502-524.

67. *Літовченко В.А.* Коректна розв'язність задачі Коші для одного класу опуклих псевдодиференціальних рівнянь // Матеріали XI-ої міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука, 18-20 травня 2006 р., Київ. – К. : Задруга, 2006. – С. 181.

68. *Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних ПДС з точково-негладкими символами // Матеріали XII-ої міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука, 15-17 травня 2008 р., Київ. – К.: Задруга, 2008. – Ч. 1. – С. 245.

69. *Літовченко В.А.* Задача Коші для сингулярних систем // Міжнар. матем. конф. ім. В.Я. Скоробагатька, 24-28 вересня 2007, Дрогобич: тези доп. – Львів, 2007. – С. 167.

70. *Спіжавка Д.* Властивість локалізації розв'язків m-точкової задачі для сингулярних еволюційних рівнянь(випадок $m \geq 3$) // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. пр. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 83-87.

71. *Городецький В.В., Спіжавка Д.І.* Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2009. – №12. – С. 7-12.

72. *Спіжавка Д.І., Городецький В.В.* Багатоточкова задача для одного класу еволюційних рівнянь // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди. Тези доповідей. – Чернівці: Книги XXI, 2009. – С. 168-169.

73. *Спіжавка Д.І.* Багатоточкові задачі для сингулярних еволюційних рівнянь // Третя міжнародна конференція молодих вчених, присвячена Я.Б. Лопатинському "Диференціальні рівняння та їх застосування". Матеріали конференції. Донецьк: ТОВ "Цифрова типографія", 2010. – С. 86.

74. *Готинчан Т.І.* Про існування області, в якій зберігаються оцінки на дійсній осі деяких цілих функцій // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 36-39

75. *Готинчан Т.І.* Про зв'язок між оцінками похідних на дійсній осі елементів та мультиплікаторів простору та їхньою поведінкою в деякій області комплексної площини // XII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 15-17 травня 2008 р., Київ: Матеріали конф. – К.: ТОВ Задруга. – С. 581.

76. *Готинчан Т.І.* Про оцінки ядер лінійних методів підсумовування типу Гаусса-Вейєрштрасса рядів Фур'є-Лагерра // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, 11-14 жовтня 2006 року / Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 29.

77. *Горбачук В.И., М.Л. Горбачук* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, №4. – С. 799-803.

78. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 308 с.

79. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 276 с.

80. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 97, № 6. – С. 949-952.

81. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225с.

82. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 39-44.

83. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

84. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

85. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь із багатьма запізненнями // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 50-54.

86. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, №3. — С. 328-335.

87. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація елемента запізнення в R^n. // Диференціальні рівняння та їх застосування: міжнарюконф.(11-14 жовтня 2006 р., Чернівці): тези доповідей. – Чернівці:Рута, 2006. — С. 103.

88. *Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. // IV Всеукраїнська наукова конференція: нелінійні проблеми аналізу: тези доповідей. – Івано-Франківськ: Плай, 2008. — С. 64.

89. *Репин Ю.М.*О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – Т. 29, №2. – С. 226 - 235.

90. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений // М.:Мир. – 1984. – 421 с.

91. *Піддубна Л.А., Пернай С.А.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь та їх квазіполіномів // 9 Крымская Международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения": Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008г. / Таврический национальный ун-т. – Симферополь, 2008. – С.136.

92. *Матвій О.В., Пернай С.А., Піддубна Л.А.* Про апроксимацію систем різницевих рівнянь // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2009. – С.110-111.

93. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы / А.Ю. Лучка. – К. : Наук. думка, 1993. – 286 с.

94. *Nikolova N.S.* Application of spline-function for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations / N.S. Nikolova, D.D. Bainov // Yokohama Math. J. – 1981. – Vol. 29, N 1. – P. 108-122.

95. *Черевко И.М.* Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргумен-том / И.М. Черевко, И.В. Якимов // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, N 6. – С. 854-860.

96. *Матвій О.В.* Апроксимація крайових задач із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь / О.В. Матвій, І.М. Черевко // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2003. – № 3. – С. 129-137.

97. *Toselli A., Widlund O.* Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. – Berlin, Heidelberg, New-York.: Springer, 1972. – 450 p.

98. *Наконечний О.Г., Подлипенко Ю.К., Перцов А.С.* Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана. // Доповіді НАН України. – 2010. – №2. – С. 43-50.

99. *Перцов А.С.* Минимаксное оценивание неизвестных данных краевой задачи для бигармонического уравнения с граничными условиями типа Неймана. // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №1. – С. 103-112.

100. *Подлипенко Ю.К., Перцов А.С.* Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармоничного рівняння з граничними умовами типа Неймана. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №4. – С. 153-160.

101. *Andersen E.S.* On the collective theory of risk in case of contagion between claims. // Trans. XVth Intern. Congress of Actuarials. – New York, 1957. – C. 219-229.

102. *Chistyakov V.P.* A theorem on sums of irv and its applications to branching processes. // Theor. Probability Appl. – **9**. – 1964. – P. 640-648.

103. *Cline D.B.H.* Convolution tails product tails and domain of attraction. // Prob. Theory Related Fields. – **72**. – 1986. – P. 529-557.

104. *Embrechts P., Goldie CM., Veraverbeke N.* Subexponentiality and infinite divisibility. // Z.Wahrsch. Verm.Geb. – **49**. – 1979. – P. 335-347.

105. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. – vol. 2. – New York: John Wiley & Sons, 1966 – 527 p.

106. *Gerber H., Shiu E.S.W.* On the time value of ruin // Proc. Of the 31 Actuarial Research Conference, Ball Statte Univ., 1996. – P. 145-199.

107. *Grandell J.* Aspects of risk theory, Springer-Verlag. – New York, 1991. – 175 p.

108. *Kartashov N.V.* Strong stable Markov chains, VSP/TBiMC, Utrecht. – Kiev, 1996. – 138 p.

109. *Petersen S.S.* Calculation of ruin probabilities when the premium depends on the current reserve // Scand. Actuarial J. – 1990. – P. 147-159.

110. *Taylor G.C.* Probability of ruin with variable premium rate // Scand. Actuarial J. – 1980. – P. 57-76.

111. *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 369 с.

112. *В. Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – 529 с.

113. *Г.И. Фалин.* Математический анализ рисков в страховании. – М.: Рос. Юридич. изд. дом., 1994. – 130 с.

114. *М.М. Леоненко, Ю.С. Мішура, В.М. Пархоменко, М.Й. Ядренко.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформатика, 1995. – 380 с.

115. *У. Сенета.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

116. *Строєв О.М.* Оцінка ймовірності розорення процесу ризику з перестрахуванням // Вісник Київського університету. Серія: Математика, механіка. 13/14. – Київ: 2005. – С. 97-101.

117. *Карташов М.В., Строєв О.М.* Наближення Лундберга для функції ризику у майже однорідному середовищі // Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ, 2005. – В. 73. – С. 63-72.

118. *Строєв О.М.* Оцінка ймовірності розорення процесу ризику з неоднорідною інтенсивністю премій // Вісник Київського університету: Зб.наук.пр. Математика, механіка. 17-18. – Київ: 2007. – С. 97-101.

119. *Строєв О.М.* Операторне представлення процесу ризику // XII міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука, 15-17 травня 2008 р. – К.: ТОВ "Задруга", 2008. – С. 387.

120. *Лавренчук В.П., Букатар М.І., Кушнірчук В.Й., Пертен С.І.* Математичні моделі управління ризиком: Навчальний посібник. – Чернівці: ЧТЕІ КНТЕУ, 2006. – 164 с.

121. *Кушнірчук В.Й., Стецько Ю.П.* Про лінеаризацію векторного критерію в моделі еколого-економічного розвитку // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"(11-14 жовтня 2006р., Чернівці): Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 79.

122. *Кушнірчук В.Й.* Про один метод розв'язування багатокритеріальної задачі еколого-економічного розвитку // Праці III-ї міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень". – Ужгород: УжНУ, 2006. – С. 64-65.